

## CONVECCIÓN INTERNA FORZADA

**E**n las aplicaciones de calentamiento y enfriamiento, es común el uso del flujo de líquido o gas a través de tubos y ductos. En ellas, se fuerza al fluido a desplazarse por medio de un ventilador o bomba por un tramo de tubo o ducto que es suficientemente largo como para realizar la transferencia deseada de calor. En este capítulo, se pone atención particular en la determinación del *factor de fricción* y del *coeficiente de convección*, ya que están relacionados en forma directa con la *caída de presión* y con la *razón de la transferencia de calor*, respectivamente. Así, estas cantidades son usadas para determinar la necesidad de potencia de bombeo y la longitud requerida del tubo.

Se tiene una diferencia fundamental entre los flujos interno y externo. En el *flujo externo*, considerado en el capítulo 7, el fluido tiene una superficie libre y, como consecuencia, la capa límite sobre la superficie del cuerpo sólido puede crecer en forma indefinida. Sin embargo, en el *flujo interno*, el fluido está confinado por completo por las superficies interiores del tubo y, por consiguiente, existe un límite en el crecimiento posible de la capa límite.

Se inicia este capítulo con una descripción física general del flujo interno, así como de la *velocidad promedio* y la *temperatura promedio*. Se continúa con la discusión de las *longitudes de entrada*, *hidrodinámica* y *térmica*, el *flujo en desarrollo* y el *flujo completamente desarrollado*. A continuación, se obtienen los perfiles de velocidad y temperatura para el flujo laminar completamente desarrollado y se desarrollan relaciones para el factor de fricción y el número de Nusselt. Por último, se presentan relaciones empíricas para los flujos en desarrollo y completamente desarrollado, y se demuestra su aplicación.

### OBJETIVOS

Cuando el lector termine de estudiar este capítulo, debe ser capaz de:

- Obtener la velocidad promedio a partir de un conocimiento del perfil de velocidad, así como la temperatura promedio a partir de un conocimiento del perfil de temperatura, en el flujo interno
- Tener una comprensión visual de las diferentes regiones del flujo, en el flujo interno: las regiones de entrada y de flujo completamente desarrollado; asimismo, calcular las longitudes de entrada hidrodinámica y térmica
- Analizar el calentamiento y el enfriamiento de un fluido que se desplaza en un tubo, en condiciones de temperatura de superficie constante y de flujo constante de calor en la superficie, así como trabajar con la diferencia media logarítmica de temperatura
- Obtener relaciones analíticas para el perfil de velocidad, la caída de presión, el factor de fricción y el número de Nusselt, en el flujo laminar completamente desarrollado, y
- Determinar el factor de fricción y el número de Nusselt en el flujo turbulento completamente desarrollado, con la aplicación de relaciones empíricas, y calcular la caída de presión y la razón de la transferencia de calor.

### CONTENIDO

8-1	Introducción	452
8-2	Velocidad y temperatura promedios	453
8-3	La región de entrada	455
8-4	Análisis térmico general	458
8-5	Flujo laminar en tubos	463
8-6	Flujo turbulento en tubos	473
	<b>Tema de interés especial:</b>	
	Flujo de transición en tubos	482
	<b>Resumen</b>	490
	<b>Bibliografía y lecturas sugeridas</b>	491
	<b>Problemas</b>	492

## 8-1 ■ INTRODUCCIÓN

Los términos *tubo*, *ducto* y *conducto* suelen usarse en forma intercambiable para los tramos de flujo. En general, los tramos de flujo de sección transversal circular son nombrados *tubos* (en especial cuando el fluido es un líquido), y los tramos de flujo de sección transversal no circular, *ductos* (en especial cuando el fluido es un gas).\*

Es probable que el lector haya advertido que la mayor parte de los fluidos, en especial los líquidos, se transportan en *tubos circulares*. Esto se debe a que los tubos con una sección transversal circular pueden soportar grandes diferencias de presión de adentro y de afuera del tubo, sin sufrir una distorsión significativa. Los *tubos no circulares* suelen ser usados en aplicaciones como los sistemas de calefacción y enfriamiento de los edificios, en donde la diferencia de presión es relativamente pequeña, los costos de fabricación e instalación son más bajos y el espacio del que se dispone para la revisión y reparación del ducto es limitado (figura 8-1). Para un área superficial fija, el tubo circular da la mayor transferencia de calor para la caída de presión más baja, lo cual explica la abrumadora popularidad de los tubos circulares en los equipos de transferencia de calor.

Aunque la teoría del flujo de fluidos está comprendida razonablemente bien, soluciones teóricas sólo son obtenidas para unos cuantos casos sencillos, como el de un flujo laminar completamente desarrollado en un tubo circular. Por lo tanto, para la mayor parte de los fluidos se debe buscar apoyo en resultados experimentales y relaciones empíricas, y no en soluciones analíticas que permitan conocer todas las variables desconocidas a base de las variables dadas. Al advertir que los resultados experimentales son obtenidos en condiciones de laboratorio controladas de manera cuidadosa y que no hay dos sistemas que sean exactamente semejantes, no se debe ser tan ingenuo como para ver los resultados obtenidos como “exactos”. Un error de 10% (o más) en los factores de fricción calculados con la aplicación de las relaciones dadas en este capítulo es la “norma”, en lugar de la “excepción”.

La velocidad del fluido en un tubo cambia de *cero* en la superficie, debido a la condición de no deslizamiento, hasta un máximo en el centro del mismo. En el flujo de fluidos, resulta conveniente trabajar con una velocidad *promedio*,  $V_{\text{prom}}$ , la cual se mantiene constante en el flujo incompresible, cuando el área de la sección transversal del tubo es constante (figura 8-2). La velocidad promedio en las aplicaciones de calefacción y enfriamiento puede cambiar un tanto en virtud de las modificaciones en la densidad debidos a la temperatura. Pero, en la práctica, se evalúan las propiedades del fluido a alguna temperatura promedio y se les trata como constantes. La conveniencia de trabajar con propiedades constantes por lo general justifica suficientemente la ligera pérdida en exactitud.

Asimismo, la fricción entre las partículas del fluido en un tubo en realidad causa un ligero aumento en la temperatura del propio fluido, como resultado de la energía mecánica que se está convirtiendo en energía térmica sensible. Pero esta elevación de la temperatura debido al *calentamiento por fricción* suele ser demasiado pequeña para garantizar alguna consideración en los cálculos y, como consecuencia, se descarta. Por ejemplo, en ausencia de cualquier transferencia de calor, no se puede detectar una diferencia notable entre las temperaturas de entrada y de salida de agua que fluya en un tubo. La consecuencia principal de la fricción en el flujo de fluidos es la caída de presión, por lo que cualquier cambio significativo de temperatura en el fluido se

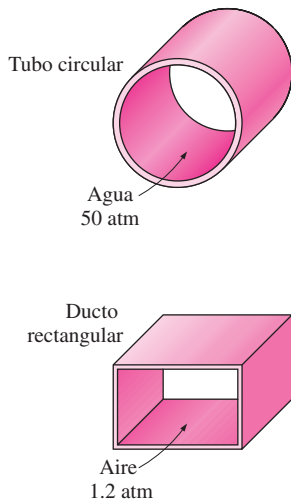


FIGURA 8-1

Los tubos circulares pueden soportar grandes diferencias de presión entre el interior y el exterior sin sufrir distorsión, pero los tubos no circulares no.

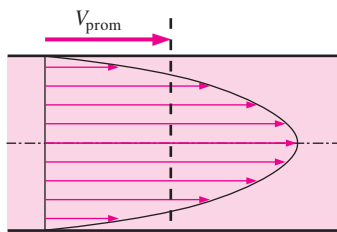


FIGURA 8-2

La velocidad promedio  $V_{\text{prom}}$  se define como la magnitud promedio de la velocidad a través de una sección transversal. Para el flujo laminar completamente desarrollado en tubos,  $V_{\text{prom}}$  es la mitad de la velocidad máxima.

\*Nota del RT: Al traducir del inglés al español las palabras *pipe* y *tube* se utiliza el vocablo *tubo*; sin embargo los tubos de diámetro pequeño comúnmente son llamados *tubes*, mientras que a los tubos de mayores diámetros se conocen como *pipes*. Dada esta incertidumbre, en esta obra se usarán frases más descriptivas (como *un tubo circular* o *un ducto rectangular*) siempre que sea necesario, a fin de evitar cualquier malentendido.

debe a transferencia de calor. Pero se debe considerar el calentamiento por fricción para los flujos en los que intervienen fluidos intensamente viscosos con gradientes grandes de velocidad.

## 8-2 ■ VELOCIDAD Y TEMPERATURA PROMEDIOS

En el flujo externo, la velocidad de la corriente libre sirvió como una velocidad de referencia conveniente para usarse en la evaluación del número de Reynolds y el coeficiente de fricción. En el flujo interno, no se tiene corriente libre y, como consecuencia, se necesita una alternativa. La velocidad de un fluido en un tubo cambia desde cero en la superficie, en virtud de la condición de no deslizamiento, hasta un máximo en el centro del propio tubo. Por lo tanto, resulta conveniente trabajar con una **velocidad promedio** o **media**,  $V_{\text{prom}}$ , la cual permanece constante para el flujo incompresible cuando el área de la sección transversal del tubo es constante.

El valor de la velocidad media,  $V_{\text{prom}}$ , en un tubo se determina a partir del requisito de que se debe satisfacer el *principio de conservación de la masa* (figura 8-2). Es decir,

$$\dot{m} = \rho V_{\text{prom}} A_c = \int_{A_c} \rho u(r) dA_c \quad (8-1)$$

en donde  $\dot{m}$  es el gasto de masa,  $\rho$  es la densidad,  $A_c$  es el área de la sección transversal y  $u(r)$  es el perfil de velocidad. Entonces la velocidad promedio para el flujo incompresible en un tubo circular de radio  $R$  se puede expresar como

$$V_{\text{prom}} = \frac{\int_{A_c} \rho u(r) dA_c}{\rho A_c} = \frac{\int_0^R \rho u(r) 2\pi r dr}{\rho \pi R^2} = \frac{2}{R^2} \int_0^R u(r) r dr \quad (8-2)$$

Por lo tanto, cuando se conoce el gasto o el perfil de velocidad, se puede determinar con facilidad la velocidad promedio.

Cuando un fluido se calienta o se enfría conforme fluye por un tubo, su temperatura en cualquier sección transversal cambia de  $T_s$  en la superficie de la pared hasta algún máximo (o mínimo, en el caso del calentamiento) en el centro del tubo. En el desplazamiento de fluidos, resulta conveniente trabajar con una **temperatura promedio** o **media**,  $T_m$ , la cual permanece constante en una sección transversal. A diferencia de la velocidad media, la temperatura media  $T_m$  cambia en la dirección del flujo, siempre que el fluido se caliente o se enfríe.

El valor de la temperatura media  $T_m$  se determina con base en el requisito de que se debe satisfacer el *principio de conservación de la energía*. Es decir, la energía transportada por el fluido a través de una sección transversal en el flujo real debe ser igual a la energía que se transportaría a través de la misma sección transversal si el fluido estuviera a una temperatura constante  $T_m$ . Esto se puede expresar matemáticamente como (figura 8-3)

$$\dot{E}_{\text{fluido}} = \dot{m} c_p T_m = \int_{A_c} c_p T(r) \delta \dot{m} = \int_{A_c} \rho c_p T(r) u(r) V dA_c \quad (8-3)$$

en donde  $c_p$  es el calor específico del fluido. Adviértase que el producto  $\dot{m} c_p T_m$ , en cualquier sección transversal a lo largo del tubo, representa el *flujo de energía* con el fluido en esa sección transversal. Entonces, la temperatura media de un fluido, con densidad y calor específico constantes, que fluye en un tubo circular de radio  $R$ , se puede expresar como

$$T_m = \frac{\int_{A_c} c_p T(r) \delta \dot{m}}{\dot{m} c_p} = \frac{\int_0^R c_p T(r) \rho u(r) 2\pi r dr}{\rho V_{\text{prom}} (\pi R^2) c_p} = \frac{2}{V_{\text{prom}} R^2} \int_0^R T(r) u(r) r dr \quad (8-4)$$

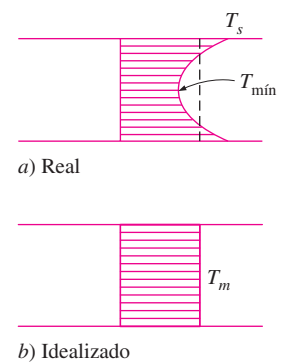


FIGURA 8-3

Perfiles real e idealizado de temperatura para el flujo en un tubo (la velocidad a la cual se transporta la energía con el fluido es la misma para ambos casos).

Note que la temperatura media  $T_m$  de un fluido cambia durante el calentamiento o el enfriamiento. Asimismo, las propiedades del fluido en el flujo interno suelen evaluarse en la *temperatura media del fluido con respecto a la masa*, la cual es el promedio aritmético de las temperaturas medias en la admisión y la salida; es decir,  $T_b = (T_{m,i} + T_{m,e})/2$ .

## Flujos laminar y turbulento en tubos

El flujo en un tubo puede ser laminar o turbulento, dependiendo de las condiciones del mismo. El flujo de fluidos sigue líneas de corriente y, como consecuencia, es laminar a velocidades bajas, pero se vuelve turbulento conforme se incrementa la velocidad más allá de un valor crítico. La transición de flujo laminar a turbulento no ocurre de manera repentina; más bien, se presenta sobre algún intervalo de velocidad, donde el flujo fluctúa entre laminar y turbulento antes de volverse por completo turbulento. La mayor parte de los flujos en tubos que se encuentran en la práctica son turbulentos. El flujo laminar se encuentra cuando fluidos intensamente viscosos, como los aceites, fluyen en tubos de diámetro pequeño o pasos angostos.

Para el flujo en un tubo circular, el número de Reynolds se define como

$$Re = \frac{\rho V_{\text{prom}} D}{\mu} = \frac{V_{\text{prom}} D}{\nu} \quad (8-5)$$

en donde  $V_{\text{prom}}$  es la velocidad promedio del flujo,  $D$  es el diámetro del tubo y  $\nu = \mu/\rho$  es la viscosidad cinemática del fluido.

Para el flujo por tubos no circulares, el número de Reynolds así como el número de Nusselt y el factor de fricción se basan en el **diámetro hidráulico**  $D_h$ , definido como (figura 8-4)

$$D_h = \frac{4A_c}{p} \quad (8-6)$$

donde  $A_c$  es el área de la sección transversal del tubo y  $p$  es su perímetro. El diámetro hidráulico se define en tal forma que se reduce al diámetro común  $D$  para los tubos circulares, ya que

$$\text{Tubos circulares:} \quad D_h = \frac{4A_c}{p} = \frac{4\pi D^2/4}{\pi D} = D$$

Por supuesto, resulta conveniente tener valores precisos de los números de Reynolds para los flujos laminar, de transición y turbulento, pero, en la práctica, este no es el caso. Esto se debe a que la transición de flujo laminar a turbulento también depende del grado de perturbación que ese flujo recibe por parte de la *aspereza de la superficie*, las *vibraciones del tubo* y las *fluctuaciones en el flujo*. En las condiciones más prácticas, el flujo en un tubo es laminar para  $Re < 2\,300$ , turbulento para  $Re > 10\,000$  y, en los valores intermedios, de transición. Pero se debe tener presente que, en muchos casos, el flujo se vuelve completamente turbulento para  $Re > 4\,000$ , como se discute en el “Tema de interés especial”, al final de este capítulo. Cuando se diseñan redes de tuberías y se determina la potencia de bombeo, se aplica un enfoque conservador y se supone que los flujos con  $Re > 4\,000$  son turbulentos.

En el flujo de transición éste oscila entre laminar y turbulento de manera aleatoria (figura 8-5). Se debe tener presente que, en tubos muy lisos, se puede mantener el flujo laminar con números de Reynolds mucho más altos, para evitar las perturbaciones del flujo y las vibraciones del tubo. En experimentos cuidadosamente controlados de esa manera, se ha mantenido el flujo laminar con números de Reynolds de hasta 100 000.

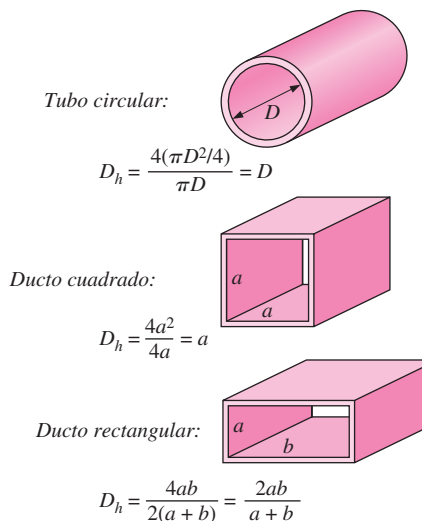


FIGURA 8-4

El diámetro hidráulico  $D_h = 4A_c/p$  se define en tal forma que se reduce al diámetro común para los tubos circulares.

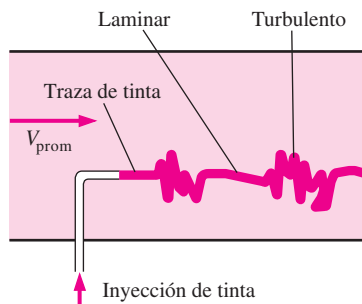


FIGURA 8-5

En la región de transición, el flujo cambia aleatoriamente entre laminar y turbulento.

### 8-3 ■ LA REGIÓN DE ENTRADA

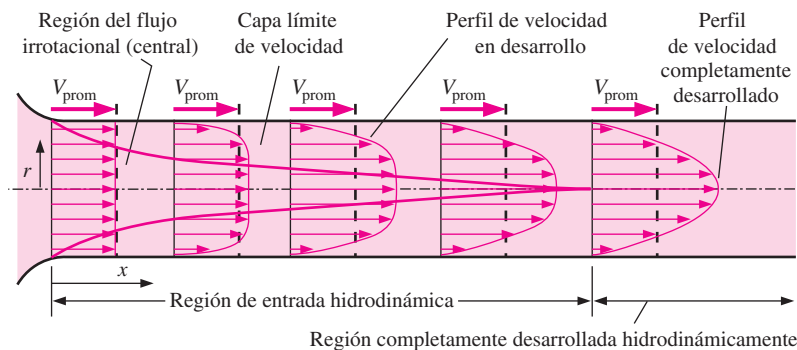
Considérese un fluido que entra a un tubo circular a una velocidad uniforme. Debido a la condición de no deslizamiento, las partículas del fluido en la capa en contacto con la superficie del tubo llegan a detenerse por completo. Esta capa también causa que las partículas del fluido en las capas adyacentes se desaceleren en forma gradual como resultado de la fricción. Para compensar esta reducción en la velocidad, la velocidad del fluido en el centro del tubo tiene que incrementarse a fin de mantener constante el flujo de masa por el tubo. Como resultado, se desarrolla un gradiente de velocidad a lo largo del tubo.

La región del flujo en la cual se sienten los efectos de las fuerzas cortantes viscosas causadas por la viscosidad del fluido se llama **capa límite de velocidad** o sólo **capa límite**. Una superficie fronteriza hipotética divide en dos regiones el flujo en un tubo: la **región de la capa límite**, en la cual los efectos viscosos y los cambios en la velocidad son significativos, y la **región del flujo irrotacional (central)**, en la cual los efectos de la fricción son despreciables y la velocidad permanece esencialmente constante en la dirección radial.

El espesor de esta capa límite se incrementa en la dirección del flujo hasta que esa capa llega al centro del tubo y, como consecuencia, llena éste por completo, como se muestra en la figura 8-6. La región que existe desde la entrada del tubo hasta el punto en donde la capa límite se une en la línea central se llama **región de entrada hidrodinámica**, y la longitud de esta región se conoce como **longitud de entrada hidrodinámica**,  $L_h$ . El flujo en la región de entrada se menciona como *flujo hidrodinámicamente en desarrollo*, ya que en esta región se desarrolla el perfil de velocidad. La región que se encuentra más allá de la región de entrada, en la cual el perfil de velocidad está completamente desarrollado y permanece inalterado, se conoce como **región completamente desarrollada hidrodinámicamente**. El perfil de velocidad en la región completamente desarrollada es *parabólico*, en el flujo laminar, y un tanto *más plano* o *más lleno* en el flujo turbulento, debido al movimiento arremolinado y al mezclado más vigoroso en la dirección radial.

Considere ahora un fluido a una temperatura uniforme que entra en un tubo circular cuya superficie se mantiene a una temperatura diferente. En esta ocasión, las partículas de fluido que están en la capa en contacto con la superficie del tubo toman la temperatura de esta superficie. Esto iniciará la transferencia de calor por convección en el tubo y el desarrollo de una **capa límite térmica** a lo largo de este último. El espesor de la capa límite también aumenta en la dirección del flujo hasta que alcanza el centro del tubo y, de este modo, lo llena por completo, como se muestra en la figura 8-7.

La región del flujo sobre la cual se desarrolla la capa límite térmica y alcanza el centro del tubo se llama **región térmica de entrada** y la longitud de esta región se llama **longitud térmica de la entrada**  $L_t$ . El flujo en la región de entrada térmica se llama *flujo en desarrollo térmico*, ya que es ahí donde se



**FIGURA 8-6**

Desarrollo de la capa límite de velocidad en un tubo. (El perfil desarrollado de velocidad promedio es parabólico en el flujo laminar, como se muestra, pero un tanto más plano o más lleno en el flujo turbulento).

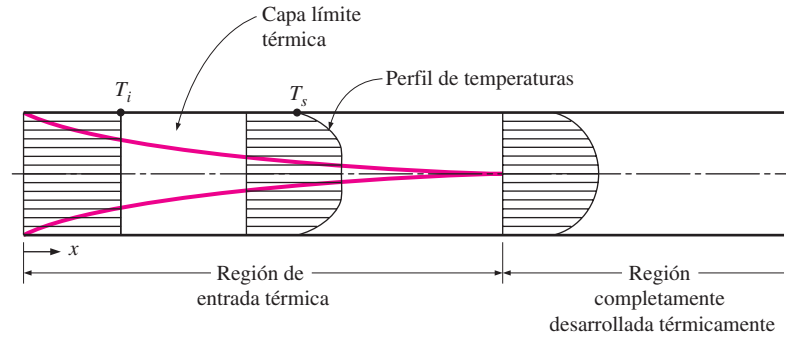


FIGURA 8-7

Desarrollo de la capa límite térmica en un tubo. (El fluido dentro del tubo se está enfriando.)

desarrolla el perfil de temperaturas. La zona que se encuentra más allá de la región de entrada térmica, en la que el perfil de temperaturas adimensionales, expresado como  $(T_s - T)/(T_s - T_m)$ , permanece inalterado se llama **región térmica completamente desarrollada**. La región en la cual el flujo está tanto hidrodinámico como térmicamente desarrollado y, como consecuencia, tanto el perfil de velocidades como el de temperaturas adimensionales permanecen inalterados se llama *flujo completamente desarrollado*; es decir,

$$\text{Completamente desarrollado hidrodinámico:} \quad \frac{\partial u(r, x)}{\partial x} = 0 \quad \longrightarrow \quad u = u(r) \quad (8-7)$$

$$\text{Completamente desarrollado térmicamente:} \quad \frac{\partial}{\partial x} \left[ \frac{T_s(x) - T(r, x)}{T_s(x) - T_m(x)} \right] = 0 \quad (8-8)$$

El esfuerzo cortante en la pared del tubo,  $\tau_w$ , está relacionado con la pendiente del perfil de velocidad en la superficie. Al advertir que el perfil de velocidad permanece inalterado en la región completamente desarrollada hidrodinámica, el esfuerzo cortante en la pared también permanece constante en esa región. Se puede dar un argumento semejante para el coeficiente de transferencia de calor en la región completamente desarrollada térmicamente.

En una región plenamente desarrollada térmicamente la derivada de  $(T_s - T)/(T_s - T_m)$  con respecto a  $x$  es cero por definición y, por tanto  $(T_s - T)/(T_s - T_m)$  es independiente de  $x$ . Entonces, la derivada de  $(T_s - T)/(T_s - T_m)$  con respecto a  $r$  también debe ser independiente de  $x$ ; es decir,

$$\frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{T_s - T}{T_s - T_m} \right) \Big|_{r=R} = \frac{-(\partial T / \partial r) \Big|_{r=R}}{T_s - T_m} \neq f(x) \quad (8-9)$$

El flujo de calor en la superficie se puede expresar como

$$\dot{q}_s = h_x(T_s - T_m) = k \frac{\partial T}{\partial r} \Big|_{r=R} \quad \longrightarrow \quad h_x = \frac{k(\partial T / \partial r) \Big|_{r=R}}{T_s - T_m} \quad (8-10)$$

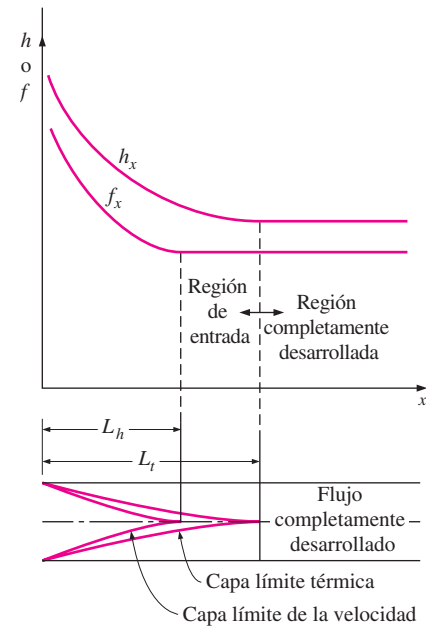
lo cual, por la ecuación 8-9, es independiente de  $x$ . Por lo tanto, se concluye que *en la región de un tubo completamente desarrollada térmicamente, el coeficiente local de convección es constante* (no varía con  $x$ ). Por ende, *la fricción (la cual está relacionada con el esfuerzo cortante en la pared) y los coeficientes de convección permanecen constantes en la región completamente desarrollada de un tubo*.

Note que el *perfil de temperaturas* en la región completamente desarrollada térmicamente varía con  $x$  en la dirección del flujo. Es decir, a diferencia del perfil de velocidades, el perfil de temperaturas puede ser diferente en secciones transversales diferentes del tubo en la región desarrollada y, por lo común, lo es. Sin embargo, el perfil de temperaturas adimensionales definido con anterior-

ridad permanece inalterado en la región térmicamente desarrollada cuando la temperatura o el flujo de calor en la superficie del tubo permanecen constantes.

Durante el flujo laminar en un tubo la magnitud del número adimensional de Prandtl ( $Pr$ ) es una medida del crecimiento relativo de las capas límite térmica y de la velocidad. Para los fluidos con  $Pr \approx 1$ , como los gases, las dos capas límite coinciden entre sí. Para los fluidos con  $Pr \gg 1$ , como los aceites, la capa límite de la velocidad crece más que la térmica. Como resultado, la longitud de la entrada hidrodinámica es más pequeña que la térmica. Se cumple lo opuesto para los fluidos con  $Pr \ll 1$ , como los metales líquidos.

Considérese un fluido que se está calentando (o enfriando) en un tubo, conforme se desplaza por él. El esfuerzo cortante en la pared y el coeficiente de transferencia de calor son *los más altos* en la entrada del tubo, en donde el espesor de las capas límite es el más pequeño, y decrecen en forma gradual hasta los valores del flujo completamente desarrollado, como se muestra en la figura 8-8. Por lo tanto, la caída de presión y el flujo de calor son *más altos* en las regiones de entrada de un tubo, y el efecto de la región de entrada siempre es *el incremento* del factor de fricción promedio y del coeficiente promedio de transferencia de calor evaluados para el tubo completo. Este incremento puede ser significativo para los tubos cortos, pero despreciable para los largos.



**FIGURA 8-8**

Variación del factor de fricción y del coeficiente de transferencia por convección en la dirección del flujo, para el flujo en un tubo ( $Pr > 1$ ).

## Longitudes de entrada

La longitud de entrada hidrodinámica suele tomarse como la distancia desde la entrada al tubo hasta aquella sección transversal donde el esfuerzo cortante en la pared (y, por consiguiente, el factor de fricción) se aproxima al valor del flujo completamente desarrollado dentro de 2% de diferencia. En el *flujo laminar*, las longitudes de entrada hidrodinámica y térmica se dan de manera aproximada como [véanse Kays y Crawford (1993) y Shah y Bhatti (1987)]

$$L_{h, \text{laminar}} \approx 0.05 Re D \quad (8-11)$$

$$L_{t, \text{laminar}} \approx 0.05 Re Pr D = Pr L_{h, \text{laminar}} \quad (8-12)$$

Para  $Re = 20$ , la longitud de la entrada hidrodinámica tiene un tamaño cercano al del diámetro, pero crece de manera lineal con la velocidad. En el caso límite de  $Re = 2\,300$  esa longitud es de  $115D$ .

En el *flujo turbulento*, el intenso mezclado que se efectúa en el curso de las fluctuaciones aleatorias suele dominar los efectos de la difusión molecular y, por lo tanto, las longitudes de entrada hidrodinámica y térmica tienen más o menos el mismo tamaño y son independientes del número de Prandtl. La longitud de entrada hidrodinámica para el flujo turbulento se puede determinar a partir de [véanse Bhatti y Shah (1987) y Zhi-qing (1982)]

$$L_{h, \text{turbulento}} = 1.359D Re^{1/4} \quad (8-13)$$

La longitud de entrada es mucho más corta en el flujo turbulento, como era de esperarse, y su dependencia del número de Reynolds es más débil. En muchos flujos en tubos de interés práctico, los efectos de la entrada se vuelven insignificantes más allá de la longitud de tubo igual a 10 diámetros, y las longitudes de entrada hidrodinámica y térmica se toman en forma aproximada como

$$L_{h, \text{turbulento}} \approx L_{t, \text{turbulento}} \approx 10D \quad (8-14)$$

En la figura 8-9 se da la variación del número de Nusselt local a lo largo de un tubo en flujo turbulento, tanto para la temperatura superficial uniforme como para el flujo de calor uniforme en la superficie, para el intervalo de núme-

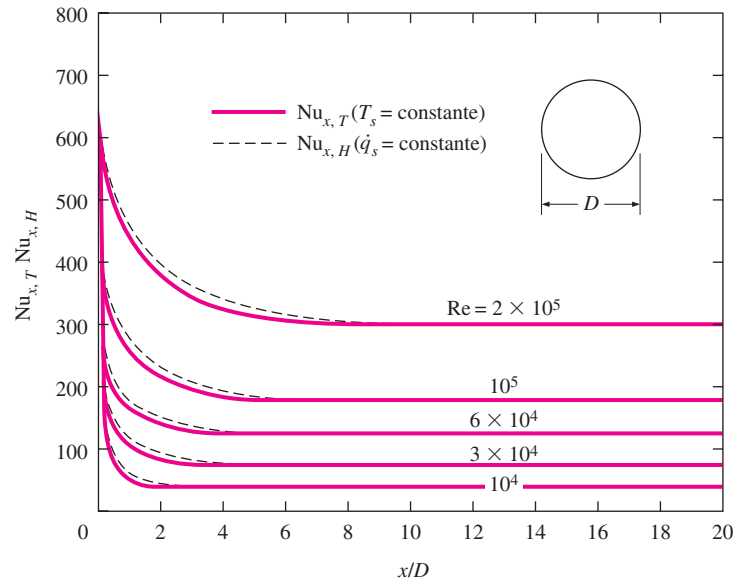


FIGURA 8-9

Variación del número local de Nusselt a lo largo de un tubo, en flujo turbulento, tanto para temperatura superficial uniforme como para flujo uniforme de calor en la superficie [Deissler (1953)].

ros de Reynolds que se encuentran en el equipo de transferencia de calor. Con base en esta figura, se hacen estas observaciones importantes:

- Los números de Nusselt y, por consiguiente, los coeficientes de transferencia de calor por convección son mucho más altos en la región de entrada.
- El número de Nusselt alcanza un valor constante a una distancia de menos de 10 diámetros y, por tanto, se puede suponer que el flujo está completamente desarrollado para  $x > 10D$ .
- Los números de Nusselt para las condiciones de temperatura superficial uniforme y flujo de calor uniforme son idénticos en las regiones completamente desarrolladas y casi idénticos en las regiones de entrada. Por lo tanto, el número de Nusselt no es sensible al tipo de condición de frontera térmica y se pueden usar las correlaciones del flujo turbulento para cualquiera de los dos tipos de esa condición.

En la literatura, se encuentran correlaciones precisas para los coeficientes de fricción y de transferencia de calor, para las regiones de entrada. Sin embargo, la longitud de los tubos que se usan en la práctica, en la convección forzada, suele ser varias veces la longitud de cualquiera de las dos regiones de entrada y, por consiguiente, a menudo se supone que el flujo por los tubos está completamente desarrollado en toda la longitud del tubo. Este enfoque simplista proporciona resultados *razonables* para la transferencia de calor en los tubos largos, y resultados *conservadores*, en caso de los tubos cortos.

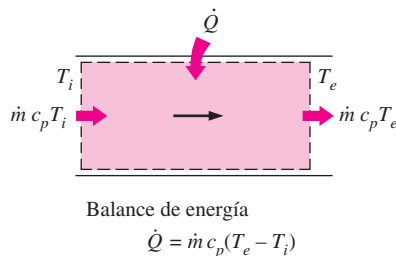


FIGURA 8-10

La transferencia de calor hacia un fluido que fluye en un tubo es igual al aumento en la energía de ese fluido.

## 8-4 ■ ANÁLISIS TÉRMICO GENERAL

En ausencia de cualesquiera interacciones de trabajo (como el calentamiento mediante resistencia eléctrica), la ecuación de conservación de la energía para el flujo estacionario de un fluido en un tubo se puede expresar como (figura 8-10)

$$\dot{Q} = \dot{m} c_p (T_e - T_i) \quad (\text{W}) \quad (8-15)$$

donde  $T_i$  y  $T_e$  son las temperaturas medias del fluido en la entrada y la salida del tubo, respectivamente, y  $\dot{Q}$  es la razón de la transferencia de calor hacia el fluido o desde éste. Note que la temperatura de un fluido que fluye en un tubo



permanece constante en ausencia de cualquier interacción de energía a través de la pared.

Las condiciones térmicas en la superficie por lo común se pueden aproximar con razonable precisión como *temperatura superficial constante* ( $T_s = \text{constante}$ ) o *flujo de calor constante en la superficie* ( $\dot{q}_s = \text{constante}$ ). Por ejemplo, se presenta la condición de temperatura superficial constante cuando ocurre un proceso de cambio de fase, como ebullición o condensación, en la superficie exterior de un tubo. Se tiene la condición de flujo de calor constante en la superficie cuando el tubo se somete a calentamiento por radiación o resistencia eléctrica de manera uniforme desde todas las direcciones.

El flujo de calor en la superficie se expresa como

$$\dot{q}_s = h_x(T_s - T_m) \quad (\text{W/m}^2) \quad (8-16)$$

donde  $h_x$  es el coeficiente de transferencia de calor *local* y  $T_s$  y  $T_m$  son las temperaturas en la superficie y media del fluido en ese lugar. Note que la temperatura media del fluido  $T_m$  de un fluido que fluye en un tubo debe cambiar durante el calentamiento o el enfriamiento. Por lo tanto, cuando  $h_x = h = \text{constante}$ , la temperatura superficial  $T_s$  debe cambiar cuando  $\dot{q}_s = \text{constante}$ , y el flujo de calor en la superficie  $\dot{q}_s$  debe cambiar cuando  $T_s = \text{constante}$ . Por tanto, se puede tener  $T_s = \text{constante}$  o  $\dot{q}_s = \text{constante}$  en la superficie de un tubo, pero no ambas. Enseguida, se considerará la transferencia de calor por convección para estos dos casos comunes.

## Flujo constante de calor en la superficie ( $\dot{q}_s = \text{constante}$ )

En el caso de  $\dot{q}_s = \text{constante}$ , la velocidad de la transferencia de calor también se puede expresar como

$$\dot{Q} = \dot{q}_s A_s = \dot{m} c_p (T_e - T_i) \quad (\text{W}) \quad (8-17)$$

Entonces, la temperatura media del fluido en la salida del tubo queda

$$T_e = T_i + \frac{\dot{q}_s A_s}{\dot{m} c_p} \quad (8-18)$$

Note que la temperatura media del fluido se incrementa *linealmente* en la dirección del flujo en el caso de flujo de calor constante en la superficie, puesto que el área superficial aumenta en forma lineal en esa dirección ( $A_s$  es igual al perímetro, el cual es constante, multiplicado por la longitud del tubo).

En el caso de flujo de calor constante en la superficie,  $\dot{q}_s$ , la temperatura superficial se puede determinar a partir de

$$\dot{q}_s = h(T_s - T_m) \longrightarrow T_s = T_m + \frac{\dot{q}_s}{h} \quad (8-19)$$

En la región completamente desarrollada, la temperatura superficial  $T_s$  también se incrementará linealmente en la dirección del flujo, dado que  $h$  es constante y, por tanto,  $T_s - T_m = \text{constante}$  (figura 8-11). Por supuesto, esto se cumple cuando las propiedades del fluido permanecen constantes en el flujo.

Se puede determinar la pendiente de la temperatura media del fluido  $T_m$  en un diagrama  $T$ - $x$  mediante la aplicación de un balance de energía de flujo estacionario a una rebanada del tubo de espesor  $dx$ , mostrada en la figura 8-12. Esto da

$$\dot{m} c_p dT_m = \dot{q}_s (p dx) \longrightarrow \frac{dT_m}{dx} = \frac{\dot{q}_s p}{\dot{m} c_p} = \text{constante} \quad (8-20)$$

donde  $p$  es el perímetro del tubo.

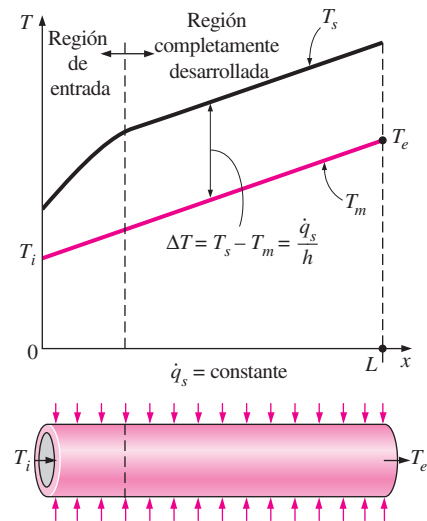


FIGURA 8-11

Variación de las temperaturas *superficial* del tubo y *media del fluido* a lo largo del tubo para el caso de flujo constante de calor en la superficie.

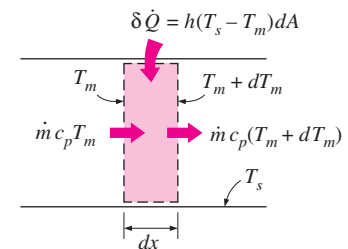


FIGURA 8-12

Interacciones energéticas para un volumen diferencial de control en un tubo.

Puesto que  $\dot{q}_s$  y  $h$  son constantes, la derivación de la ecuación 8-19 con respecto a  $x$  da

$$\frac{dT_m}{dx} = \frac{dT_s}{dx} \quad (8-21)$$

Asimismo, el requisito de que el perfil de temperatura adimensional permanezca inalterado en la región completamente desarrollada da

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{T_s - T}{T_s - T_m} \right) = 0 \longrightarrow \frac{1}{T_s - T_m} \left( \frac{\partial T_s}{\partial x} - \frac{\partial T}{\partial x} \right) = 0 \longrightarrow \frac{\partial T}{\partial x} = \frac{dT_s}{dx} \quad (8-22)$$

puesto que  $T_s - T_m = \text{constante}$ . Al combinar las ecuaciones 8-20, 8-21 y 8-22, da

$$\frac{\partial T}{\partial x} = \frac{dT_s}{dx} = \frac{dT_m}{dx} = \frac{\dot{q}_s p}{\dot{m} c_p} = \text{constante} \quad (8-23)$$

Entonces, se concluye que *en el flujo completamente desarrollado en un tubo sujeto a flujo de calor constante en la superficie, el gradiente de temperatura es independiente de  $x$  y, por tanto, la forma del perfil de temperaturas no cambia a lo largo del tubo* (figura 8-13).

Para un tubo circular,  $p = 2\pi R$  y  $\dot{m} = \rho V_{prom} A_c = \rho V_{prom} (\pi R^2)$ , la ecuación 8-23 queda

$$\text{Tubo circular:} \quad \frac{\partial T}{\partial x} = \frac{dT_s}{dx} = \frac{dT_m}{dx} = \frac{2\dot{q}_s}{\rho V_{prom} c_p R} = \text{constante} \quad (8-24)$$

Donde  $V_{prom}$  es la velocidad media del fluido.

## Temperatura superficial constante ( $T_s = \text{constante}$ )

Con base en la ley de Newton del enfriamiento, la razón de la transferencia de calor desde o hacia un fluido, que fluye en un tubo se puede expresar como

$$\dot{Q} = hA_s \Delta T_{prom} = hA_s (T_s - T_m)_{prom} \quad (W) \quad (8-25)$$

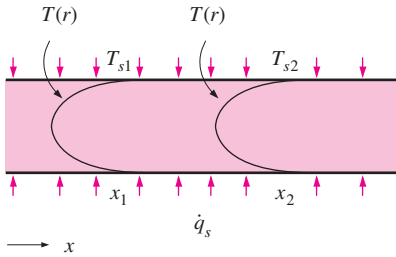
donde  $h$  es el coeficiente de transferencia de calor por convección promedio,  $A_s$  es el área superficial para la transferencia de calor (es igual a  $\pi DL$  para un tubo circular de longitud  $L$ ) y  $\Delta T_{prom}$  es alguna diferencia *promedio* apropiada de temperatura entre el fluido y la superficie. Más adelante se discuten dos maneras adecuadas para expresar  $\Delta T_{prom}$ .

En el caso de temperatura superficial constante ( $T_s = \text{constante}$ ),  $\Delta T_{prom}$  se puede expresar *aproximadamente* por la **diferencia media aritmética de temperatura**  $\Delta T_{ma}$  como

$$\begin{aligned} \Delta T_{prom} \approx \Delta T_{ma} &= \frac{\Delta T_i + \Delta T_e}{2} = \frac{(T_s - T_i) + (T_s - T_e)}{2} = T_s - \frac{T_i + T_e}{2} \\ &= T_s - T_b \end{aligned} \quad (8-26)$$

donde  $T_b = (T_i + T_e)/2$  es la *temperatura media de masa del fluido*, la cual es el *promedio aritmético* de las temperaturas medias del fluido en la admisión y la salida del tubo.

Note que la *diferencia media aritmética de temperatura*  $\Delta T_{ma}$  es simplemente el *promedio* de las *diferencias de temperatura* entre la superficie y el fluido en la admisión y la salida del tubo. Inherente a esta definición, se supone que la temperatura media del fluido varía linealmente a lo largo del tubo, lo cual difícilmente es el caso cuando  $T_s = \text{constante}$ . Esta simple aproximación



**FIGURA 8-13**

La forma del perfil de temperaturas permanece inalterada en la región completamente desarrollada de un tubo sujeto a flujo de calor constante en la superficie.

a menudo proporciona resultados aceptables, pero no siempre. Por lo tanto, se necesita una mejor manera de evaluar  $\Delta T_{prom}$ .

Considere el calentamiento de un fluido en un tubo de sección transversal constante cuya superficie interior se mantiene a una temperatura constante de  $T_s$ . Se sabe que la temperatura media del fluido  $T_m$  aumenta en la dirección del flujo como resultado de la transferencia de calor. El balance de energía sobre un volumen diferencial de control, mostrado en la figura 8-12, da

$$\dot{m}c_p dT_m = h(T_s - T_m)dA_s \quad (8-27)$$

Es decir, el aumento en la energía del fluido (representado por un aumento en su temperatura media por  $dT_m$ ) es igual al calor transferido por convección hacia este último desde la superficie del tubo. Dado que el área superficial diferencial es  $dA_s = p dx$ , donde  $p$  es el perímetro del tubo, y que  $dT_m = -d(T_s - T_m)$ , puesto que  $T_s$  es constante, la relación antes dada se puede reacomodar como

$$\frac{d(T_s - T_m)}{T_s - T_m} = -\frac{hp}{\dot{m}c_p} dx \quad (8-28)$$

Al integrar desde  $x = 0$  (admisión del tubo donde  $T_m = T_i$ ), hasta  $x = L$  (salida del tubo donde  $T_m = T_e$ ) da

$$\ln \frac{T_s - T_e}{T_s - T_i} = -\frac{hA_s}{\dot{m}c_p} \quad (8-29)$$

donde  $A_s = pL$  es el área superficial del tubo y  $h$  es el coeficiente de transferencia de calor por convección *promedio* constante. Al tomar la exponencial de ambos miembros y despejar  $T_e$  se obtiene la siguiente relación, la cual resulta muy útil para la determinación de la *temperatura media del fluido en la salida del tubo*:

$$T_e = T_s - (T_s - T_i) \exp(-hA_s/\dot{m}c_p) \quad (8-30)$$

También se puede usar esta relación para determinar la temperatura media del fluido  $T_m(x)$ , para cualquier valor de  $x$ , al reemplazar  $A_s = pL$  por  $px$ .

Note que la diferencia de temperatura entre el fluido y la superficie *decae exponencialmente* en la dirección del flujo y la velocidad del decaimiento depende de la magnitud del exponente  $hA_x/\dot{m}c_p$ , como se muestra en la figura 8-14. Este parámetro adimensional recibe el nombre de *número de unidades de transferencia*, denotado por NTU (*Number of Transfer Units*), y es una medida de la efectividad de los sistemas de transferencia de calor. Para  $NTU > 5$ , la temperatura de salida del fluido se vuelve casi igual a la temperatura superficial,  $T_e \approx T_s$  (figura 8-15). Dado que la temperatura del fluido puede aproximarse a la superficial pero no puede cruzarla, un NTU de alrededor de 5 indica que se alcanza el límite para la transferencia de calor y ésta no aumenta, sin importar cuánto se extienda la longitud del tubo. Por otra parte, un valor pequeño del NTU indica más oportunidades para la transferencia de calor y ésta continuará incrementándose conforme se aumenta la longitud del tubo. Un NTU grande y, por consiguiente, un área superficial grande para la transferencia de calor (lo cual significa un tubo grande) puede ser deseable desde un punto de vista relativo a la transferencia de calor, pero inaceptable desde un punto de vista económico. Por lo común, la selección del equipo de transferencia de calor refleja un compromiso entre el rendimiento en la transferencia de calor y el costo.

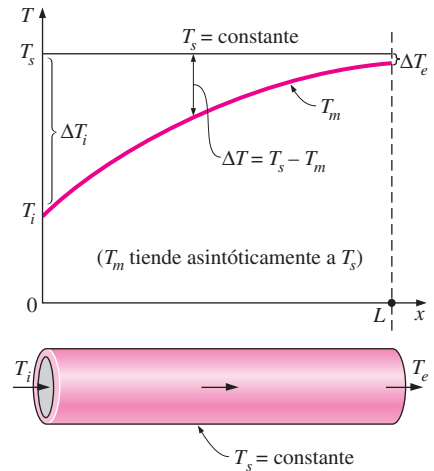
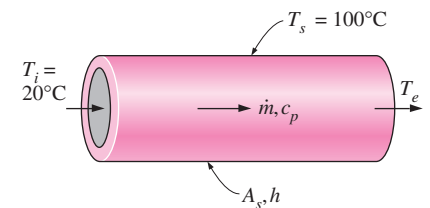


FIGURA 8-14

Variación de la temperatura *media del fluido* a lo largo del tubo para el caso de temperatura constante.



NTU = $hA_s/\dot{m}c_p$	$T_e, ^\circ\text{C}$
0.01	20.8
0.05	23.9
0.10	27.6
0.50	51.5
1.00	70.6
5.00	99.5
10.00	100.0

FIGURA 8-15

Un NTU mayor que 5 indica que el fluido que fluye en un tubo alcanzará la temperatura superficial a la salida, sin importar cuál sea la temperatura de admisión.

Despejando  $\dot{m}c_p$  en la ecuación 8-29 da

$$\dot{m}c_p = \frac{hA_s}{\ln [(T_s - T_e)/(T_s - T_i)]} \quad (8-31)$$

Al sustituir esto en la ecuación 8-15 se obtiene

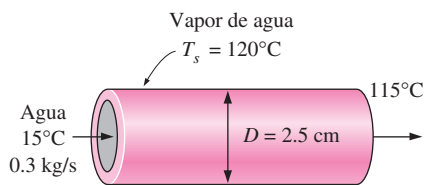
$$\dot{Q} = hA_s \Delta T_{\ln} \quad (8-32)$$

donde

$$\Delta T_{\ln} = \frac{T_i - T_e}{\ln [(T_s - T_e)/(T_s - T_i)]} = \frac{\Delta T_e - \Delta T_i}{\ln (\Delta T_e/\Delta T_i)} \quad (8-33)$$

es la **diferencia media logarítmica de temperatura**. Note que  $\Delta T_i = T_s - T_i$  y  $\Delta T_e = T_s - T_e$  son las diferencias de temperatura entre la superficie y el fluido en la admisión y la salida del tubo, respectivamente. Esta relación de  $\Delta T_{\ln}$  parece ser propensa a usarse de manera indebida, pero es prácticamente a prueba de fallas, ya que si se usa  $T_i$  en lugar de  $T_e$  y viceversa en el numerador y en el denominador, o en cualquiera de los dos, cuando mucho se afectará el signo, no la magnitud. Asimismo, se puede usar tanto para el calentamiento ( $T_s > T_i$  y  $T_e$ ) como para el enfriamiento ( $T_s < T_i$  y  $T_e$ ) de un fluido en un tubo.

La diferencia media logarítmica de temperatura,  $\Delta T_{\ln}$ , se obtiene al seguir el rastro del perfil real de temperaturas del fluido a lo largo del tubo y es una representación *exacta* de la *diferencia de temperatura promedio* entre el fluido y la superficie. En verdad refleja el decaimiento exponencial de la diferencia de temperatura local. Cuando  $\Delta T_e$  difiere de  $\Delta T_i$  en no más de 40%, el error al usar la diferencia media aritmética de temperatura es menor a 1%. Pero el error se incrementa hasta niveles indeseables cuando  $\Delta T_e$  difiere de  $\Delta T_i$  en cantidades mayores. Por lo tanto, siempre se debe usar la diferencia media logarítmica de temperatura cuando se determine la transferencia de calor por convección en un tubo cuya superficie se mantenga a una temperatura constante  $T_s$ .



**FIGURA 8-16**

Esquema para el ejemplo 8-1.

### EJEMPLO 8-1 Calentamiento de agua en un tubo por medio de vapor

Entra agua a 15°C y a razón de 0.3 kg/s en un tubo delgado de cobre, de 2.5 cm de diámetro interno, que forma parte de un intercambiador de calor y se calienta por medio de vapor que se condensa en el exterior a 120°C. Si el coeficiente de transferencia de calor promedio es de 800 W/m<sup>2</sup> · °C, determine la longitud requerida del tubo para calentar el agua hasta 115°C (figura 8-16).

**SOLUCIÓN** Se calienta agua por medio de vapor en un tubo circular. Se debe determinar la longitud requerida del tubo para calentar el agua hasta una temperatura específica.

**Suposiciones** **1** Existen condiciones de operación estacionarias. **2** Las propiedades del fluido son constantes. **3** El coeficiente de transferencia de calor por convección es constante. **4** La resistencia a la conducción del tubo de cobre es despreciable, de modo que la temperatura superficial interior del mismo es igual a la temperatura de condensación del vapor.

**Propiedades** El calor específico del agua a la temperatura media de la masa de  $(15 + 115)/2 = 65^\circ\text{C}$  es de 4 187 J/kg · °C. El calor de condensación del vapor a 120°C es de 2 203 kJ/kg (tabla A-9).

**Análisis** Al conocer las temperaturas de admisión y de salida del agua se determina que la razón de la transferencia de calor es

$$\dot{Q} = \dot{m}c_p(T_e - T_i) = (0.3 \text{ kg/s})(4.187 \text{ kJ/kg} \cdot ^\circ\text{C})(115^\circ\text{C} - 15^\circ\text{C}) = 125.6 \text{ kW}$$

La diferencia media logarítmica de temperatura es

$$\begin{aligned}\Delta T_e &= T_s - T_e = 120^\circ\text{C} - 115^\circ\text{C} = 5^\circ\text{C} \\ \Delta T_i &= T_s - T_i = 120^\circ\text{C} - 15^\circ\text{C} = 105^\circ\text{C} \\ \Delta T_{\ln} &= \frac{\Delta T_e - \Delta T_i}{\ln(\Delta T_e/\Delta T_i)} = \frac{5 - 105}{\ln(5/105)} = 32.85^\circ\text{C}\end{aligned}$$

El área superficial de transferencia de calor es

$$\dot{Q} = hA_s\Delta T_{\ln} \longrightarrow A_s = \frac{\dot{Q}}{h\Delta T_{\ln}} = \frac{125.6 \text{ kW}}{(0.8 \text{ kW/m}^2 \cdot ^\circ\text{C})(32.85^\circ\text{C})} = 4.78 \text{ m}^2$$

Entonces la longitud requerida del tubo queda

$$A_s = \pi DL \longrightarrow L = \frac{A_s}{\pi D} = \frac{4.78 \text{ m}^2}{\pi(0.025 \text{ m})} = \mathbf{61 \text{ m}}$$

**Discusión** La temperatura media de la masa de agua durante este proceso de calentamiento es de  $65^\circ\text{C}$  y, por consiguiente, la diferencia media *aritmética* de temperatura es  $\Delta T_{\text{ma}} = 120 - 65 = 55^\circ\text{C}$ . Si se usa  $\Delta T_{\text{ma}}$  en lugar de  $\Delta T_{\ln}$  daría  $L = 36 \text{ m}$ , lo cual es un tremendo error. Esto hace ver la importancia de usar la temperatura media logarítmica en los cálculos.

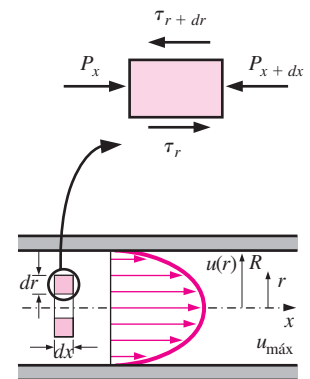
## 8-5 ■ FLUJO LAMINAR EN TUBOS

En la sección 8-2, se mencionó que el flujo en tubos es laminar para  $Re \lesssim 2\,300$  y que está completamente desarrollado si el tubo es suficientemente largo (en relación con la longitud de entrada), de modo que los efectos de la entrada sean despreciables. En esta sección, se considera el flujo laminar estacionario de un fluido incompresible con propiedades constantes, en la región completamente desarrollada de un tubo circular recto. Se obtiene la ecuación de la cantidad de movimiento al aplicar un balance de fuerzas a un elemento diferencial de volumen, así como el perfil de velocidades al resolver dicha ecuación. Como paso siguiente, se usa ésta con el fin de obtener una relación para el factor de fricción. Aspecto importante del análisis es que se trata de uno de los pocos casos en que se dispone de la solución analítica para el flujo viscoso.

En el flujo laminar completamente desarrollado, cada una de las partículas del fluido se mueve a una velocidad axial constante a lo largo de una línea de corriente y el perfil de velocidades,  $u(r)$ , permanece inalterado en la dirección del flujo. No se tiene movimiento en la dirección radial y, por tanto, la componente de la velocidad en la dirección perpendicular al flujo es cero en todas partes. No se tiene aceleración, puesto que el flujo es estacionario.

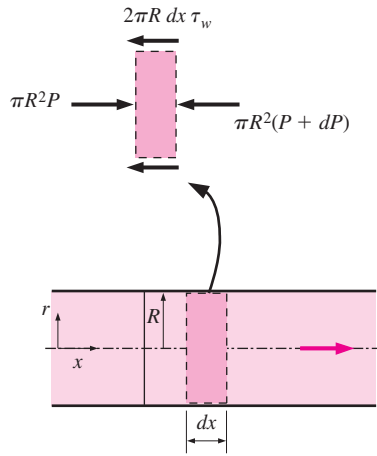
Considérese ahora un elemento diferencial de volumen con forma de anillo, de radio  $r$ , espesor  $dr$  y longitud  $dx$ , orientado en forma coaxial con el tubo, como se muestra en la figura 8-17. En el elemento de volumen sólo intervienen los efectos de la presión y los efectos viscosos, de donde las fuerzas de presión y cortantes deben equilibrarse entre sí. La fuerza de presión que actúa sobre una superficie plana sumergida es el producto de la presión en el centroide de la superficie y el área de ésta. Un balance de fuerzas sobre el elemento de volumen en la dirección del flujo da

$$(2\pi r dr P)_x - (2\pi r dr P)_{x+dx} + (2\pi r dx \tau)_r - (2\pi r dx \tau)_{r+dr} = 0 \quad \mathbf{(8-34)}$$



**FIGURA 8-17**

Diagrama de cuerpo libre de un elemento diferencial de fluido con forma de anillo, de radio  $r$ , espesor  $dr$  y longitud  $dx$ , orientado en forma coaxial con un tubo horizontal en flujo laminar completamente desarrollado.



Balace de fuerzas:

$$\pi R^2 P - \pi R^2 (P + dP) - 2\pi R dx \tau_w = 0$$

Simplificando:

$$\frac{dP}{dx} = -\frac{2\tau_w}{R}$$

**FIGURA 8-18**

Diagrama de cuerpo libre de un elemento de fluido con forma de disco, de radio  $R$  y longitud  $dx$ , en flujo laminar completamente desarrollado en un tubo horizontal.

lo cual indica que en el flujo completamente desarrollado en un tubo horizontal las fuerzas viscosas y de presión se equilibran entre sí. Al dividir entre  $2\pi r dx$  y reacomodar,

$$r \frac{P_{x+dx} - P_x}{dx} + \frac{(r\tau)_{x+dx} - (r\tau)_x}{dr} = 0 \quad (8-35)$$

Al tomar el límite cuando  $dr, dx \rightarrow 0$  da

$$r \frac{dP}{dx} + \frac{d(r\tau)}{dr} = 0 \quad (8-36)$$

Si se hace la sustitución  $\tau = -\mu(du/dr)$  y se toma  $\mu = \text{constante}$ , da la ecuación deseada

$$\frac{\mu}{r} \frac{d}{dr} \left( r \frac{du}{dr} \right) = \frac{dP}{dx} \quad (8-37)$$

La cantidad  $du/dr$  es negativa en el flujo en tubos y se incluye el signo negativo con el fin de obtener valores positivos para  $\tau$ . (Es decir,  $du/dr = -du/dy$ , ya que  $y = R - r$ .) La parte izquierda de la ecuación 8-37 es función de  $r$  y la parte derecha lo es de  $x$ . La igualdad debe cumplirse para cualquier valor de  $r$  y  $x$ , y una igualdad de la forma  $f(r) = g(x)$  sólo se puede satisfacer si tanto  $f(r)$  como  $g(x)$  son iguales a la misma constante. De lo anterior se concluye que  $dP/dx = \text{constante}$ . Se puede verificar esto al escribir un balance de fuerzas sobre un elemento de volumen de radio  $R$  y espesor  $dx$  (una rebanada del tubo), lo cual da (figura 8-18)

$$\frac{dP}{dx} = -\frac{2\tau_w}{R}$$

Aquí,  $\tau_w$  es constante, puesto que la viscosidad y el perfil de velocidad son constantes en la región completamente desarrollada. Por lo tanto,  $dP/dx = \text{constante}$ .

La ecuación 8-37 se puede resolver al reordenar e integrarla dos veces, para dar

$$u(r) = \frac{1}{4\mu} \left( \frac{dP}{dx} \right) r^2 + C_1 \ln r + C_2 \quad (8-38)$$

Se obtiene el perfil de velocidades  $u(r)$  mediante la aplicación de las condiciones de frontera  $\partial u / \partial r = 0$  en  $r = 0$  (debido a la simetría con respecto a la línea central) y  $u = 0$  en  $r = R$  (la condición de no resbalamiento en la superficie del tubo). Se obtiene

$$u(r) = -\frac{R^2}{4\mu} \left( \frac{dP}{dx} \right) \left( 1 - \frac{r^2}{R^2} \right) \quad (8-39)$$

Por lo tanto, el perfil de velocidades en el flujo laminar completamente desarrollado en un tubo es *parabólico* con un máximo en la línea central y mínimo en la superficie del tubo. Asimismo, la velocidad axial  $u$  es positiva para cualquier  $r$  y, como consecuencia, el gradiente de presión axial  $dP/dx$  debe ser negativo (es decir, la presión debe decrecer en la dirección del flujo debido a los efectos viscosos).

La velocidad promedio se determina con base en su definición al sustituir la ecuación 8-39 en la 8-2 y realizar la integración. Esto da

$$V_{\text{prom}} = \frac{2}{R^2} \int_0^R u(r) r dr = \frac{-2}{R^2} \int_0^R \frac{R^2}{4\mu} \left( \frac{dP}{dx} \right) \left( 1 - \frac{r^2}{R^2} \right) r dr = -\frac{R^2}{8\mu} \left( \frac{dP}{dx} \right) \quad (8-40)$$

Si se combinan las dos últimas ecuaciones, se redefine el perfil de velocidad como

$$u(r) = 2V_{\text{prom}} \left( 1 - \frac{r^2}{R^2} \right) \quad (8-41)$$

La anterior es una forma conveniente para el perfil de velocidades, ya que se puede determinar  $V_{\text{prom}}$  con facilidad a partir de la información del gasto de flujo.

Se tiene la velocidad máxima en la línea central y se determina a partir de la ecuación 8-41 mediante la sustitución  $r = 0$ ,

$$u_{\text{máx}} = 2V_{\text{prom}} \quad (8-42)$$

Por lo tanto, *la velocidad promedio en el flujo laminar completamente desarrollado en un tubo es un medio de la velocidad máxima.*

## Caída de presión

Una cantidad de interés en el análisis del flujo en tubos es la *caída de presión*  $\Delta P$  ya que está directamente relacionada con las necesidades de potencia del ventilador o la bomba con el fin de mantener el flujo. Dado que  $dP/dx = \text{constante}$  y se integra desde  $x = x_1$ , donde la presión es  $P_1$ , hasta  $x = x_1 + L$ , donde la presión es  $P_2$ . Se obtiene

$$\frac{dP}{dx} = \frac{P_2 - P_1}{L} \quad (8-43)$$

Si se sustituye la ecuación 8-43 en la expresión de la  $V_{\text{prom}}$  de la 8-40, la caída de presión se puede expresar como

$$\text{Flujo laminar:} \quad \Delta P = P_1 - P_2 = \frac{8\mu LV_{\text{prom}}}{R^2} = \frac{32\mu LV_{\text{prom}}}{D^2} \quad (8-44)$$

Tradicionalmente, se usa el símbolo  $\Delta$  para indicar la diferencia entre los valores final e inicial, como  $\Delta y = y_2 - y_1$ . Pero en el flujo de fluidos,  $\Delta P$  se emplea para designar la caída de presión y, por consiguiente, es  $P_1 - P_2$ . Una caída de presión debida a efectos viscosos representa una pérdida irreversible de presión y se le conoce como la **pérdida de presión**  $\Delta P_L$  para hacer resaltar que es una *pérdida* (precisamente como la pérdida de carga  $h_L$ , la cual es proporcional a ella).

Nótese, por lo expresado en la ecuación 8-44, que la caída de presión es proporcional a la viscosidad  $\mu$  del fluido, y  $\Delta P$  sería cero si no hubiera fricción. Por lo tanto, en este caso, la caída de presión de  $P_1$  a  $P_2$  se debe por entero a los efectos viscosos, y la ecuación 8-44 representa la pérdida de presión  $\Delta P_L$  cuando un fluido de viscosidad  $\mu$  fluye por un tubo de diámetro constante  $D$  y longitud  $L$ , a la velocidad promedio  $V_{\text{prom}}$ .

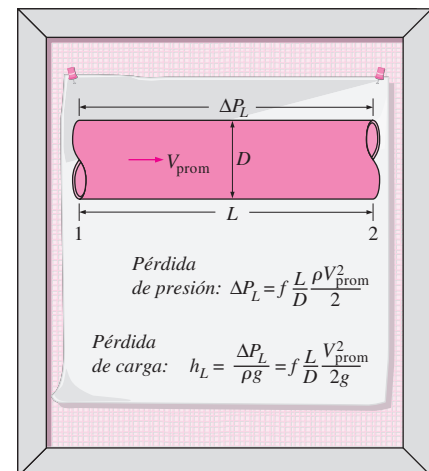
En la práctica, resulta conveniente expresar la pérdida de presión para todos los tipos de flujos internos completamente desarrollados (flujos laminares o turbulentos, tubos circulares o no circulares, superficies lisas o ásperas, tubos horizontales o inclinados) como (figura 8-19)

$$\text{Pérdida de presión:} \quad \Delta P_L = f \frac{L}{D} \frac{\rho V_{\text{prom}}^2}{2} \quad (8-45)$$

en donde  $\rho V_{\text{prom}}^2/2$  es la *presión dinámica* y  $f$  es el **factor de fricción de Darcy**,

$$f = \frac{8\tau_w}{\rho V_{\text{prom}}^2}$$

Éste también se conoce como **factor de fricción de Darcy-Weisbach**, en honor del francés Henry Darcy (1803-1858) y el alemán Julius Weisbach



**FIGURA 8-19**

La relación para la pérdida de presión (y para la pérdida de carga) es una de las más generales en la mecánica de fluidos y es válida para los flujos laminares o turbulentos, para tubos circulares o no circulares y para tubos con superficies lisas o ásperas.

(1806-1871), los dos ingenieros que realizaron la mayor contribución para su desarrollo. No debe confundirse con el *coeficiente de fricción*  $C_f$  [también llamado *factor de fricción de Fanning*, en honor del ingeniero estadounidense John Fanning (1837-1911)], el cual se define como  $C_f = 2\tau_w/(\rho V_{\text{prom}}^2) = f/4$ .

Si se igualan las ecuaciones 8-44 y 8-45 entre sí y se despeja  $f$ , se obtiene el factor de fricción para el flujo laminar completamente desarrollado en un tubo circular:

$$\text{Tubo circular, laminar:} \quad f = \frac{64\mu}{\rho D V_{\text{prom}}} = \frac{64}{\text{Re}} \quad (8-46)$$

Esta ecuación muestra que *en el flujo laminar, el factor de fricción es función sólo del número de Reynolds y es independiente de la aspereza de la superficie del tubo.*

En el análisis de sistemas de tuberías, las pérdidas por fricción comúnmente se expresan en términos de la *altura equivalente de la columna de fluido*, llamada **pérdida de carga**  $h_L$ . Si se observa, con base en la estática de fluidos, que  $\Delta P = \rho gh$  y, como consecuencia, una diferencia de presión de  $\Delta P$  corresponde a una altura de fluido de  $h = \Delta P/\rho g$ , la *pérdida de carga en el tubo* se obtiene al dividir  $\Delta P_L$  entre  $\rho g$  para dar

$$h_L = \frac{\Delta P_L}{\rho g} = f \frac{L}{D} \frac{V_{\text{prom}}^2}{2g}$$

La pérdida de carga  $h_L$  representa *la altura adicional a la que necesita elevarse el fluido por medio de una bomba para vencer las pérdidas por fricción en el tubo.* La pérdida de carga es causada por la viscosidad y está relacionada de manera directa con el esfuerzo cortante en la pared. La ecuación 8-45 es válida tanto para los flujos laminares como para los turbulentos, tanto en tubos circulares como en no circulares; en cambio, la ecuación 8-46 sólo es válida para el flujo laminar completamente desarrollado en tubos circulares.

Una vez que se conoce la pérdida de presión (o pérdida de carga), se determina la potencia requerida de bombeo *para vencer la pérdida de presión*, a partir de

$$\dot{W}_{\text{bomba},L} = \dot{V} \Delta P_L = \dot{V} \rho g h_L = \dot{m} g h_L \quad (8-47)$$

donde  $\dot{V}$  es el gasto volumétrico y  $\dot{m}$  es el gasto de masa.

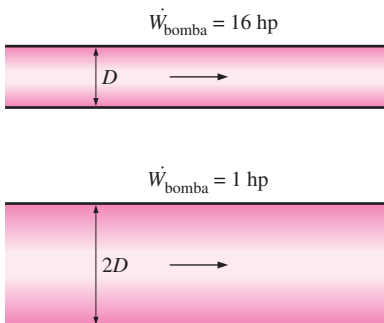
La velocidad promedio para el flujo laminar en un tubo horizontal es, de acuerdo con la ecuación 8-44,

$$\text{Tubo horizontal:} \quad V_{\text{prom}} = \frac{(P_1 - P_2)R^2}{8\mu L} = \frac{(P_1 - P_2)D^2}{32\mu L} = \frac{\Delta P D^2}{32\mu L}$$

Entonces, el gasto volumétrico para el flujo laminar a través de un tubo horizontal de diámetro  $D$  y longitud  $L$  queda

$$\dot{V} = V_{\text{prom}} A_c = \frac{(P_1 - P_2)R^2}{8\mu L} \pi R^2 = \frac{(P_1 - P_2)\pi D^4}{128\mu L} = \frac{\Delta P \pi D^4}{128\mu L} \quad (8-48)$$

Esta ecuación se conoce como **ley de Poiseuille** y a este flujo se le llama *flujo de Hagen-Poiseuille*, en honor de los trabajos de G. Hagen (1797-1884) y J. Poiseuille (1799-1869) sobre el tema. A partir de la ecuación 8-48, nótese que *para un gasto especificado, la caída de presión y, por ende, la potencia requerida de bombeo, son proporcionales a la longitud del tubo y a la viscosidad del fluido, pero inversamente proporcionales a la cuarta potencia del radio (o del diámetro) del tubo.* Por lo tanto, la necesidad de potencia de bombeo para un sistema de tuberías se puede reducir en un factor de 16 al duplicar el diámetro del tubo (figura 8-20). Por supuesto, deben sopesarse los beneficios de la reducción en los costos de la energía en contraste con el costo mayor de construcción, debido al uso de tubo con diámetro más grande.



**FIGURA 8-20**

La necesidad de potencia de bombeo para un sistema de tubos con flujo laminar se puede reducir en un factor de 16 al duplicar el diámetro del tubo.



La caída de presión  $\Delta P$  es igual a la pérdida de presión  $\Delta P_L$ , si se trata de un tubo horizontal, pero éste no es el caso para los tubos inclinados o para aquéllos con área variable de la sección transversal, debido a los cambios en la elevación y la velocidad.

## Perfil de temperatura y el número de Nusselt

En el análisis anterior, se ha obtenido el perfil de velocidad para el flujo completamente desarrollado en un tubo circular a partir de un balance de fuerzas aplicado sobre un elemento de volumen, y se ha determinado el factor de fricción y la caída de presión. Ahora se obtendrá la ecuación de la energía mediante la aplicación del balance energético sobre un elemento diferencial de volumen y se resolverá con el fin de obtener el perfil de temperatura para los casos de temperatura superficial constante y flujo de calor constante en la superficie.

Reconsidérese el flujo laminar estacionario de un fluido en un tubo circular de radio  $R$ . Las propiedades del fluido  $\rho$ ,  $k$  y  $c_p$  son constantes y el trabajo realizado por las fuerzas viscosas es despreciable. El fluido fluye a lo largo del eje  $x$  con velocidad  $u$ . El flujo está completamente desarrollado, de modo que  $u$  es independiente de  $x$ , de donde  $u = u(r)$ . Al advertir que la energía se transfiere por la masa en la dirección  $x$  y por conducción en la dirección  $r$  (se supone que la conducción en la dirección  $x$  es despreciable), el balance de energía de flujo estacionario para un elemento con forma de una capa cilíndrica, de espesor  $dr$  y longitud  $dx$ , se puede expresar como (figura 8-21)

$$\dot{m}c_p T_x - \dot{m}c_p T_{x+dx} + \dot{Q}_r - \dot{Q}_{r+dr} = 0 \quad (8-49)$$

donde  $\dot{m} = \rho u A_c = \rho u (2\pi r dr)$ . Al sustituir y dividir entre  $2\pi r dr dx$  da, después de reordenar,

$$\rho c_p u \frac{T_{x+dx} - T_x}{dx} = -\frac{1}{2\pi r dx} \frac{\dot{Q}_{r+dr} - \dot{Q}_r}{dr} \quad (8-50)$$

o bien,

$$u \frac{\partial T}{\partial x} = -\frac{1}{2\rho c_p \pi r dx} \frac{\partial \dot{Q}}{\partial r} \quad (8-51)$$

Pero

$$\frac{\partial \dot{Q}}{\partial r} = \frac{\partial}{\partial r} \left( -k 2\pi r dx \frac{\partial T}{\partial r} \right) = -2\pi k dx \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial T}{\partial r} \right) \quad (8-52)$$

Al sustituir y utilizar  $\alpha = k/\rho c_p$  da

$$u \frac{\partial T}{\partial x} = \frac{\alpha}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial T}{\partial r} \right) \quad (8-53)$$

lo cual expresa que *la razón de transferencia neta de energía al volumen de control por el flujo de masa es igual a la razón neta de conducción de calor en la dirección radial.*

## Flujo constante de calor en la superficie

Para el flujo completamente desarrollado en un tubo circular sujeto a flujo de calor constante en la superficie, se tiene, con base en la ecuación 8-24,

$$\frac{\partial T}{\partial x} = \frac{dT_s}{dx} = \frac{dT_m}{dx} = \frac{2\dot{q}_s}{\rho V_{\text{prom}} c_p R} = \text{constante} \quad (8-54)$$

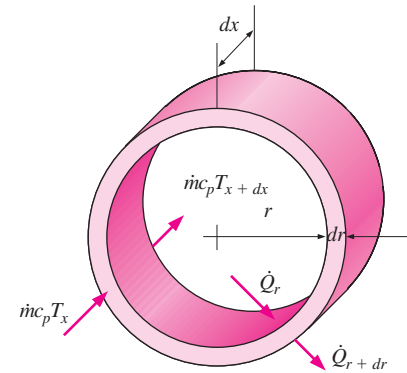


FIGURA 8-21

Elemento diferencial de volumen usado en la deducción de la relación del balance de energía.

Si en la deducción de la ecuación 8-53 se considerara la conducción de calor en la dirección  $x$ , daría un término adicional  $\alpha \partial^2 T / \partial x^2$ , el cual sería igual a cero, ya que  $\partial T / \partial x = \text{constante}$  y, por tanto,  $T = T(r)$ . Por lo tanto, en este caso, se satisface con exactitud la suposición de que no se tiene conducción de calor axial.

Al sustituir la ecuación 8-54 y la relación para el perfil de velocidad (ecuación 8-41) en la 8-43, da

$$\frac{4\dot{q}_s}{kR} \left(1 - \frac{r^2}{R^2}\right) = \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left( r \frac{dT}{dr} \right) \quad (8-55)$$

la cual es una ecuación diferencial ordinaria de segundo orden. Su solución general se obtiene mediante la separación de las variables e integrar dos veces, para dar

$$T = \frac{\dot{q}_s}{kR} \left( r^2 - \frac{r^4}{4R^2} \right) + C_1 r + C_2 \quad (8-56)$$

La solución deseada para el problema se obtiene al aplicar las condiciones de frontera  $\partial T / \partial x = 0$  en  $r = 0$  (debido a la simetría), y  $T = T_s$  en  $r = R$ . Se obtiene

$$T = T_s - \frac{\dot{q}_s R}{k} \left( \frac{3}{4} - \frac{r^2}{R^2} + \frac{r^4}{4R^4} \right) \quad (8-57)$$

La temperatura media de la masa  $T_m$  se determina al sustituir las relaciones de los perfiles de velocidades y de temperaturas (ecuaciones 8-41 y 8-57) en la ecuación 8-4 y llevar a cabo la integración. Esto da

$$T_m = T_s - \frac{11}{24} \frac{\dot{q}_s R}{k} \quad (8-58)$$

Al combinar esta relación con  $\dot{q}_s = h(T_s - T_m)$  da

$$h = \frac{24}{11} \frac{k}{R} = \frac{48}{11} \frac{k}{D} = 4.36 \frac{k}{D} \quad (8-59)$$

o bien,

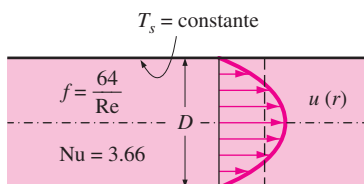
$$\text{Tubo circular, laminar } (\dot{q}_x = \text{constante}): \quad \text{Nu} = \frac{hD}{k} = 4.36 \quad (8-60)$$

Por lo tanto, para el flujo laminar completamente desarrollado en un tubo circular sujeto a flujo de calor constante en la superficie, el número de Nusselt es constante. No se tiene dependencia con respecto a los números de Reynolds o de Prandtl.

## Temperatura superficial constante

Se puede realizar un análisis semejante para el flujo laminar completamente desarrollado en un tubo circular para el caso de temperatura superficial constante  $T_s$ . En este caso el procedimiento de solución es más complejo, ya que se requieren iteraciones, pero la relación del número de Nusselt que se obtiene es igualmente simple (figura 8-22):

$$\text{Tubo circular, laminar } (T_s = \text{constante}): \quad \text{Nu} = \frac{hD}{k} = 3.66 \quad (8-61)$$



Flujo laminar completamente desarrollado

**FIGURA 8-22**

En el flujo laminar en un tubo con temperatura superficial constante tanto el factor de fricción como el coeficiente de transferencia de calor permanecen constantes en la región completamente desarrollada.