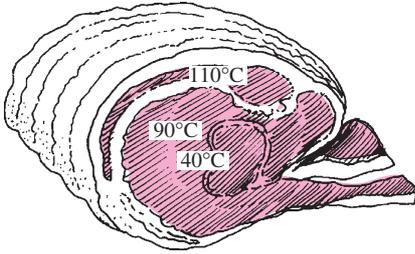


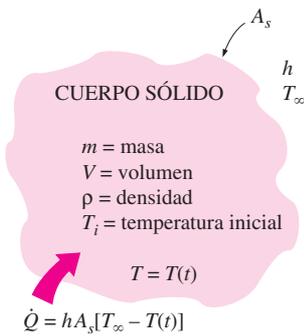
a) Bola de cobre



b) Rosbif

FIGURA 4-1

Una bola pequeña de cobre se puede visualizar como un sistema concentrado, pero no es posible con un rosbif.

**FIGURA 4-2**

Configuración geométrica y parámetros que intervienen en el análisis de los sistemas concentrados.

4-1 ■ ANÁLISIS DE SISTEMAS CONCENTRADOS

En el análisis de la transferencia de calor, se observa que algunos cuerpos se comportan como un “bulto” cuya temperatura interior permanece uniforme en todo momento durante un proceso de transferencia de calor. La temperatura de esos cuerpos se puede tomar sólo como una función del tiempo, $T(t)$. El análisis de la transferencia de calor que utiliza esta idealización se conoce como **análisis de sistemas concentrados**, el cual proporciona una gran simplificación en ciertas clases de problemas de transferencia de calor sin mucho sacrificio de la exactitud.

Considere una pequeña bola de cobre que sale de un horno (figura 4-1). Las mediciones indican que la temperatura de la bola de cobre cambia con el tiempo, pero no varía mucho con la posición en algún momento dado. Por tanto, la temperatura de la bola permanece uniforme todo el tiempo y se puede hablar de esa temperatura sin referir a una ubicación específica.

Ahora se va al otro extremo y se considerará un rosbif en un horno. Si el lector ha hecho algún asado, debe haber advertido que la distribución de temperatura dentro del rosbif no se aproxima a ser uniforme. Puede verificar esto con facilidad sacando el rosbif antes de que esté cocido por completo y cortándolo a la mitad. Verá que las partes exteriores de él están bien cocidas, en tanto que la zona central apenas está caliente. Como consecuencia, en este caso no es aplicable el análisis de sistemas concentrados. Antes de presentar un criterio acerca de la aplicabilidad de este análisis, se desarrolla la formulación asociada con él.

Considere un cuerpo de forma arbitraria y masa m , volumen V , área superficial A_s , densidad ρ y calor específico C_p , inicialmente a una temperatura T_i (figura 4-2). En el instante $t = 0$, el cuerpo está colocado en un medio a la temperatura T_∞ y se lleva a efecto transferencia de calor entre ese cuerpo y su medio ambiente, con un coeficiente de transferencia de calor h . En beneficio de la discusión, se supondrá que $T_\infty > T_i$, pero el análisis es igualmente válido para el caso opuesto. Se supondrá que el análisis de sistemas concentrados es aplicable, de modo que la temperatura permanece uniforme dentro del cuerpo en todo momento y sólo cambia con el tiempo, $T = T(t)$.

Durante un intervalo diferencial de tiempo, dt , la temperatura del cuerpo se eleva en una cantidad diferencial dT . Un balance de energía del sólido para el intervalo de tiempo dt se puede expresar como

$$\left(\begin{array}{c} \text{Transferencia de calor hacia el cuerpo} \\ \text{durante } dt \end{array} \right) = \left(\begin{array}{c} \text{El incremento en la} \\ \text{energía del cuerpo} \\ \text{durante } dt \end{array} \right)$$

o bien,

$$h A_s (T_\infty - T) dt = m c_p dT \quad (4-1)$$

Dado que $m = \rho V$ y $dT = d(T - T_\infty)$, puesto que $T_\infty = \text{constante}$, la ecuación 4-1 se puede reacomodar como

$$\frac{d(T - T_\infty)}{T - T_\infty} = - \frac{h A_s}{\rho V c_p} dt \quad (4-2)$$

Al integrar desde $t = 0$, en el cual $T = T_i$, hasta cualquier instante t , en el cual $T = T(t)$, da

$$\ln \frac{T(t) - T_\infty}{T_i - T_\infty} = - \frac{h A_s}{\rho V c_p} t \quad (4-3)$$

Al tomar el exponencial de ambos miembros y reacomodar, se obtiene

$$\frac{T(t) - T_\infty}{T_i - T_\infty} = e^{-bt} \quad (4-4)$$

donde

$$b = \frac{hA_s}{\rho V c_p} \quad (1/s) \quad (4-5)$$

es una cantidad positiva cuya dimensión es (tiempo)⁻¹. El recíproco de b tiene unidad de tiempo (por lo común s) y se llama **constante de tiempo**. En la figura 4-3 se tiene la gráfica de la ecuación 4-4 para diferentes valores de b . Se pueden hacer dos observaciones a partir de esta figura y de la relación antes dada:

1. La ecuación 4-4 permite determinar la temperatura $T(t)$ de un cuerpo en el instante t o, de modo alternativo, el tiempo t requerido para alcanzar el valor específico $T(t)$.
2. La temperatura de un cuerpo se aproxima a la del medio ambiente, T_∞ , en forma exponencial. Al principio, la temperatura del cuerpo cambia con rapidez pero, posteriormente, lo hace más bien con lentitud. Un valor grande de b indica que el cuerpo tenderá a alcanzar la temperatura del medio ambiente en un tiempo corto. Entre mayor sea el valor del exponente b , mayor será la velocidad de decaimiento de la temperatura. Note que b es proporcional al área superficial, pero inversamente proporcional a la masa y al calor específico del cuerpo. Esto no es sorprendente, ya que tarda más tiempo en calentarse o enfriarse una masa grande, en especial cuando tiene un calor específico grande.

Una vez que, con base en la ecuación 4-4, se cuenta con la temperatura $T(t)$ en el instante t , se puede determinar la *razón* de la transferencia de calor por convección entre el cuerpo y su medio ambiente en ese tiempo a partir de la ley de Newton del enfriamiento como

$$\dot{Q}(t) = hA_s[T(t) - T_\infty] \quad (W) \quad (4-6)$$

La *cantidad total* de transferencia de calor entre el cuerpo y el medio circundante durante el intervalo desde tiempo de $t = 0$ hasta t es simplemente el cambio en el contenido de energía de ese cuerpo:

$$Q = mc_p[T(t) - T_i] \quad (kJ) \quad (4-7)$$

La cantidad de transferencia de calor llega a su *límite superior* cuando el cuerpo alcanza la temperatura T_∞ del medio circundante. Por lo tanto, la transferencia de calor *máxima* entre el cuerpo y sus alrededores es (figura 4-4)

$$Q_{\text{máx}} = mc_p(T_\infty - T_i) \quad (kJ) \quad (4-8)$$

También se pudo obtener esta ecuación al sustituir la relación de $T(t)$, tomada de la 4-4, en la relación para \dot{Q} dada en la 4-6 e integrar desde $t = 0$ hasta $t \rightarrow \infty$.

Criterios para el análisis de sistemas concentrados

Es evidente que el análisis de sistemas concentrados es muy conveniente en el estudio de la transferencia de calor y naturalmente que interesa saber cuándo resulta apropiado para usarlo. El primer paso en el establecimiento de un cri-

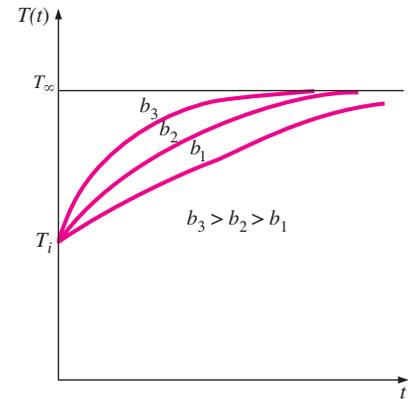


FIGURA 4-3

La temperatura de un sistema concentrado se acerca a la del medio ambiente a medida que transcurre el tiempo.

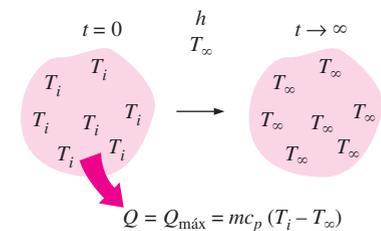


FIGURA 4-4

La transferencia de calor hacia un cuerpo o desde éste alcanza su valor máximo cuando alcanza la temperatura del medio ambiente.

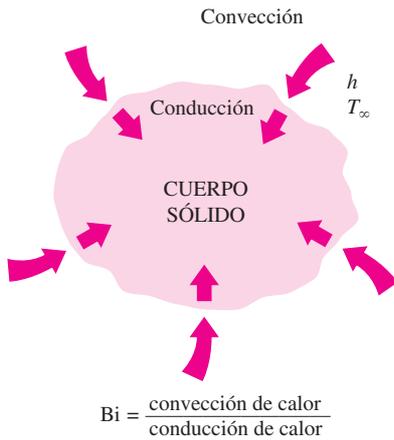


FIGURA 4-5

El número de Biot se puede concebir como la razón entre la convección en la superficie del cuerpo con respecto a la conducción dentro de éste.

terio para la aplicabilidad del análisis de sistemas concentrados es definir la **longitud característica** como

$$L_c = \frac{V}{A_s}$$

y un **número de Biot**, Bi , como

$$Bi = \frac{hL_c}{k} \quad (4-9)$$

También se puede expresar como (figura 4-5)

$$Bi = \frac{h}{k/L_c} \frac{\Delta T}{\Delta T} = \frac{\text{Convección en la superficie del cuerpo}}{\text{Conducción dentro del cuerpo}}$$

o bien,

$$Bi = \frac{L_c/k}{1/h} = \frac{\text{Resistencia a la conducción dentro del cuerpo}}{\text{Resistencia a la convección en la superficie del cuerpo}}$$

Cuando un cuerpo sólido se calienta por el fluido más caliente que lo rodea (como una papa que se está horneando), en principio el calor es llevado por *convección* hacia el cuerpo y, a continuación, *conducido* hacia el interior del cuerpo. El número de Biot es la razón de la resistencia interna de un cuerpo a la *conducción de calor* con respecto a su resistencia externa a la *convección de calor*. Por lo tanto, un número pequeño de Biot representa poca resistencia a la conducción del calor y, por tanto, gradientes pequeños de temperatura dentro del cuerpo.

En el análisis de sistemas concentrados se supone una distribución *uniforme* de temperatura en todo el cuerpo, el cual es el caso sólo cuando la resistencia térmica de éste a la conducción de calor (la *resistencia a la conducción*) sea cero. Por consiguiente, el análisis de sistemas concentrados es *exacto* cuando $Bi = 0$ y *aproximado* cuando $Bi > 0$. Por supuesto, entre más pequeño sea el número Bi , más exacto es el análisis de los sistemas concentrados. Entonces la pregunta a la que se debe responder es: ¿cuánta exactitud se dispone a sacrificar para que el análisis de sistemas concentrados resulte conveniente?

Antes de responder la pregunta, se debe mencionar que, en la mayor parte de los casos, un 15% de incertidumbre en el coeficiente de transferencia de calor por convección h se considera “normal” y “esperado”. Suponer que h es *constante y uniforme* también es una aproximación de validez cuestionable, en especial para configuraciones geométricas irregulares. Por lo tanto, en ausencia de suficientes datos experimentales para la configuración geométrica considerada, no se puede afirmar que los resultados sean mejores que $\pm 15\%$, incluso cuando $Bi = 0$. Si éste es el caso, la introducción de otra fuente de incertidumbre en el problema difícilmente tendrá algún efecto sobre la incertidumbre total, siempre que sea de poca importancia. En general se acepta que el análisis de sistemas concentrados es *aplicable* si

$$Bi \leq 0.1$$

Cuando se satisface este criterio, las temperaturas dentro del cuerpo con relación a la de los alrededores (es decir, $T - T_\infty$) permanecen dentro de un margen de 5% entre sí, incluso para configuraciones geométricas bien redondeadas como la de una bola esférica. Como consecuencia, cuando $Bi < 0.1$, la variación de la temperatura con la ubicación dentro del cuerpo es ligera y, de manera razonable, se puede considerar como si fuera uniforme.

El primer paso en la aplicación del análisis de sistemas concentrados es el cálculo del *número de Biot* y la valoración de la aplicabilidad de este procedimiento. Es posible que se desee utilizar este tipo de análisis, incluso cuando no se satisface el criterio $Bi < 0.1$, si una gran exactitud no es la preocupación principal.

Note que el número de Biot es la razón entre la *convección* en la superficie con respecto a la *conducción* dentro del cuerpo, y debe ser tan pequeño como sea posible para que el análisis de sistemas concentrados sea aplicable. Por lo tanto, los *cuerpos pequeños* con *conductividad térmica alta* son buenos candidatos para este tipo de análisis, en especial cuando se encuentran en un medio que sea un mal conductor del calor (como el aire u otro gas) que esté inmóvil. Por tanto, la pequeña bola de cobre caliente colocada en aire estático, que se discutió con anterioridad, es la que con mayor probabilidad satisfaca el criterio para el análisis de sistemas concentrados (figura 4-6).

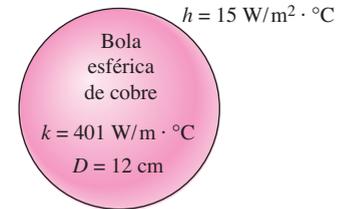
Algunas observaciones sobre la transferencia de calor en sistemas concentrados

Para comprender el mecanismo de la transferencia de calor durante el calentamiento o el enfriamiento de un sólido por el fluido que lo circunda y el criterio para el análisis de sistemas concentrados, considere esta analogía (figura 4-7). Gente que se encuentra en tierra firme debe ir *en bote* hacia una isla en la que toda la costa es puerto y, desde el puerto, hasta su destino en la isla *por autobús*. La aglomeración de personas en el puerto depende del tránsito de botes hacia la isla y del sistema de transporte terrestre en esta última. Si se tiene un sistema excelente de transporte terrestre con un gran número de autobuses, no se tendrá aglomeración de personas en el puerto, en especial cuando el tránsito de botes sea ligero. Pero cuando se cumple lo contrario, se tendrá una aglomeración enorme en el puerto, creando una gran diferencia entre las poblaciones en el puerto y en la isla. La posibilidad de aglomeración es mucho menor en una isla pequeña con una gran cantidad de autobuses rápidos.

En la transferencia de calor, un sistema malo de transporte terrestre corresponde, en esta analogía, a una pobre conducción de calor en un cuerpo, y la aglomeración de gente en el muelle corresponde a la acumulación de energía térmica y la elevación subsiguiente de la temperatura cerca de la superficie de ese cuerpo con respecto a sus partes interiores. Es obvio que el análisis de sistemas concentrados no es aplicable cuando se tiene acumulación en la superficie. Por supuesto, en esta analogía se ha descartado la radiación y, por consiguiente, el tráfico aéreo hacia la isla. A semejanza de los pasajeros en el muelle, el calor cambia de *vehículos* en la superficie: de *convección* a *conducción*. Al hacer la observación de que una superficie tiene espesor cero y, como consecuencia, no puede almacenar energía, el calor que llega por convección a la superficie de un cuerpo debe continuar su viaje, mediante conducción, hacia dentro de ese cuerpo.

Considere la transferencia de calor de un cuerpo caliente hacia sus alrededores más fríos. El calor es transferido del cuerpo hacia el fluido circundante como resultado de una diferencia de temperatura. Pero esta energía provendrá de la región cercana a la superficie y, por consiguiente, la temperatura del cuerpo cercana a dicha superficie caerá. Esto crea un *gradiente de temperatura* entre las regiones interior y exterior del cuerpo e inicia el flujo de calor por conducción del interior del mismo hacia la superficie exterior.

Cuando el coeficiente de transferencia de calor por convección h y, en consecuencia, la transferencia de calor por convección desde el cuerpo son altos, la temperatura del cuerpo cerca de la superficie cae con rapidez (figura 4-8). Esto creará una diferencia de temperatura grande entre las regiones inte-



$$L_c = \frac{V}{A_s} = \frac{\frac{1}{6}\pi D^3}{\pi D^2} = \frac{1}{6}D = 0.02 \text{ m}$$

$$Bi = \frac{hL_c}{k} = \frac{15 \times 0.02}{401} = 0.00075 < 0.1$$

FIGURA 4-6

Los cuerpos pequeños con altas conductividades térmicas y bajos coeficientes de convección son los que tienen más probabilidad de satisfacer el criterio para el análisis de los sistemas concentrados.

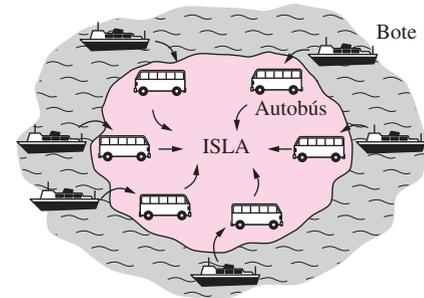


FIGURA 4-7

Analogía entre la transferencia de calor hacia un sólido y el tránsito de pasajeros hacia una isla.

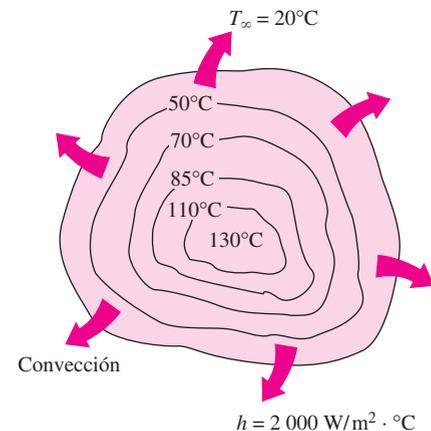


FIGURA 4-8

Cuando el coeficiente de convección h es alto y k es bajo, se tienen grandes diferencias de temperatura entre las regiones interior y exterior de un sólido grande.

rior y exterior a menos que el cuerpo pueda transferir calor desde la región interior a la exterior más rápido. De este modo, la magnitud de la diferencia máxima en la temperatura dentro del cuerpo depende intensamente de la capacidad de éste para conducir calor hacia su superficie en relación con la aptitud del medio circundante para alejar por convección el calor de esa superficie. El número de Biot es una medida de las magnitudes relativas de estos dos efectos competidores.

Recuerde que la conducción de calor en una dirección específica n , por unidad de área superficial, se expresa como $\dot{q} = -k \partial T / \partial n$, donde $\partial T / \partial n$ es el gradiente de temperatura y k es la conductividad térmica del sólido. Por tanto, la distribución de temperatura en el cuerpo será *uniforme* sólo cuando su *conductividad térmica* sea infinita, y no se sabe que exista ese material. Por lo tanto, dentro del cuerpo deben existir gradientes de temperatura y, en consecuencia, diferencias de temperatura, sin importar cuán pequeñas sean, para que tenga lugar la conducción de calor. Por supuesto, el gradiente de temperatura y la conductividad térmica son inversamente proporcionales para un flujo de calor dado. Por lo tanto, entre mayor sea la conductividad térmica, menor será el gradiente de temperatura.

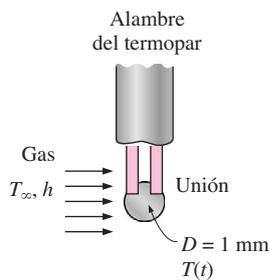


FIGURA 4-9
Esquema para el ejemplo 4-1.

EJEMPLO 4-1 Medición de la temperatura por termopares

Se va a medir la temperatura de un flujo de gas por medio de un termopar cuya unión se puede considerar como una esfera de 1 mm de diámetro, como se muestra en la figura 4-9. Las propiedades de la unión son $k = 35 \text{ W/m} \cdot ^\circ\text{C}$, $\rho = 8\,500 \text{ kg/m}^3$ y $c_p = 320 \text{ J/kg} \cdot ^\circ\text{C}$, y el coeficiente de transferencia de calor por convección entre la unión y el gas es $h = 210 \text{ W/m}^2 \cdot ^\circ\text{C}$. Determine cuánto tiempo transcurrirá para que la lectura del termopar sea 99% de la diferencia inicial de temperatura.

SOLUCIÓN Se va a medir la temperatura de un flujo de gas por medio de un termopar. Se debe determinar el tiempo que transcurre para registrar 99% de la ΔT inicial.

Suposiciones 1 La unión tiene forma esférica con un diámetro $D = 0.001 \text{ m}$. 2 Las propiedades térmicas de la unión y el coeficiente de transferencia de calor son constantes. 3 Los efectos de la radiación son despreciables.

Propiedades En el enunciado del problema se dan las propiedades de la unión.

Análisis La longitud característica de la unión es

$$L_c = \frac{V}{A_s} = \frac{\frac{1}{6}\pi D^3}{\pi D^2} = \frac{1}{6}D = \frac{1}{6}(0.001 \text{ m}) = 1.67 \times 10^{-4} \text{ m}$$

Entonces el número de Biot queda

$$\text{Bi} = \frac{hL_c}{k} = \frac{(210 \text{ W/m}^2 \cdot ^\circ\text{C})(1.67 \times 10^{-4} \text{ m})}{35 \text{ W/m} \cdot ^\circ\text{C}} = 0.001 < 0.1$$

Por lo tanto, se puede aplicar el análisis de sistemas concentrados y el error que se comete en esta aproximación es despreciable.

Con el fin de tener la lectura de 99% de la diferencia inicial de temperatura $T_i - T_\infty$ entre la unión y el gas, se debe tener

$$\frac{T(t) - T_\infty}{T_i - T_\infty} = 0.01$$

Por ejemplo, cuando $T_i = 0^\circ\text{C}$ y $T_\infty = 100^\circ\text{C}$, se considera que un termopar da la lectura de 99% de esta diferencia aplicada de temperatura cuando indica $T(t) = 99^\circ\text{C}$.

El valor del exponente b es

$$b = \frac{hA_s}{\rho c_p V} = \frac{h}{\rho c_p L_c} = \frac{210 \text{ W/m}^2 \cdot ^\circ\text{C}}{(8500 \text{ kg/m}^3)(320 \text{ J/kg} \cdot ^\circ\text{C})(1.67 \times 10^{-4} \text{ m})} = 0.462 \text{ s}^{-1}$$

Ahora se sustituyen estos valores en la ecuación 4-4 y se obtiene

$$\frac{T(t) - T_\infty}{T_i - T_\infty} = e^{-bt} \longrightarrow 0.01 = e^{-(0.462 \text{ s}^{-1})t}$$

lo cual da

$$t = 10 \text{ s}$$

Por lo tanto, se debe esperar por lo menos 10 s para que la temperatura de la unión del termopar esté a menos de 1% de la diferencia inicial de temperatura entre la unión y el gas.

Discusión Note que la conducción a través de los alambres y el intercambio por radiación con las superficies circundantes afectarán el resultado y deben considerarse en un análisis más refinado.

EJEMPLO 4-2 Predicción del momento de la muerte

A las 5 PM se encuentra una persona muerta en un cuarto cuya temperatura es de 20°C . Se mide la temperatura del cuerpo y resulta ser de 25°C , se estima que el coeficiente de transferencia de calor es $h = 8 \text{ W/m}^2 \cdot ^\circ\text{C}$. Considerando el cuerpo como un cilindro de 30 cm de diámetro y 1.70 m de largo, estime el momento de la muerte de esa persona (figura 4-10).

SOLUCIÓN Se encuentra un cuerpo que todavía está caliente. Se debe estimar el momento de la muerte.

Suposiciones **1** El cuerpo se puede considerar como un cilindro de 30 cm de diámetro y 1.70 m de largo. **2** Las propiedades térmicas del cuerpo y el coeficiente de transferencia de calor son constantes. **3** Los efectos de la radiación son despreciables. **4** La persona estaba sana(!) cuando murió, con una temperatura corporal de 37°C .

Propiedades La masa del cuerpo humano promedio es agua en un 72%, por consiguiente, se debe suponer que el cuerpo tiene las propiedades del agua a la temperatura promedio de $(37 + 25)/2 = 31^\circ\text{C}$; $k = 0.617 \text{ W/m} \cdot ^\circ\text{C}$, $\rho = 996 \text{ kg/m}^3$, y $C_p = 4178 \text{ J/kg} \cdot ^\circ\text{C}$ (tabla A-9).

Análisis La longitud característica del cuerpo es

$$L_c = \frac{V}{A_s} = \frac{\pi r_o^2 L}{2\pi r_o L + 2\pi r_o^2} = \frac{\pi(0.15 \text{ m})^2(1.7 \text{ m})}{2\pi(0.15 \text{ m})(1.7 \text{ m}) + 2\pi(0.15 \text{ m})^2} = 0.0689 \text{ m}$$

Entonces el número de Biot queda

$$\text{Bi} = \frac{hL_c}{k} = \frac{(8 \text{ W/m}^2 \cdot ^\circ\text{C})(0.0689 \text{ m})}{0.617 \text{ W/m} \cdot ^\circ\text{C}} = 0.89 > 0.1$$



FIGURA 4-10
Esquema para el ejemplo 4-2.

Por lo tanto, *no* es aplicable el análisis de sistemas concentrados. Sin embargo, todavía se puede usar con el fin de obtener una estimación “aproximada” del momento de la muerte. En este caso, el exponente b es

$$b = \frac{hA_s}{\rho c_p V} = \frac{h}{\rho c_p L_c} = \frac{8 \text{ W/m}^2 \cdot \text{°C}}{(996 \text{ kg/m}^3)(4178 \text{ J/kg} \cdot \text{°C})(0.0689 \text{ m})} \\ = 2.79 \times 10^{-5} \text{ s}^{-1}$$

Ahora se sustituyen estos valores en la ecuación 4-4,

$$\frac{T(t) - T_\infty}{T_i - T_\infty} = e^{-bt} \longrightarrow \frac{25 - 20}{37 - 20} = e^{-(2.79 \times 10^{-5} \text{ s}^{-1})t}$$

lo cual da

$$t = 43\,860 \text{ s} = \mathbf{12.2 \text{ h}}$$

Por lo tanto, como una estimación aproximada, la persona murió alrededor de 12 horas antes de que el cuerpo fuera encontrado, por tanto, el momento de la muerte es 5 AM.

Discusión En este ejemplo se demuestra cómo obtener valores aproximados con la aplicación de un análisis sencillo.

4-2 ■ CONDUCCIÓN DE CALOR EN RÉGIMEN TRANSITORIO EN PAREDES PLANAS GRANDES, CILINDROS LARGOS Y ESFERAS CON EFECTOS ESPACIALES

En la sección 4-1 se consideraron cuerpos en los que la variación de la temperatura dentro de los mismos es despreciable; es decir, cuerpos que permanecen casi *isotérmicos* durante un proceso. Los cuerpos relativamente *pequeños* de materiales *intensamente conductores* se aproximan a este comportamiento. Sin embargo, en general, la temperatura dentro de un cuerpo cambia de punto a punto así como de tiempo en tiempo. En esta sección se considera la variación de la temperatura con el *tiempo* y la *posición* en problemas unidimensionales, como los asociados con una pared plana grande, un cilindro largo y una esfera.

Considere una pared plana de espesor $2L$, un cilindro largo de radio r_o y una esfera de radio r_o , inicialmente a una *temperatura uniforme* T_i , como se muestra en la figura 4-11. En el instante $t = 0$, cada configuración geométrica se coloca en un medio grande que está a una temperatura constante T_∞ y se mantiene en ese medio para $t > 0$. La transferencia de calor se lleva a efecto entre estos cuerpos y sus medios ambientes por convección, con un coeficiente de transferencia de calor h *uniforme y constante*. Note que los tres casos poseen simetría geométrica y térmica: la pared plana es simétrica con respecto a su *plano central* ($x = 0$), el cilindro es simétrico con respecto a su *línea central* ($r = 0$) y la esfera es simétrica con respecto a su *punto central* ($r = 0$). Se desprecia la transferencia de calor por *radiación* entre estos cuerpos y sus superficies circundantes, o bien, se incorpora el efecto de la radiación en el coeficiente de transferencia de calor por convección, h .

En la figura 4-12 se ilustra la variación del perfil de temperatura con el *tiempo* en la pared plana. Cuando la pared se expone por primera vez al medio circundante que está a $T_\infty < T_i$ en $t = 0$, toda la pared está a la temperatura inicial T_i . Pero la temperatura de la pared en las superficies y cerca de éstas empieza

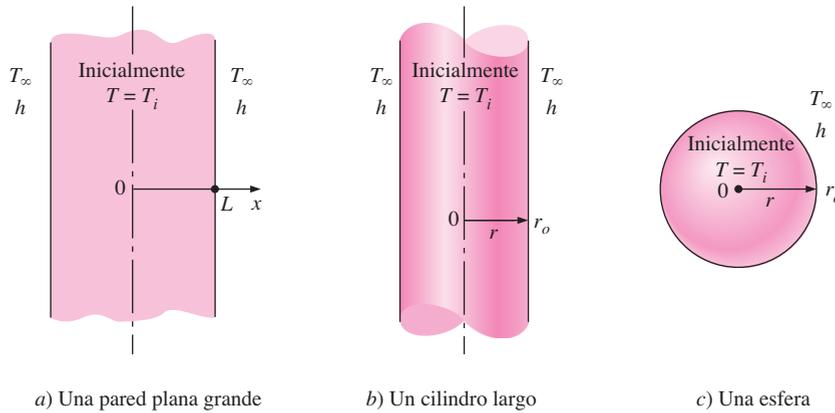


FIGURA 4-11

Esquema de las configuraciones geométricas simples en las que la transferencia de calor es unidimensional.

a caer como resultado de la transferencia de calor de ella hacia el medio circundante. Éste crea un *gradiente de temperatura* en la pared y se inicia la conducción de calor desde las partes internas de ella hacia sus superficies exteriores. Note que la temperatura en el centro de la pared permanece en T_i hasta $t = t_2$ y que el perfil de temperatura dentro de ella permanece simétrico en todo momento con respecto al plano central. El perfil de temperatura se hace más y más aplanado conforme pasa el tiempo como resultado de la transferencia de calor y llega el momento en que se vuelve uniforme en $T = T_\infty$. Es decir, la pared alcanza el *equilibrio térmico* con sus alrededores. En ese punto, la transferencia de calor se detiene, ya que deja de existir una diferencia de temperatura. Se pueden desarrollar discusiones semejantes para el cilindro largo o la esfera.

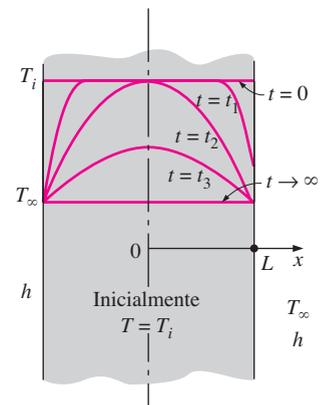


FIGURA 4-12

Perfiles de temperatura transitoria en una pared expuesta a convección desde sus superficies para $T_i > T_\infty$.

Problema de conducción transitoria unidimensional, en forma adimensional

La formulación de problemas de conducción de calor para la determinación de la distribución unidimensional transitoria de temperatura en una pared plana, un cilindro o una esfera conduce a una ecuación diferencial en derivadas parciales; comúnmente, la solución de este tipo de ecuación está relacionada con series infinitas y ecuaciones trascendentes, que no resulta conveniente usar. Pero la solución analítica proporciona una visión valiosa para hacerse una idea del problema físico y, por lo tanto, es importante recorrer los pasos que intervienen. Enseguida se muestra el procedimiento de resolución para el caso de una pared plana.

Considérese una pared plana de espesor $2L$ que, inicialmente, se encuentra a una temperatura uniforme T_i , como se muestra en la figura 4-11a. En el instante $t = 0$, la pared se sumerge en un fluido a la temperatura T_∞ y se expone a transferencia de calor por convección, desde ambos lados, con un coeficiente de convección de h . La altura y el ancho de la pared son grandes en relación con su espesor, de donde se puede considerar la conducción de calor en esa pared como unidimensional. Asimismo, existe simetría térmica respecto al plano medio que pasa por $x = 0$ y, como consecuencia, la distribución de temperaturas debe ser simétrica respecto a ese plano medio. Por lo tanto, el valor de la temperatura en cualquier punto $-x$ del intervalo $-L \leq x \leq 0$ en el instante t debe ser igual al valor en $+x$ del intervalo $0 \leq x \leq L$, en el mismo instante. Esto significa que se puede formular y resolver el problema de conducción de calor en la mitad positiva del dominio, $0 \leq x \leq L$, y después aplicar la solución a la otra mitad.

En las siguientes condiciones: propiedades termofísicas constantes, ninguna generación de calor, simetría térmica respecto al plano medio, temperatura inicial uniforme y coeficiente constante de convección, el problema de conducción transitoria unidimensional de calor en el semidominio $0 \leq x \leq L$ de la pared plana se puede expresar como (véase el capítulo 2)

$$\text{Ecuación diferencial: } \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = \frac{1}{\alpha} \frac{\partial T}{\partial t} \quad (4-10a)$$

$$\text{Condiciones de frontera: } \frac{\partial T(0, t)}{\partial x} = 0 \quad \text{y} \quad -k \frac{\partial T(L, t)}{\partial x} = h[T(L, t) - T_\infty] \quad (4-10b)$$

$$\text{Condición inicial: } T(x, 0) = T_i \quad (4-10c)$$

donde la propiedad $\alpha = k/\rho c_p$ es la difusividad térmica del material.

Ahora se intentará expresar en forma adimensional el problema mediante la definición de una variable espacial adimensional $X = x/L$ y la temperatura adimensional $\theta(x, t) = [T(x, t) - T_\infty]/[T_i - T_\infty]$. Éstas son selecciones convenientes, ya que tanto X como θ varían entre 0 y 1. Sin embargo, no se tiene una guía clara para la forma apropiada de la variable adimensional de tiempo y de la razón h/k , de modo que se dejará que el análisis las indique. Se observa que

$$\frac{\partial \theta}{\partial X} = \frac{\partial \theta}{\partial (x/L)} = \frac{L}{T_i - T_\infty} \frac{\partial T}{\partial x}, \quad \frac{\partial^2 \theta}{\partial X^2} = \frac{L^2}{T_i - T_\infty} \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \quad \text{y} \quad \frac{\partial \theta}{\partial t} = \frac{1}{T_i - T_\infty} \frac{\partial T}{\partial t}$$

Si se sustituye en las ecuaciones 4-10a y 4-10b y se reordena, dan

$$\frac{\partial^2 \theta}{\partial X^2} = \frac{L^2}{\alpha} \frac{\partial \theta}{\partial t} \quad \text{y} \quad \frac{\partial \theta(1, t)}{\partial X} = \frac{hL}{k} \theta(1, t) \quad (4-11)$$

Por lo tanto, la forma apropiada del tiempo adimensional es $\tau = \alpha t/L^2$, el cual se conoce como **número de Fourier**, Fo , y se reconoce $Bi = k/hL$ como el número de Biot definido en la sección 4-1. Entonces la formulación del problema de conducción transitoria unidimensional de calor en una pared plana se puede expresar en forma adimensional como

a) Problema original de conducción de calor:

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = \frac{1}{\alpha} \frac{\partial T}{\partial t}, \quad T(x, 0) = T_i$$

$$\frac{\partial T(0, t)}{\partial x} = 0, \quad -k \frac{\partial T(L, t)}{\partial x} = h[T(L, t) - T_\infty]$$

$$T = F(x, L, t, k, \alpha, h, T_i)$$

b) Problema en forma adimensional:

$$\frac{\partial^2 \theta}{\partial X^2} = \frac{\partial \theta}{\partial \tau}, \quad \theta(X, 0) = 1$$

$$\frac{\partial \theta(0, \tau)}{\partial X} = 0, \quad \frac{\partial \theta(1, \tau)}{\partial X} = -Bi\theta(1, \tau)$$

$$\theta = f(X, Bi, \tau)$$

$$\text{Ecuación diferencial adimensional: } \frac{\partial^2 \theta}{\partial X^2} = \frac{\partial \theta}{\partial \tau} \quad (4-12a)$$

$$\text{Condiciones de frontera adimensionales: } \frac{\partial \theta(0, \tau)}{\partial X} = 0 \quad \text{y} \quad \frac{\partial \theta(1, \tau)}{\partial X} = -Bi\theta(1, \tau) \quad (4-12b)$$

$$\text{Condición inicial adimensional: } \theta(X, 0) = 1 \quad (4-12c)$$

donde

$$\theta(X, \tau) = \frac{T(x, t) - T_\infty}{T_i - T_\infty} \quad \text{Temperatura adimensional}$$

$$X = \frac{x}{L} \quad \text{Distancia adimensional desde el centro}$$

$$Bi = \frac{hL}{k} \quad \text{Coeficiente adimensional de transferencia de calor (número de Biot)}$$

$$\tau = \frac{\alpha t}{L^2} = Fo \quad \text{Tiempo adimensional (número de Fourier)}$$

FIGURA 4-13

En los problemas de conducción transitoria unidimensional, la expresión en forma adimensional reduce el número de variables independientes de ocho a tres, lo que resulta muy conveniente en la presentación de resultados.

La ecuación de conducción de calor en coordenadas cilíndricas o esféricas se puede expresar en forma adimensional de manera semejante. Obsérvese que

la expresión en forma adimensional reduce el número de variables independientes y de parámetros, de ocho a tres: de $x, L, t, k, \alpha, h, T_i$ y T_∞ a X, Bi y Fo (figura 4-13). Es decir,

$$\theta = f(X, Bi, Fo) \quad (4-13)$$

Esto hace que sea muy práctico conducir estudios paramétricos y presentar los resultados en forma gráfica. Recuérdese que en el caso de análisis de sistemas concentrados, se tuvo $\theta = f(Bi, Fo)$, sin variable espacial.

Solución exacta del problema de conducción transitoria unidimensional*

La ecuación diferencial en derivadas parciales en forma adimensional, dada en las ecuaciones 4-12 junto con sus condiciones de la frontera e inicial, se puede resolver con la aplicación de varias técnicas analíticas y numéricas, incluidos los métodos de la transformada de Laplace u otra, el método de separación de variables, el de diferencias finitas y el de elementos finitos. En este texto, se aplicará el **método de separación de variables** desarrollado por J. Fourier, en 1820, y que se basa en el desarrollo de una función arbitraria (incluida una constante) en términos de series de Fourier. El método se aplica al suponer que la variable dependiente es un producto de varias funciones, en donde cada una de ellas es función de una sola variable independiente. Esto reduce la ecuación diferencial en derivadas parciales a un sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias, donde cada una de ellas es función de una sola variable independiente. Por ejemplo, en el caso de la conducción transitoria en una pared plana, la variable dependiente es la función de solución $\theta(X, \tau)$, la cual se expresa como $\theta(X, \tau) = F(X)G(\tau)$, y la aplicación del método da como resultado dos ecuaciones diferenciales ordinarias, una en X y otra en τ .

El método es aplicable si 1) la configuración geométrica es sencilla y finita (como un bloque rectangular, un cilindro o una esfera), de modo que las superficies de frontera se puedan describir por medio de funciones matemáticas sencillas, y 2) la ecuación diferencial y las condiciones de frontera e inicial, en su forma más simplificada, son lineales (sin términos que contengan productos de la variable dependiente o de sus derivadas) y sólo contienen un término no homogéneo (un término sin la variable dependiente ni sus derivadas). Si la formulación comprende varios términos no homogéneos, el problema se puede dividir en un número igual de problemas más sencillos, comprendiendo cada uno sólo un término no homogéneo y, después, combinando las soluciones por superposición.

Ahora se demostrará el uso del método de separación de variables, mediante su aplicación al problema de la conducción transitoria unidimensional de calor, dado en las ecuaciones 4-12. En primer lugar, se expresa la función de la temperatura adimensional $\theta(X, \tau)$ como un producto de una función sólo de X y una función sólo de τ , como

$$\theta(X, \tau) = F(X)G(\tau) \quad (4-14)$$

Si se sustituye la ecuación 4-14 en la 4-12a y se divide entre el producto FG , da

$$\frac{1}{F} \frac{d^2 F}{dX^2} = \frac{1}{G} \frac{dG}{d\tau} \quad (4-15)$$

Obsérvese que todos los términos que dependen de X se encuentran en la parte izquierda de la ecuación y todos los que dependen de τ están en la parte derecha. Es decir, los términos que son función de variables diferentes se *sepa-*

*Si se desea, se puede pasar por alto esta sección, sin pérdida de continuidad.

ran (de allí el nombre de *separación de variables*). La parte izquierda de esta ecuación es función sólo de X y la parte derecha sólo lo es de τ . Si se considera que tanto X como τ pueden hacerse variar de manera independiente, únicamente puede cumplirse la igualdad de la ecuación 4-15, para cualquier valor de X y de τ , si esta ecuación es igual a una constante. Además, debe ser una constante *negativa*, la cual se indicará como $-\lambda^2$, ya que una constante positiva hará que la función $G(\tau)$ crezca en forma ilimitada con el tiempo (para hacerse infinita), lo cual carece de significado físico; un valor de cero para esa constante significa que no hay dependencia respecto al tiempo, lo cual una vez más no es coherente con el problema físico planteado. Al hacer la ecuación 4-15 igual a $-\lambda^2$, da

$$\frac{d^2F}{dX^2} + \lambda^2F = 0 \quad \text{y} \quad \frac{dG}{d\tau} + \lambda^2G = 0 \quad (4-16)$$

cuyas soluciones generales son

$$F = C_1 \cos(\lambda X) + C_2 \sin(\lambda X) \quad \text{y} \quad G = C_3 e^{-\lambda^2 \tau} \quad (4-17)$$

y

$$\theta = FG = C_3 e^{-\lambda^2 \tau} [C_1 \cos(\lambda X) + C_2 \sin(\lambda X)] = e^{-\lambda^2 \tau} [A \cos(\lambda X) + B \sin(\lambda X)] \quad (4-18)$$

donde $A = C_1 C_3$ y $B = C_2 C_3$ son constantes arbitrarias. Nótese que sólo se necesita determinar A y B para obtener la solución del problema.

Al aplicar las condiciones de frontera de las ecuaciones 4-12b, da

$$\frac{\partial \theta(0, \tau)}{\partial X} = 0 \rightarrow -e^{-\lambda^2 \tau} (A \lambda \sin 0 + B \lambda \cos 0) = 0 \rightarrow B = 0 \rightarrow \theta = A e^{-\lambda^2 \tau} \cos(\lambda X)$$

$$\frac{\partial \theta(1, \tau)}{\partial X} = -\text{Bi} \theta(1, \tau) \rightarrow -A e^{-\lambda^2 \tau} \lambda \sin \lambda = -\text{Bi} A e^{-\lambda^2 \tau} \cos \lambda \rightarrow \lambda \tan \lambda = \text{Bi}$$

Pero la tangente es una función periódica con un periodo de π y la ecuación $\lambda \tan \lambda = \text{Bi}$ tiene la raíz λ_1 entre 0 y π , la raíz λ_2 entre π y 2π , la raíz λ_n entre $(n-1)\pi$ y $n\pi$, etcétera. Para reconocer que la ecuación trascendente $\lambda \tan \lambda = \text{Bi}$ tiene un número infinito de raíces, ésta es expresada como

$$\lambda_n \tan \lambda_n = \text{Bi} \quad (4-19)$$

Esta última ecuación se conoce como **ecuación característica**, y sus raíces se llaman **valores característicos** o **eigenvalores** (o **valores propios**). En este caso, la ecuación característica es implícita y, por lo tanto, se necesita determinar numéricamente los valores característicos. Entonces, se concluye que se tiene un número infinito de soluciones de la forma $A e^{-\lambda^2 \tau} \cos(\lambda X)$, y la solución de este problema lineal de conducción de calor es una combinación lineal de ellas,

$$\theta = \sum_{n=1}^{\infty} A_n e^{-\lambda_n^2 \tau} \cos(\lambda_n X) \quad (4-20)$$

Las constantes A_n se determinan a partir de la condición inicial, ecuación 4-12c,

$$\theta(X, 0) = 1 \rightarrow 1 = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos(\lambda_n X) \quad (4-21)$$

Éste es un desarrollo en serie de Fourier que expresa una constante en términos de una serie infinita de funciones coseno. A continuación, se multiplican ambos lados de la ecuación 4-21 por $\cos(\lambda_n X)$ y se integra desde $X = 0$ hasta $X = 1$. El lado derecho comprende un número infinito de integrales de la forma $\int_0^1 \cos(\lambda_m X) \cos(\lambda_n X) dx$. Se puede demostrar que todas estas integrales se anulan, excepto cuando $n = m$, y el coeficiente A_n queda

$$\int_0^1 \cos(\lambda_n X) dX = A_n \int_0^1 \cos^2(\lambda_n X) dx \rightarrow A_n = \frac{4 \operatorname{sen} \lambda_n}{2\lambda_n + \operatorname{sen}(2\lambda_n)} \quad (4-22)$$

Con esto se completa el análisis para la resolución del problema de conducción transitoria unidimensional de calor en una pared plana. Se pueden determinar las soluciones en otras configuraciones geométricas, como un cilindro largo y una esfera, aplicando el mismo procedimiento. En la tabla 4-1, se resumen los resultados para estas tres configuraciones geométricas. La solución para la pared plana también es aplicable cuando se trata de una pared plana de espesor L cuya superficie izquierda, en $x = 0$, esté aislada y la derecha, en $x = L$, esté sujeta a convección, ya que éste es precisamente el problema matemático que se resolvió.

Es común que las soluciones analíticas de los problemas de conducción transitoria comprendan series infinitas y, por lo tanto, la evaluación de un número infinito de términos con el fin de determinar la temperatura en un punto e instante especificados. Esto puede parecer en principio intimidante, pero no hay necesidad de preocuparse. Como se demuestra en la figura 4-14, los términos en la suma decrecen con rapidez conforme n y, por consiguiente, λ_n crecen, debido a la función exponencial de decaimiento $e^{-\lambda_n^2 \tau}$. En especial, este caso se presenta cuando el tiempo adimensional τ es grande. Por lo tanto, suele ser adecuada la evaluación de unos cuantos de los primeros términos de la serie infinita (en este caso, sólo el primer término) con el fin de determinar la temperatura adimensional θ .

Soluciones aproximadas, analíticas y gráficas

La solución analítica obtenida en los párrafos anteriores para la conducción transitoria unidimensional de calor en una pared plana comprende series infinitas y ecuaciones implícitas, las cuales son difíciles de evaluar. Por lo tanto, existe una motivación clara para simplificar las soluciones analíticas con el fin

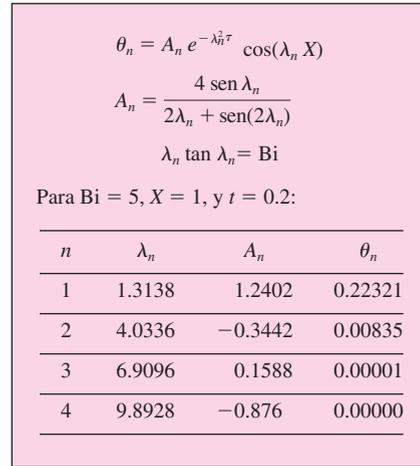


FIGURA 4-14

Los términos de la serie que presenta la solución de los problemas de conducción transitoria decrecen con rapidez conforme crece n y, por consiguiente, λ_n , debido a la función exponencial de decaimiento con el exponente $-\lambda_n^2 \tau$.

TABLA 4-1

Resumen de las soluciones para la conducción transitoria unidimensional en una pared plana de espesor $2L$, un cilindro de radio r_o y una esfera de radio r_o , sujetos a convección desde todas las superficies.*

Configuración geométrica	Solución	Las λ_n son las raíces de
Pared plana	$\theta = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4 \operatorname{sen} \lambda_n}{2\lambda_n + \operatorname{sen}(2\lambda_n)} e^{-\lambda_n^2 \tau} \cos(\lambda_n X / L)$	$\lambda_n \tan \lambda_n = \operatorname{Bi}$
Cilindro	$\theta = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2 J_1(\lambda_n)}{\lambda_n J_0'(\lambda_n) + J_1'(\lambda_n)} e^{-\lambda_n^2 \tau} J_0(\lambda_n r / r_o)$	$\lambda_n \frac{J_1(\lambda_n)}{J_0(\lambda_n)} = \operatorname{Bi}$
Esfera	$\theta = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4(\operatorname{sen} \lambda_n - \lambda_n \cos \lambda_n)}{2\lambda_n - \operatorname{sen}(2\lambda_n)} e^{-\lambda_n^2 \tau} \frac{\operatorname{sen}(\lambda_n X / L)}{\lambda_n X / L}$	$1 - \lambda_n \cot \lambda_n = \operatorname{Bi}$

*Aquí $\theta = (T - T_j)/(T_{\infty} - T_j)$ es la temperatura adimensional, $\operatorname{Bi} = hL/k$ o hr_o/k es el número de Biot, $\operatorname{Fo} = \tau = \alpha t / L^2$ o $\alpha \tau / r_o^2$ es el número de Fourier, y J_0 y J_1 son las funciones de Bessel de la primera especie cuyos valores se dan en la tabla 4-3.

de presentar las soluciones en forma *tabular* o *gráfica*, usando relaciones sencillas.

Las cantidades adimensionales definidas en los párrafos anteriores para una pared plana también se pueden usar para un *cilindro* o una *esfera*, al reemplazar la variable espacial x por r y el semiespesor L por el radio exterior r_o . Nótese que la longitud característica que se encuentra en la definición del número de Biot se toma como el *semiespesor* L , para la pared plana, y el *radio* r_o , para el cilindro y la esfera, en lugar de \sqrt{A} , que se usa en el análisis de los sistemas concentrados.

Con anterioridad se mencionó que los términos de las soluciones en serie de la tabla 4-1 convergen con rapidez al aumentar el tiempo; para $\tau > 0.2$, si se conserva el primer término de la serie y se desprecian todos los restantes, se tiene como resultado un error por debajo de 2%. Suele haber interés en la solución para tiempos con $\tau > 0.2$, por lo que resulta muy conveniente expresar la solución usando esta **aproximación de un término**, dada como

$$\text{Pared plana: } \theta_{\text{pared}} = \frac{T(x, t) - T_{\infty}}{T_i - T_{\infty}} = A_1 e^{-\lambda_1^2 \tau} \cos(\lambda_1 x/L), \quad \tau > 0.2 \quad (4-23)$$

$$\text{Cilindro: } \theta_{\text{cil}} = \frac{T(r, t) - T_{\infty}}{T_i - T_{\infty}} = A_1 e^{-\lambda_1^2 \tau} J_0(\lambda_1 r/r_o), \quad \tau > 0.2 \quad (4-24)$$

$$\text{Esfera: } \theta_{\text{esf}} = \frac{T(r, t) - T_{\infty}}{T_i - T_{\infty}} = A_1 e^{-\lambda_1^2 \tau} \frac{\text{sen}(\lambda_1 r/r_o)}{\lambda_1 r/r_o}, \quad \tau > 0.2 \quad (4-25)$$

donde las constantes A_1 y λ_1 son funciones sólo del número Bi, y en la tabla 4-1 se da una lista de sus valores con respecto al número Bi, para las tres configuraciones geométricas. La función J_0 es la función de Bessel de primera especie y de orden cero, cuyo valor se puede determinar a partir de la tabla 4-3. Dado que $\cos(0) = J_0(0) = 1$ y que el límite de $(\text{sen } x)/x$ también es uno, estas relaciones se simplifican para dar las siguientes en el centro de una pared plana, un cilindro o una esfera:

$$\text{Centro de pared plana } (x = 0): \quad \theta_{0, \text{pared}} = \frac{T_0 - T_{\infty}}{T_i - T_{\infty}} = A_1 e^{-\lambda_1^2 \tau} \quad (4-26)$$

$$\text{Centro del cilindro } (r = 0): \quad \theta_{0, \text{cil}} = \frac{T_0 - T_{\infty}}{T_i - T_{\infty}} = A_1 e^{-\lambda_1^2 \tau} \quad (4-27)$$

$$\text{Centro de la esfera } (r = 0): \quad \theta_{0, \text{esf}} = \frac{T_0 - T_{\infty}}{T_i - T_{\infty}} = A_1 e^{-\lambda_1^2 \tau} \quad (4-28)$$

Si se comparan los dos conjuntos de ecuaciones anteriores, se observa que en cualquier parte de una pared plana, un cilindro o una esfera, las temperaturas adimensionales están relacionadas con la temperatura en el centro por

$$\frac{\theta_{\text{pared}}}{\theta_{0, \text{pared}}} = \cos\left(\frac{\lambda_1 x}{L}\right), \quad \frac{\theta_{\text{cil}}}{\theta_{0, \text{cil}}} = J_0\left(\frac{\lambda_1 r}{r_o}\right), \quad \text{y} \quad \frac{\theta_{\text{esf}}}{\theta_{0, \text{esf}}} = \frac{\text{sen}(\lambda_1 r/r_o)}{\lambda_1 r/r_o} \quad (4-29)$$

lo cual muestra que la dependencia de la temperatura adimensional respecto al tiempo, dentro de una configuración geométrica dada, es la misma en toda la extensión. Es decir, si la temperatura adimensional en el centro θ_0 disminuye 20% durante un tiempo especificado, del mismo modo disminuye la temperatura adimensional θ_0 en cualquier otra parte del medio, durante el mismo tiempo.

Una vez que se conoce el número Bi, se pueden usar estas relaciones para determinar la temperatura en cualquier parte del medio. La determinación de las constantes A_1 y λ_1 suele requerir interpolación. Para quienes prefieren la lec-

TABLA 4-2

Coefficientes usados en la solución aproximada de un término de la conducción de calor unidimensional en régimen transitorio en paredes planas, cilindros y esferas ($Bi = hL/k$ para una pared plana de espesor $2L$ y $Bi = hr_o/k$ para un cilindro o una esfera de radio r_o)

Bi	Pared plana		Cilindro		Esfera	
	λ_1	A_1	λ_1	A_1	λ_1	A_1
0.01	0.0998	1.0017	0.1412	1.0025	0.1730	1.0030
0.02	0.1410	1.0033	0.1995	1.0050	0.2445	1.0060
0.04	0.1987	1.0066	0.2814	1.0099	0.3450	1.0120
0.06	0.2425	1.0098	0.3438	1.0148	0.4217	1.0179
0.08	0.2791	1.0130	0.3960	1.0197	0.4860	1.0239
0.1	0.3111	1.0161	0.4417	1.0246	0.5423	1.0298
0.2	0.4328	1.0311	0.6170	1.0483	0.7593	1.0592
0.3	0.5218	1.0450	0.7465	1.0712	0.9208	1.0880
0.4	0.5932	1.0580	0.8516	1.0931	1.0528	1.1164
0.5	0.6533	1.0701	0.9408	1.1143	1.1656	1.1441
0.6	0.7051	1.0814	1.0184	1.1345	1.2644	1.1713
0.7	0.7506	1.0918	1.0873	1.1539	1.3525	1.1978
0.8	0.7910	1.1016	1.1490	1.1724	1.4320	1.2236
0.9	0.8274	1.1107	1.2048	1.1902	1.5044	1.2488
1.0	0.8603	1.1191	1.2558	1.2071	1.5708	1.2732
2.0	1.0769	1.1785	1.5995	1.3384	2.0288	1.4793
3.0	1.1925	1.2102	1.7887	1.4191	2.2889	1.6227
4.0	1.2646	1.2287	1.9081	1.4698	2.4556	1.7202
5.0	1.3138	1.2403	1.9898	1.5029	2.5704	1.7870
6.0	1.3496	1.2479	2.0490	1.5253	2.6537	1.8338
7.0	1.3766	1.2532	2.0937	1.5411	2.7165	1.8673
8.0	1.3978	1.2570	2.1286	1.5526	2.7654	1.8920
9.0	1.4149	1.2598	2.1566	1.5611	2.8044	1.9106
10.0	1.4289	1.2620	2.1795	1.5677	2.8363	1.9249
20.0	1.4961	1.2699	2.2880	1.5919	2.9857	1.9781
30.0	1.5202	1.2717	2.3261	1.5973	3.0372	1.9898
40.0	1.5325	1.2723	2.3455	1.5993	3.0632	1.9942
50.0	1.5400	1.2727	2.3572	1.6002	3.0788	1.9962
100.0	1.5552	1.2731	2.3809	1.6015	3.1102	1.9990
∞	1.5708	1.2732	2.4048	1.6021	3.1416	2.0000

TABLA 4-3

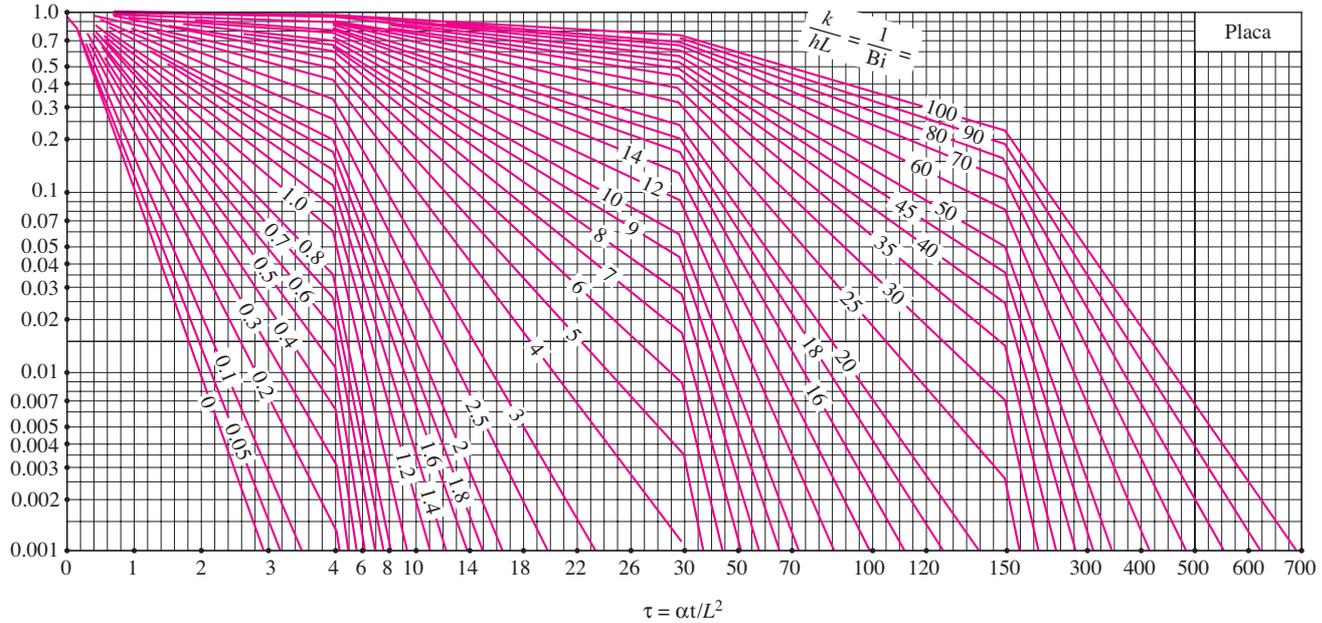
Funciones de Bessel de primera especie y de cero y primer orden

η	$J_0(\eta)$	$J_1(\eta)$
0.0	1.0000	0.0000
0.1	0.9975	0.0499
0.2	0.9900	0.0995
0.3	0.9776	0.1483
0.4	0.9604	0.1960
0.5	0.9385	0.2423
0.6	0.9120	0.2867
0.7	0.8812	0.3290
0.8	0.8463	0.3688
0.9	0.8075	0.4059
1.0	0.7652	0.4400
1.1	0.7196	0.4709
1.2	0.6711	0.4983
1.3	0.6201	0.5220
1.4	0.5669	0.5419
1.5	0.5118	0.5579
1.6	0.4554	0.5699
1.7	0.3980	0.5778
1.8	0.3400	0.5815
1.9	0.2818	0.5812
2.0	0.2239	0.5767
2.1	0.1666	0.5683
2.2	0.1104	0.5560
2.3	0.0555	0.5399
2.4	0.0025	0.5202
2.6	-0.0968	-0.4708
2.8	-0.1850	-0.4097
3.0	-0.2601	-0.3391
3.2	-0.3202	-0.2613

tura de gráficas en lugar de la interpolación, se han trazado representaciones de estas relaciones y de las soluciones de aproximación de un término, conocidas como *gráficas de temperaturas transitorias*. Nótese que, a veces, las gráficas son difíciles de leer y, por ende, están sujetas a errores de lectura. Por lo tanto, en su lugar debe preferirse las relaciones antes dadas.

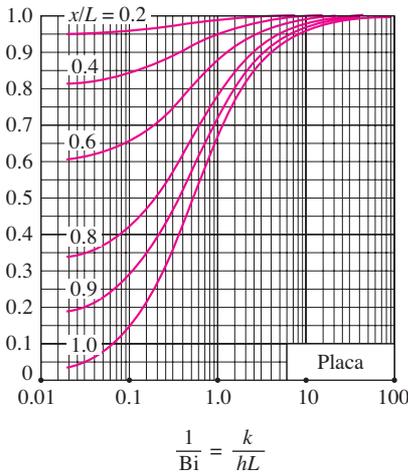
Las gráficas de temperaturas transitorias de las figuras 4-15, 4-16 y 4-17, para una pared plana grande, un cilindro largo y una esfera, fueron presentadas por M. P. Heisler, en 1947, y se conocen como **gráficas de Heisler**. En 1961, fueron complementadas por H. Gröber con gráficas de transferencia transitoria de calor. Éstas son *tres* gráficas asociadas con cada configuración geométrica: la primera es para determinar la temperatura T_0 en el *centro* de la configuración, en un instante dado t . La segunda permite determinar la tem-

$$\theta_o = \frac{T_o - T_\infty}{T_i - T_\infty}$$

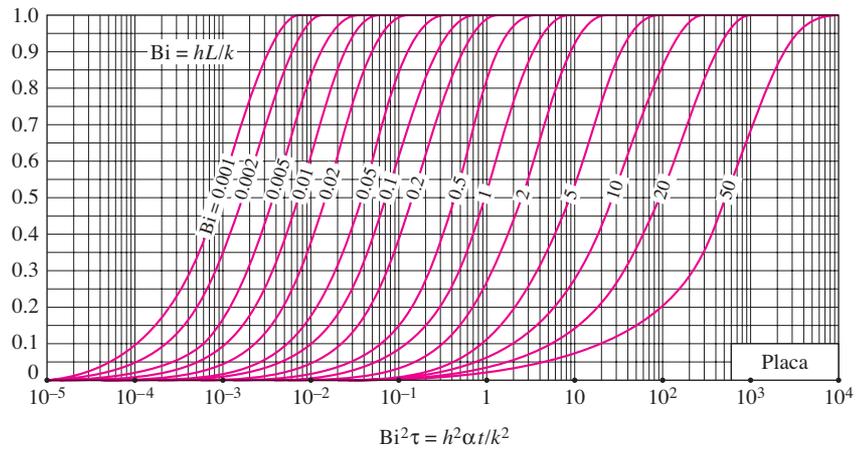


a) Temperatura del plano medio (tomado de M. P. Heisler, "Temperature Charts for Induction and Constant Temperature Heating". *Trans. ASME* 69, 1947, págs. 227-36. Reimpreso con autorización de ASME International).

$$\theta = \frac{T - T_\infty}{T_o - T_\infty}$$



$$\frac{Q}{Q_{\max}}$$



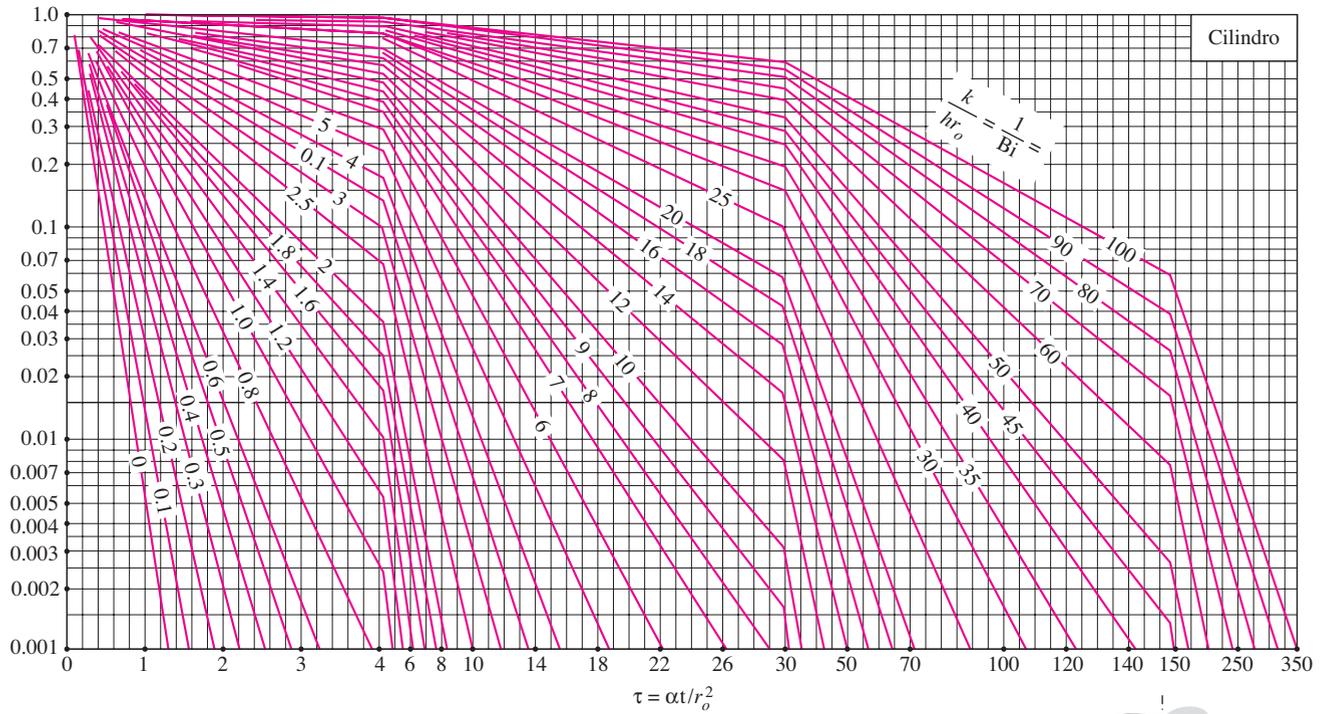
b) Distribución de temperatura (tomado de M. P. Heisler, "Temperature Charts for Induction and Constant Temperature Heating". *Trans. ASME* 69, 1947, págs. 227-36. Reimpreso con autorización de ASME International).

c) Transferencia de calor (tomado de H. Gröber *et al.*)

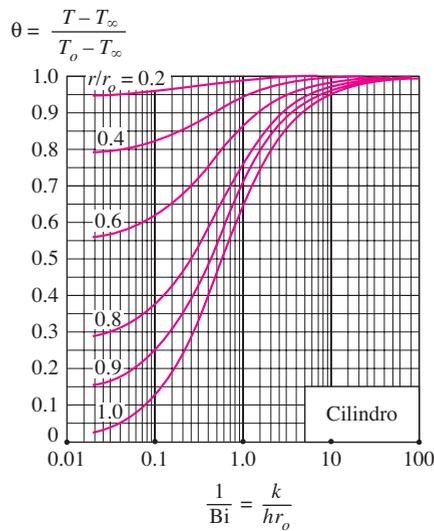
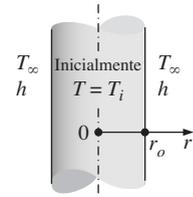
FIGURA 4-15

Diagramas de temperatura transitoria y de transferencia de calor para una pared plana de espesor $2L$, inicialmente a una temperatura uniforme T_i , sujeta a convección desde ambos lados hacia un medio ambiente a la temperatura T_∞ , con un coeficiente de convección de h .

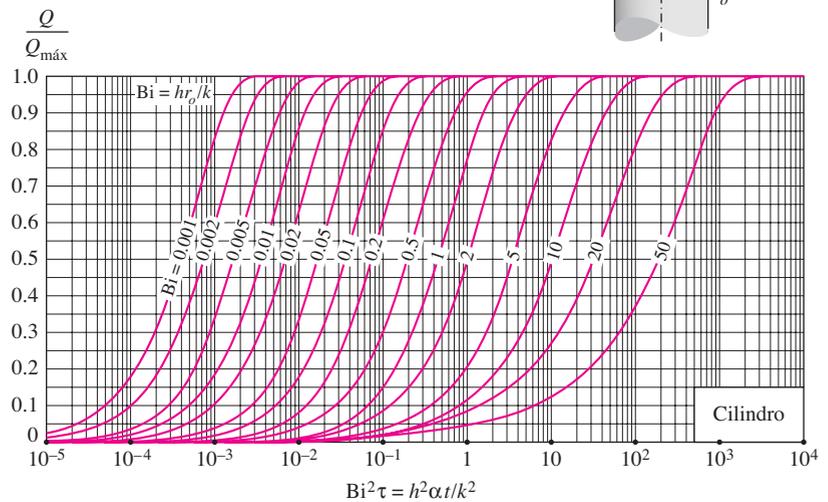
$$\theta_o = \frac{T_o - T_\infty}{T_i - T_\infty}$$



a) Temperatura de la línea central (tomado de M. P. Heisler, "Temperature Charts for Induction and Constant Temperature Heating". *Trans. ASME* 69, 1947, págs. 227-36. Reimpreso con autorización de ASME International).



b) Distribución de temperaturas (tomado de M. P. Heisler, "Temperature Charts for Induction and Constant Temperature Heating". *Trans. ASME* 69, 1947, págs. 227-36. Reimpreso con autorización de ASME International).

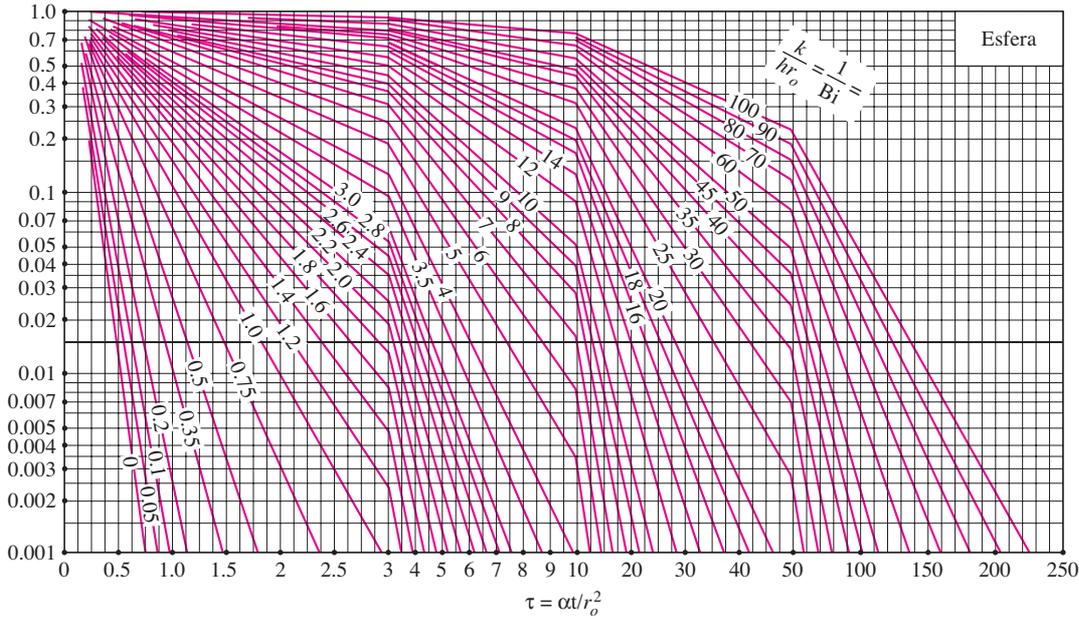


c) Transferencia de calor (tomado de H. Gröber *et al.*)

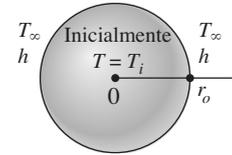
FIGURA 4-16

Diagramas de temperatura transitoria y de transferencia de calor para un cilindro largo de radio r_o , inicialmente a una temperatura uniforme T_i , sujeto a convección desde todos lados hacia un medio ambiente a la temperatura T_∞ , con un coeficiente de convección de h .

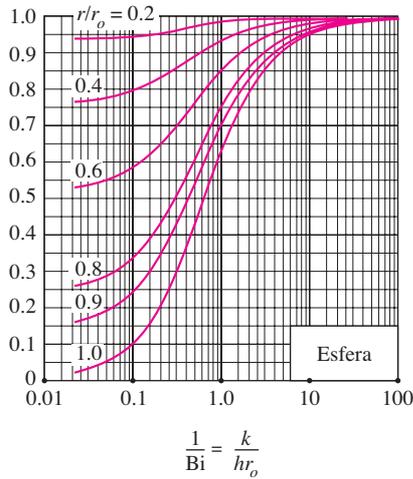
$$\theta_o = \frac{T_o - T_\infty}{T_i - T_\infty}$$



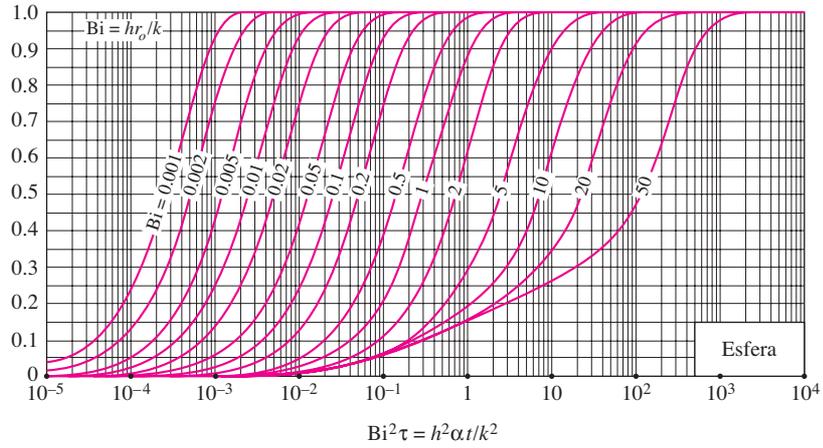
a) Temperatura en el centro (tomado de M. P. Heisler, "Temperature Charts for Induction and Constant Temperature Heating". *Trans. ASME* 69, 1947, págs. 227-36. Reimpreso con autorización de ASME International).



$$\theta = \frac{T - T_\infty}{T_o - T_\infty}$$



$$\frac{Q}{Q_{\text{máx}}}$$



b) Distribución de temperaturas (tomado de M. P. Heisler, "Temperature Charts for Induction and Constant Temperature Heating". *Trans. ASME* 69, 1947, págs. 227-36. Reimpreso con autorización de ASME International).

c) Transferencia de calor (tomado de H. Gröber *et al.*)

FIGURA 4-17

Diagramas de temperatura transitoria y de transferencia de calor para una esfera de radio r_o , inicialmente a una temperatura uniforme T_i , sujeta a convección desde todos lados hacia un medio ambiente a la temperatura T_∞ , con un coeficiente de convección de h .

peratura en *otros lugares*, en el mismo instante, en términos de T_0 . La tercera sirve para determinar la cantidad total de *transferencia de calor* hasta el instante t . Estas gráficas son válidas para $\tau > 0.2$.

Note que el caso $1/Bi = k/hL = 0$ corresponde a $h \rightarrow \infty$, lo cual corresponde al caso de *temperatura superficial T_∞ especificada*. Es decir, el caso en el que las superficies se llevan súbitamente a la temperatura T_∞ en $t = 0$, y se mantienen en T_∞ en todo momento puede manejarse al hacer que h tienda al infinito (figura 4-18).

La temperatura del cuerpo cambia de la temperatura inicial T_i a la de los alrededores T_∞ al final del proceso transitorio de conducción de calor. Por tanto, la cantidad *máxima* de calor que un cuerpo puede ganar (o perder si $T_i > T_\infty$) es sencillamente el *cambio* en el *contenido de energía* del cuerpo. Es decir,

$$Q_{\text{máx}} = mc_p(T_\infty - T_i) = \rho V c_p(T_\infty - T_i) \quad (\text{kJ}) \quad (4-30)$$

donde m es la masa, V es el volumen, ρ es la densidad, y c_p es el calor específico del cuerpo. Así, $Q_{\text{máx}}$ representa la cantidad de transferencia de calor para $t \rightarrow \infty$. Es obvio que la cantidad de transferencia de calor Q en un tiempo finito t es menor que este máximo, y puede expresarse como la suma de los cambios de la energía interna de toda la configuración geométrica, como

$$Q = \int_V \rho c_p [T(x,t) - T_i] dV \quad (4-31)$$

donde $T(x, t)$ es la distribución de temperaturas en el medio, en el instante t . Si se suponen propiedades constantes, la razón de $Q/Q_{\text{máx}}$ queda

$$\frac{Q}{Q_{\text{máx}}} = \frac{\int_V \rho c_p [T(x,t) - T_i] dV}{\rho c_p (T_\infty - T_i) V} = \frac{1}{V} \int_V (1 - \theta) dV \quad (4-32)$$

Si se usan las relaciones apropiadas de temperatura adimensional basadas en la aproximación de un término para la pared plana, el cilindro y la esfera, y se realizan las integraciones indicadas, se obtienen las siguientes relaciones para la fracción de transferencia de calor en esas configuraciones geométricas:

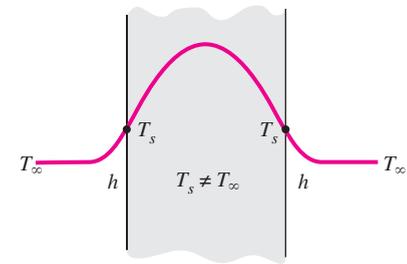
$$\text{Pared plana:} \quad \left(\frac{Q}{Q_{\text{máx}}} \right)_{\text{pared}} = 1 - \theta_{0, \text{pared}} \frac{\text{sen } \lambda_1}{\lambda_1} \quad (4-33)$$

$$\text{Cilindro:} \quad \left(\frac{Q}{Q_{\text{máx}}} \right)_{\text{cil}} = 1 - 2\theta_{0, \text{cil}} \frac{J_1(\lambda_1)}{\lambda_1} \quad (4-34)$$

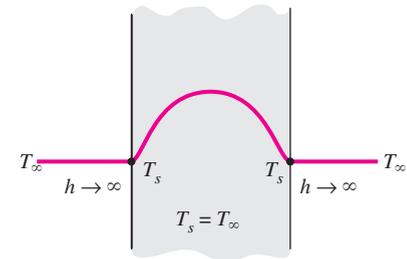
$$\text{Esfera:} \quad \left(\frac{Q}{Q_{\text{máx}}} \right)_{\text{esf}} = 1 - 3\theta_{0, \text{esf}} \frac{\text{sen } \lambda_1 - \lambda_1 \cos \lambda_1}{\lambda_1^3} \quad (4-35)$$

En las figuras 4-15c, 4-16c y 4-17c, también se tienen las gráficas de estas relaciones, basadas en la aproximación de un término, para $Q/Q_{\text{máx}}$, contra las variables Bi y $h^2 \alpha t / k^2$, para la pared plana grande, el cilindro largo y la esfera, respectivamente. Nótese que una vez que se ha determinado la *fracción* de transferencia de calor, $Q/Q_{\text{máx}}$, a partir de estas gráficas o ecuaciones, para el t dado, se puede evaluar la cantidad real de transferencia de calor hasta ese momento de tiempo, al multiplicar esta fracción por $Q_{\text{máx}}$. Un signo *negativo* para $Q_{\text{máx}}$ indica que el cuerpo está *rechazando* calor (figura 4-19).

El uso de los diagramas de Heisler/Gröber y las soluciones de un término ya discutidos queda limitado a las condiciones especificadas al principio de esta sección: el cuerpo está inicialmente a una temperatura *uniforme*, la tempera-



a) Coeficiente finito de convección



b) Coeficiente infinito de convección

FIGURA 4-18

La temperatura superficial específica corresponde al caso de convección hacia un medio ambiente a T_∞ , con un coeficiente de convección h que es *infinito*.

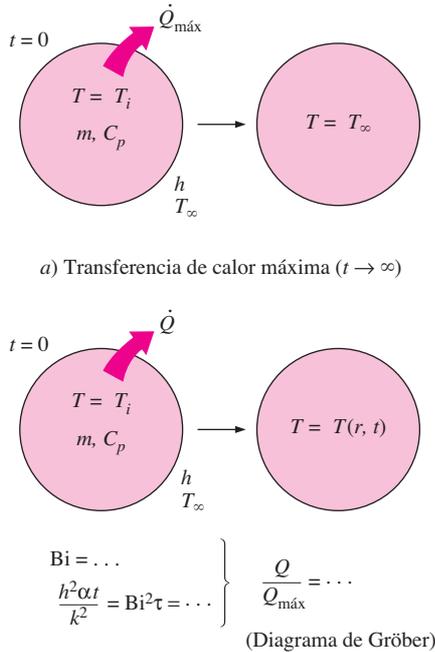
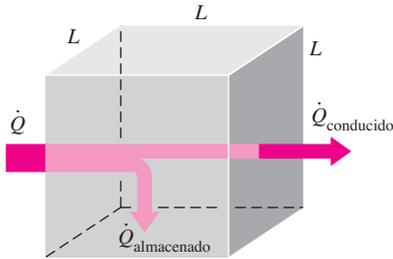


FIGURA 4-19

La fracción de la transferencia de calor total, $Q/Q_{\text{máx}}$, hasta un instante específico t se determina mediante los diagramas de Gröber.



$$\text{Número de Fourier: } \tau = \frac{\alpha t}{L^2} = \frac{\dot{Q}_{\text{conducido}}}{\dot{Q}_{\text{almacenado}}}$$

FIGURA 4-20

El número de Fourier en el instante t se puede concebir como la razón entre la razón de conducción del calor y la razón del almacenamiento de calor en ese instante.

tura del medio que lo circunda y el coeficiente de transferencia de calor por convección son *constantes y uniformes* y no hay *generación de energía* en dicho cuerpo.

Al principio se discutió el significado físico del *número de Biot* y se indicó que es una medida de las magnitudes relativas de los dos mecanismos de transferencia de calor: *convección* en la superficie y *conducción* a través del sólido. Un valor *pequeño* de Bi indica que la resistencia interior del cuerpo a la conducción de calor es *pequeña* en relación con la resistencia a la convección entre la superficie y el fluido. Como resultado, la distribución de temperatura dentro del sólido se vuelve bastante uniforme y el análisis de sistemas concentrados se vuelve aplicable. Recuerde que cuando $Bi < 0.1$, el error en suponer que la temperatura dentro del cuerpo es *uniforme* resulta despreciable.

Para comprender el significado físico del *número de Fourier*, τ , se expresa como (figura 4-20)

$$\tau = \frac{\alpha t}{L^2} = \frac{kL^2 (1/L) \Delta T}{\rho C_p L^3/t \Delta T} = \frac{\text{La razón a la cual el calor es conducido a través de } L \text{ de un cuerpo de volumen } L^3}{\text{La razón a la cual el calor es almacenado en un cuerpo de volumen } L^3} \quad (4-36)$$

Por lo tanto, el número de Fourier es una medida del *calor conducido* a través de un cuerpo en relación con el *calor almacenado*. Por tanto, un valor grande del número de Fourier indica una propagación más rápida del calor a través del cuerpo.

Quizá el lector se está preguntando qué constituye una placa infinitamente grande o un cilindro infinitamente largo. Después de todo, nada en este mundo es infinito. Una placa cuyo espesor es pequeño en relación con las otras dimensiones puede modelarse como una placa infinitamente grande, excepto muy cerca de sus bordes exteriores. Pero los efectos de borde en los cuerpos grandes suelen ser despreciables, de donde una pared plana grande, como la de una casa, puede modelarse como una pared infinitamente grande para los fines de análisis de la transferencia de calor. De manera análoga, un cilindro largo cuyo diámetro es pequeño en relación con su longitud puede analizarse como un cilindro infinitamente largo. En los ejemplos 4-3, 4-4 y 4-5, se ilustra el uso de las gráficas de temperaturas transitorias y de las soluciones de un término.

EJEMPLO 4-3 Cocimiento de huevos

Un huevo común se puede considerar como una esfera de 5 cm de diámetro (figura 4-21). Inicialmente el huevo está a una temperatura uniforme de 5°C y se deja caer en agua hirviendo a 95°C. Tomando el coeficiente de transferencia de calor por convección como $h = 1200 \text{ W/m}^2 \cdot ^\circ\text{C}$, determine cuánto tiempo transcurrirá para que el centro del huevo llegue a los 70°C.

SOLUCIÓN Se cuece un huevo en agua hirviendo. Se debe determinar el tiempo de cocimiento del huevo.

Suposiciones **1** El huevo tiene forma esférica con un radio de $r_0 = 2.5 \text{ cm}$. **2** La conducción de calor en el huevo es unidimensional debido a la simetría térmica con respecto al punto medio. **3** Las propiedades térmicas del huevo y el coeficiente de transferencia de calor son constantes. **4** El número de Fourier es $\tau > 0.2$, de modo que se pueden aplicar las soluciones aproximadas de un término.

Propiedades El contenido de agua de los huevos es alrededor de 74% y, como consecuencia, la conductividad térmica y la difusividad de ellos se pueden considerar que son las del agua a la temperatura promedio de $(5 + 70)/2 = 37.5^\circ\text{C}$; $k = 0.627 \text{ W/m} \cdot ^\circ\text{C}$ y $\alpha = k/\rho C_p = 0.151 \times 10^{-6} \text{ m}^2/\text{s}$ (tabla A-9).

Análisis La temperatura dentro del huevo varía con la distancia radial así como con el tiempo, y la temperatura en un lugar específico en un instante dado se puede determinar con base en los diagramas de Heisler, o bien, con las soluciones de un término. En este ejemplo se usan estas últimas con el fin de demostrar su uso. Para este problema, el número de Biot es

$$\text{Bi} = \frac{hr_0}{k} = \frac{(1\,200 \text{ W/m}^2 \cdot ^\circ\text{C})(0.025 \text{ m})}{0.627 \text{ W/m} \cdot ^\circ\text{C}} = 47.8$$

el cual es mucho mayor que 0.1, por tanto, no es aplicable el análisis de sistemas concentrados. Con base en la tabla 4-1 los coeficientes λ_1 y A_1 para una esfera, correspondientes a este Bi, son

$$\lambda_1 = 3.0754, \quad A_1 = 1.9958$$

Al sustituir estos y otros valores en la ecuación 4-28 y al despejar τ da

$$\frac{T_o - T_\infty}{T_i - T_\infty} = A_1 e^{-\lambda_1^2 \tau} \longrightarrow \frac{70 - 95}{5 - 95} = 1.9958 e^{-(3.0753)^2 \tau} \longrightarrow \tau = 0.209$$

el cual es mayor que 0.2 y, por consiguiente, se puede aplicar la solución de un término con un error de menos de 2%. Entonces, a partir de la definición del número de Fourier, se determina que el tiempo de cocimiento es

$$t = \frac{\tau r_o^2}{\alpha} = \frac{(0.209)(0.025 \text{ m})^2}{0.151 \times 10^{-6} \text{ m}^2/\text{s}} = 865 \text{ s} \approx \mathbf{14.4 \text{ min}}$$

Por lo tanto, transcurrirán más o menos 15 min para el que el centro del huevo se caliente desde 5°C hasta 70°C .

Discusión Note que el número de Biot en el análisis de sistemas concentrados se definió de manera diferente como $\text{Bi} = hL_c/k = h(r/3)/k$. Sin embargo, se puede usar cualquiera de las dos definiciones en la determinación de la aplicabilidad del análisis de sistemas concentrados, a menos que $\text{Bi} \approx 0.1$.

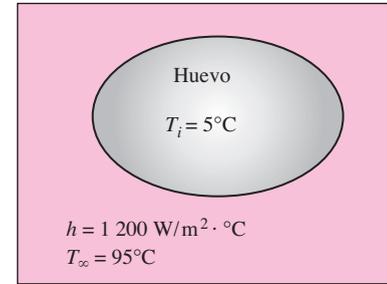


FIGURA 4-21
Esquema para el ejemplo 4-3.

EJEMPLO 4-4 Calentamiento de placas grandes de latón en un horno

En una instalación de producción, placas grandes de latón de 4 cm de espesor que se encuentran inicialmente a una temperatura uniforme de 20°C se calientan al pasar por un horno que se mantiene a 500°C (figura 4-22). Las placas permanecen en el horno durante un periodo de 7 min. Si el coeficiente combinado de transferencia de calor por convección y radiación como $h = 120 \text{ W/m}^2 \cdot ^\circ\text{C}$, determine la temperatura superficial de las placas cuando salen del horno.

SOLUCIÓN Grandes placas de latón se calientan en un horno. Debe determinarse la temperatura superficial de las placas al salir del horno.

Suposiciones 1 La conducción de calor en la placa es unidimensional ya que su longitud es grande en relación con su espesor y se tiene simetría térmica con respecto al plano central. 2 Las propiedades térmicas de la placa y el coeficiente de transferencia de calor por convección son constantes. 3 El número de Fourier es $\tau > 0.2$, de modo que se pueden aplicar las soluciones de un término.

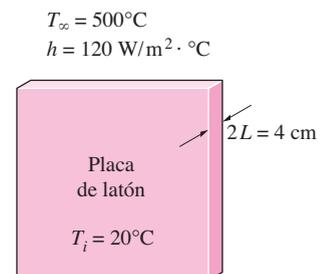


FIGURA 4-22
Esquema para el ejemplo 4-4.

Propiedades Las propiedades del latón a la temperatura ambiente son $k = 110 \text{ W/m} \cdot ^\circ\text{C}$, $\rho = 8\,530 \text{ kg/m}^3$, $C_p = 380 \text{ J/kg} \cdot ^\circ\text{C}$ y $\alpha = 33.9 \times 10^{-6} \text{ m}^2/\text{s}$ (tabla A-3). Se obtienen resultados más exactos por medio de propiedades a la temperatura promedio.

Análisis Se puede determinar la temperatura en un lugar específico, en un instante dado, a partir de los diagramas de Heisler o las soluciones de un término. En este ejemplo se usan los diagramas para demostrar su uso. Puesto que la mitad del espesor de la placa es $L = 0.02 \text{ m}$, a partir de la figura 4-15 se tiene

$$\left. \begin{aligned} \frac{1}{\text{Bi}} = \frac{k}{hL} &= \frac{110 \text{ W/m} \cdot ^\circ\text{C}}{(120 \text{ W/m}^2 \cdot ^\circ\text{C})(0.02 \text{ m})} = 45.8 \\ \tau = \frac{\alpha t}{L^2} &= \frac{(33.9 \times 10^{-6} \text{ m}^2/\text{s})(7 \times 60 \text{ s})}{(0.02 \text{ m})^2} = 35.6 \end{aligned} \right\} \frac{T_o - T_\infty}{T_i - T_\infty} = 0.46$$

Asimismo,

$$\left. \begin{aligned} \frac{1}{\text{Bi}} = \frac{k}{hL} &= 45.8 \\ \frac{x}{L} = \frac{L}{L} &= 1 \end{aligned} \right\} \frac{T - T_\infty}{T_o - T_\infty} = 0.99$$

Por lo tanto,

$$\frac{T - T_\infty}{T_i - T_\infty} = \frac{T - T_\infty}{T_o - T_\infty} \frac{T_o - T_\infty}{T_i - T_\infty} = 0.46 \times 0.99 = 0.455$$

y

$$T = T_\infty + 0.455(T_i - T_\infty) = 500 + 0.455(20 - 500) = \mathbf{282^\circ\text{C}}$$

Por lo tanto, al salir del horno, la temperatura superficial de las placas será de 282°C .

Discusión Se advierte que, en este caso, el número de Biot es $\text{Bi} = 1/45.8 = 0.022$, el cual es mucho menor que 0.1. Por lo tanto, se espera que sea aplicable el análisis de sistemas concentrados. Esto también resulta evidente con base en $(T - T_\infty)/(T_o - T_\infty) = 0.99$, lo cual indica que la temperatura en el centro y en la superficie de la placa, con relación a la temperatura de los alrededores, se encuentran con una diferencia de menos de 1% entre sí. Dado que, por lo general, el error en el que se incurre en la lectura de los diagramas de Heisler es por lo menos de unas cuantas unidades porcentuales, el análisis de sistemas concentrados puede conducir en este caso a resultados muy exactos con menos esfuerzo.

El área superficial de transferencia de calor es $2A$, donde A es el área de la cara de la placa (ésta transfiere calor a través de sus dos superficies) y el volumen de ella es $V = (2L)A$, donde L es la mitad de su espesor. Se determina que el exponente b usado en el análisis de sistemas concentrados es

$$\begin{aligned} b &= \frac{hA_s}{\rho c_p V} = \frac{h(2A)}{\rho c_p (2LA)} = \frac{h}{\rho c_p L} \\ &= \frac{110 \text{ W/m}^2 \cdot ^\circ\text{C}}{(8\,530 \text{ kg/m}^3)(380 \text{ J/kg} \cdot ^\circ\text{C})(0.02 \text{ m})} = 0.00185 \text{ s}^{-1} \end{aligned}$$

Entonces la temperatura de la placa en $t = 7 \text{ min} = 420 \text{ s}$ se determina a partir de

$$\frac{T(t) - T_\infty}{T_i - T_\infty} = e^{-bt} \longrightarrow \frac{T(t) - 500}{20 - 500} = e^{-(0.00185 \text{ s}^{-1})(420 \text{ s})}$$

Esto da

$$T(t) = 279^\circ\text{C}$$

que es prácticamente idéntico al resultado obtenido con anterioridad usando los diagramas de Heisler. Por consiguiente, se puede usar el análisis de sistemas concentrados con confianza cuando el número de Biot es suficientemente pequeño.

EJEMPLO 4-5 Enfriamiento de una flecha cilíndrica larga de acero inoxidable

Una flecha cilíndrica de 20 cm de diámetro hecha de acero inoxidable 304 sale de un horno a una temperatura uniforme de 600°C (figura 4-23). Entonces, la flecha se deja enfriar con lentitud en una cámara ambiente a 200°C, con un coeficiente promedio de transferencia de calor de $h = 80 \text{ W/m}^2 \cdot ^\circ\text{C}$. Determine la temperatura en el centro de la flecha 45 min después de iniciarse el proceso de enfriamiento. También, determine la transferencia de calor por unidad de longitud de la flecha durante este periodo.

SOLUCIÓN Una flecha cilíndrica larga se deja enfriar con lentitud. Se deben determinar la temperatura en el centro y la transferencia de calor por unidad de longitud.

Suposiciones **1** La conducción de calor en la flecha es unidimensional, puesto que es larga y tiene simetría térmica con respecto a la línea central. **2** Las propiedades térmicas de la flecha y el coeficiente de transferencia de calor son constantes. **3** El número de Fourier es $\tau > 0.2$, de modo que se pueden aplicar las soluciones aproximadas de un término.

Propiedades Las propiedades del acero inoxidable 304 a la temperatura ambiente son $k = 14.9 \text{ W/m} \cdot ^\circ\text{C}$, $\rho = 7\,900 \text{ kg/m}^3$, $C_p = 477 \text{ J/kg} \cdot ^\circ\text{C}$ y $\alpha = 3.95 \times 10^{-6} \text{ m}^2/\text{s}$ (tabla A-3). Se pueden obtener resultados más exactos si se utilizan las propiedades a la temperatura promedio.

Análisis La temperatura dentro de la flecha puede variar con la distancia radial r así como con el tiempo, y se puede determinar la temperatura en un lugar específico, en un instante dado, a partir de los diagramas de Heisler. Dado que el radio de la flecha es $r_o = 0.1 \text{ m}$, con base en la figura 4-14 se tiene

$$\left. \begin{aligned} \frac{1}{\text{Bi}} &= \frac{k}{hr_o} = \frac{14.9 \text{ W/m} \cdot ^\circ\text{C}}{(80 \text{ W/m}^2 \cdot ^\circ\text{C})(0.1 \text{ m})} = 1.86 \\ \tau &= \frac{\alpha t}{r_o^2} = \frac{(3.95 \times 10^{-6} \text{ m}^2/\text{s})(45 \times 60 \text{ s})}{(0.1 \text{ m})^2} = 1.07 \end{aligned} \right\} \frac{T_o - T_\infty}{T_i - T_\infty} = 0.40$$

y

$$T_o = T_\infty + 0.4(T_i - T_\infty) = 200 + 0.4(600 - 200) = \mathbf{360^\circ\text{C}}$$

Por lo tanto, la temperatura en el centro de la flecha caerá de 600°C a 360°C en 45 min.

Para determinar la transferencia real de calor, en primer lugar se necesita calcular el calor máximo que se puede transferir desde el cilindro, el cual es la energía sensible de éste con relación a su medio ambiente. Al tomar $L = 1 \text{ m}$,

$$\begin{aligned} m &= \rho V = \rho \pi r_o^2 L = (7\,900 \text{ kg/m}^3)\pi(0.1 \text{ m})^2(1 \text{ m}) = 248.2 \text{ kg} \\ Q_{\text{máx}} &= mC_p(T_\infty - T_i) = (248.2 \text{ kg})(0.477 \text{ kJ/kg} \cdot ^\circ\text{C})(600 - 200)^\circ\text{C} \\ &= 47\,354 \text{ kJ} \end{aligned}$$

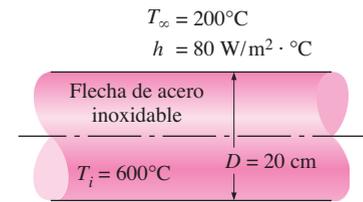


FIGURA 4-23

Esquema para el ejemplo 4-5.

A partir de la figura 4-16c, se determina la relación adimensional de transferencia de calor para un cilindro largo como

$$\left. \begin{aligned} \text{Bi} &= \frac{1}{1/\text{Bi}} = \frac{1}{1.86} = 0.537 \\ \frac{h^2 \alpha t}{k^2} &= \text{Bi}^2 \tau = (0.537)^2 (1.07) = 0.309 \end{aligned} \right\} \frac{Q}{Q_{\text{máx}}} = 0.62$$

Por lo tanto,

$$Q = 0.62 Q_{\text{máx}} = 0.62 \times (47\,354 \text{ kJ}) = \mathbf{29\,360 \text{ kJ}}$$

que es la transferencia de calor total desde la flecha durante los primeros 45 min del enfriamiento.

Solución alternativa También se pudo resolver este problema mediante la relación de la solución de un término, en lugar de los diagramas en régimen transitorio. En primer lugar, se encuentra el número de Biot

$$\text{Bi} = \frac{hr_o}{k} = \frac{(80 \text{ W/m}^2 \cdot \text{°C})(0.1 \text{ m})}{14.9 \text{ W/m} \cdot \text{°C}} = 0.537$$

De la tabla 4-2 se obtienen los coeficientes λ_1 y A_1 para un cilindro, correspondientes a este Bi, son

$$\lambda_1 = 0.970, \quad A_1 = 1.122$$

Al sustituir estos valores en la ecuación 4-27 da

$$\theta_0 = \frac{T_o - T_\infty}{T_i - T_\infty} = A_1 e^{-\lambda_1^2 \tau} = 1.122 e^{-(0.970)^2 (1.07)} = 0.41$$

entonces,

$$T_o = T_\infty + 0.41(T_i - T_\infty) = 200 + 0.41(600 - 200) = \mathbf{364^\circ\text{C}}$$

En la tabla 4-3 se determina que el valor de $J_1(\lambda_1)$, para $\lambda_1 = 0.970$, es 0.430. Entonces, mediante la ecuación 4-34 se determina que la fracción de transferencia de calor es

$$\frac{Q}{Q_{\text{máx}}} = 1 - 2\theta_0 \frac{J_1(\lambda_1)}{\lambda_1} = 1 - 2 \times 0.41 \frac{0.430}{0.970} = 0.636$$

por tanto,

$$Q = 0.636 Q_{\text{máx}} = 0.636 \times (47\,354 \text{ kJ}) = \mathbf{30\,120 \text{ kJ}}$$

Discusión La ligera diferencia entre los dos resultados se debe al error de lectura de los diagramas.

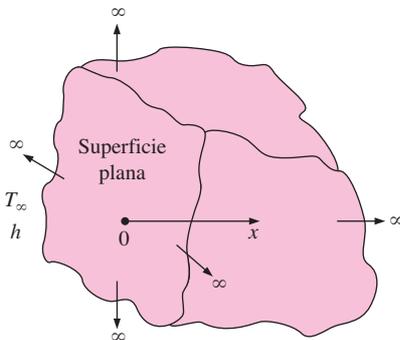


FIGURA 4-24

Esquema de un cuerpo semiinfinito.

4-3 ■ CONDUCCIÓN DE CALOR EN RÉGIMEN TRANSITORIO EN SÓLIDOS SEMIINFINITOS

Un sólido semiinfinito es un cuerpo idealizado que tiene una *sola superficie plana* y se extiende hacia el infinito en todas direcciones, como se muestra en la figura 4-24. Este cuerpo idealizado se usa para indicar que el cambio de

temperatura en la parte del cuerpo en la que se interesa (la región cercana a la superficie) se debe a las condiciones térmicas en una sola superficie. Por ejemplo, la Tierra se puede considerar como un medio semiinfinito por la determinación de la variación de la temperatura cerca de su superficie. Asimismo, una pared gruesa se puede estimar como un medio semiinfinito si en lo único que se interesa es en la variación de la temperatura en la región cercana a una de sus superficies, si la otra está demasiado lejos para tener algún impacto sobre la región de interés durante el tiempo de observación. En este caso, la temperatura en la región central de la pared permanece inalterada.

Durante periodos cortos, la mayor parte de los cuerpos pueden modelarse como sólidos semiinfinitos, ya que el calor no tiene tiempo suficiente para penetrar a la profundidad del cuerpo y por esta razón el espesor del cuerpo no entra en el análisis de la transferencia de calor. Por ejemplo, una pieza de acero de cualquier forma puede considerarse un sólido semiinfinito cuando se enfría por inmersión para endurecer su superficie. Un cuerpo cuya superficie se calienta por medio de un pulso de láser puede tratarse de la misma manera. Considérese un sólido semiinfinito con propiedades termofísicas constantes, sin generación interna de calor, condiciones térmicas uniformes sobre su superficie expuesta e, inicialmente, una temperatura uniforme de T_i en toda su extensión. En este caso, sólo se tiene transferencia de calor en la dirección normal a la superficie (la dirección x) y, por consiguiente, es unidimensional. Las ecuaciones diferenciales son independientes de las condiciones de frontera o inicial, de donde se puede aplicar la ecuación 4-10a para la conducción transitoria unidimensional, en coordenadas cartesianas. La profundidad del sólido es grande ($x \rightarrow \infty$) en comparación con la profundidad hasta la que penetra el calor; estos fenómenos pueden expresarse en forma matemática, a la manera de una condición de frontera, como $T(x \rightarrow \infty, t) = T_i$.

Las condiciones térmicas impuestas sobre la superficie expuesta rigen la conducción de calor en un sólido semiinfinito y, por lo tanto, la solución depende fuertemente de la condición de frontera en $x = 0$. Enseguida, se presenta una resolución analítica detallada para el caso de una temperatura constante T_s sobre la superficie y se dan los resultados para otras condiciones de frontera más complicadas. Cuando se cambia la temperatura de la superficie hacia T_s en $t = 0$ y se mantiene constante en ese valor en todo momento, la formulación del problema se puede expresar como

$$\text{Ecuación diferencial:} \quad \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = \frac{1}{\alpha} \frac{\partial T}{\partial t} \quad (4-37a)$$

$$\text{Condiciones de frontera:} \quad T(0, t) = T_s \quad \text{y} \quad T(x \rightarrow \infty, t) = T_i \quad (4-37b)$$

$$\text{Condición inicial:} \quad T(x, 0) = T_i \quad (4-37c)$$

La técnica de separación de variables no funciona en este caso, debido a que el medio es infinito. Pero otro procedimiento ingenioso, conocido como **variable de semejanza**, funciona bien para convertir la ecuación diferencial en derivadas parciales en una ecuación diferencial ordinaria, al combinar las dos variables independientes x y t en una sola variable η . Para la conducción transitoria en un medio semiinfinito, se define como

$$\text{Variable de semejanza:} \quad \eta = \frac{x}{\sqrt{4\alpha t}} \quad (4-38)$$

Si se supone que $T = T(\eta)$ (lo cual debe verificarse) y se aplica la regla de la cadena, todas las derivadas en la ecuación de conducción de calor se pueden transformar en la nueva variable, como se muestra en la figura 4-25. Si se observa que $\eta = 0$ en $x = 0$ y $\eta \rightarrow \infty$ conforme $x \rightarrow \infty$ (y también en $t = 0$) y se sustituye en las ecuaciones 4-37 después de simplificar, da

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} &= \frac{1}{\alpha} \frac{\partial T}{\partial t} \quad \text{y} \quad \eta = \frac{x}{\sqrt{4\alpha t}} \\ \frac{\partial T}{\partial t} &= \frac{dT}{d\eta} \frac{\partial \eta}{\partial t} = \frac{x}{2t\sqrt{4\alpha t}} \frac{dT}{d\eta} \\ \frac{\partial T}{\partial x} &= \frac{dT}{d\eta} \frac{\partial \eta}{\partial x} = \frac{1}{\sqrt{4\alpha t}} \frac{dT}{d\eta} \\ \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} &= \frac{d}{d\eta} \left(\frac{\partial T}{\partial x} \right) \frac{\partial \eta}{\partial x} = \frac{1}{4\alpha t} \frac{d^2 T}{d\eta^2} \end{aligned}$$

FIGURA 4-25

Transformación de variables en las derivadas de la ecuación de conducción de calor, mediante la aplicación de la regla de la cadena.

$$\frac{d^2T}{d\eta^2} = -2\eta \frac{dT}{d\eta} \quad (4-39a)$$

$$T(0) = T_s \quad \text{y} \quad T(\eta \rightarrow \infty) = T_i \quad (4-39b)$$

Nótese que la segunda condición de frontera y la condición inicial conducen a la misma condición de frontera en η . Tanto la ecuación transformada como las condiciones de frontera sólo dependen de η y son independientes de x y t . Por lo tanto, la transformación tuvo éxito y, en efecto, η es una variable de semejanza.

Para resolver la ecuación diferencial ordinaria de segundo orden de las ecuaciones 4-39, se define una nueva variable w como $w = dT/d\eta$. Esto reduce la 4-39a a una ecuación diferencial de primer orden que se puede resolver al separar las variables,

$$\frac{dw}{d\eta} = -2\eta w \rightarrow \frac{dw}{w} = -2\eta d\eta \rightarrow \ln w = -\eta^2 + C_0 \rightarrow w = C_1 e^{-\eta^2}$$

donde $C_1 = \ln C_0$. De vuelta, si se sustituye $w = dT/d\eta$ y se integra de nuevo,

$$T = C_1 \int_0^\eta e^{-u^2} du + C_2 \quad (4-40)$$

donde u es una variable ficticia de integración. La condición de frontera en $\eta = 0$ da $C_2 = T_s$ y la correspondiente a $\eta \rightarrow \infty$, da

$$T_i = C_1 \int_0^\infty e^{-u^2} du + C_2 = C_1 \frac{\sqrt{\pi}}{2} + T_s \rightarrow C_1 = \frac{2(T_i - T_s)}{\sqrt{\pi}} \quad (4-41)$$

Si se sustituyen las expresiones para C_1 y C_2 en la 4-40 y se reordena, la variación de la temperatura queda

$$\frac{T - T_s}{T_i - T_s} = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^\eta e^{-u^2} du = \text{erf}(\eta) = 1 - \text{erfc}(\eta) \quad (4-42)$$

donde las funciones matemáticas

$$\text{erf}(\eta) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^\eta e^{-u^2} du \quad \text{y} \quad \text{erfc}(\eta) = 1 - \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^\eta e^{-u^2} du \quad (4-43)$$

se conocen como **función de error** y **función complementaria de error**, respectivamente, de argumento η (figura 4-26). A pesar de su aspecto sencillo, en la definición de la función de error no se puede realizar la integral en forma analítica. Por lo tanto, la función $\text{erfc}(\eta)$ se evalúa en forma numérica para diferentes valores de η y los resultados se dan como una lista en la tabla 4-4.

Si se conoce la distribución de temperaturas, se puede determinar el flujo de calor en la superficie, con base en la ley de Fourier, como

$$\dot{q}_s = -k \frac{\partial T}{\partial x} \Big|_{x=0} = -k \frac{dT}{d\eta} \frac{\partial \eta}{\partial x} \Big|_{\eta=0} = -k C_1 e^{-\eta^2} \frac{1}{\sqrt{4\alpha t}} \Big|_{\eta=0} = \frac{k(T_s - T_i)}{\sqrt{\pi \alpha t}} \quad (4-44)$$

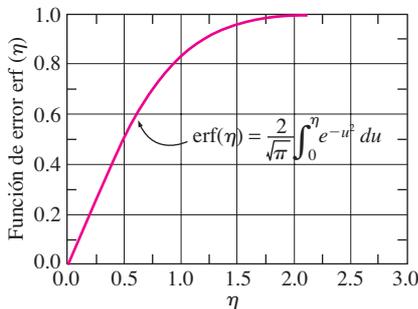


FIGURA 4-26

La función de error es una función matemática estándar, precisamente como las funciones seno y tangente, cuyo valor varía entre 0 y 1.

TABLA 4-4

Función complementaria de error

η	erfc (η)										
0.00	1.00000	0.38	0.5910	0.76	0.2825	1.14	0.1069	1.52	0.03159	1.90	0.00721
0.02	0.9774	0.40	0.5716	0.78	0.2700	1.16	0.10090	1.54	0.02941	1.92	0.00662
0.04	0.9549	0.42	0.5525	0.80	0.2579	1.18	0.09516	1.56	0.02737	1.94	0.00608
0.06	0.9324	0.44	0.5338	0.82	0.2462	1.20	0.08969	1.58	0.02545	1.96	0.00557
0.08	0.9099	0.46	0.5153	0.84	0.2349	1.22	0.08447	1.60	0.02365	1.98	0.00511
0.10	0.8875	0.48	0.4973	0.86	0.2239	1.24	0.07950	1.62	0.02196	2.00	0.00468
0.12	0.8652	0.50	0.4795	0.88	0.2133	1.26	0.07476	1.64	0.02038	2.10	0.00298
0.14	0.8431	0.52	0.4621	0.90	0.2031	1.28	0.07027	1.66	0.01890	2.20	0.00186
0.16	0.8210	0.54	0.4451	0.92	0.1932	1.30	0.06599	1.68	0.01751	2.30	0.00114
0.18	0.7991	0.56	0.4284	0.94	0.1837	1.32	0.06194	1.70	0.01612	2.40	0.00069
0.20	0.7773	0.58	0.4121	0.96	0.1746	1.34	0.05809	1.72	0.01500	2.50	0.00041
0.22	0.7557	0.60	0.3961	0.98	0.1658	1.36	0.05444	1.74	0.01387	2.60	0.00024
0.24	0.7343	0.62	0.3806	1.00	0.1573	1.38	0.05098	1.76	0.01281	2.70	0.00013
0.26	0.7131	0.64	0.3654	1.02	0.1492	1.40	0.04772	1.78	0.01183	2.80	0.00008
0.28	0.6921	0.66	0.3506	1.04	0.1413	1.42	0.04462	1.80	0.01091	2.90	0.00004
0.30	0.6714	0.68	0.3362	1.06	0.1339	1.44	0.04170	1.82	0.01006	3.00	0.00002
0.32	0.6509	0.70	0.3222	1.08	0.1267	1.46	0.03895	1.84	0.00926	3.20	0.00001
0.34	0.6306	0.72	0.3086	1.10	0.1198	1.48	0.03635	1.86	0.00853	3.40	0.00000
0.36	0.6107	0.74	0.2953	1.12	0.1132	1.50	0.03390	1.88	0.00784	3.60	0.00000

Las soluciones de las ecuaciones 4-42 y 4-44 corresponden al caso en el que la temperatura de la superficie del medio expuesta se eleva (o disminuye) de manera repentina hasta T_s en $t = 0$ y se mantiene en ese valor durante todo momento. En la práctica, se tiene una aproximación muy cerrada del caso de la temperatura especificada en la superficie cuando tiene lugar condensación o ebullición sobre la superficie. Al utilizar un procedimiento semejante o la técnica de la transformada de Laplace, se pueden obtener soluciones analíticas para otras condiciones de frontera sobre la superficie, con los resultados siguientes.

Caso 1: Temperatura especificada de la superficie, $T_s = \text{constante}$ (figura 4-27).

$$\frac{T(x, t) - T_i}{T_s - T_i} = \text{erfc}\left(\frac{x}{2\sqrt{\alpha t}}\right) \quad \text{y} \quad \dot{q}_s(t) = \frac{k(T_s - T_i)}{\sqrt{\pi\alpha t}} \quad (4-45)$$

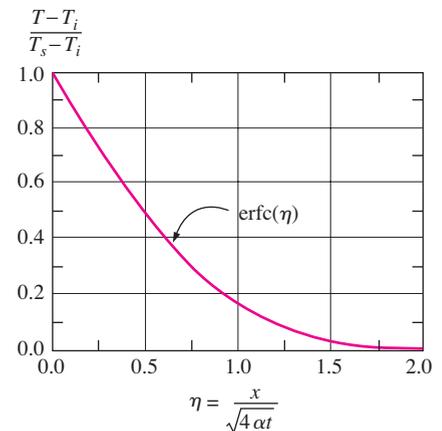


FIGURA 4-27

Distribución de temperatura adimensional para la conducción transitoria en un sólido semiinfinito, cuando la superficie se mantiene a una temperatura constante.

Caso 2: Flujo especificado de calor en la superficie, $\dot{q}_s = \text{constante}$.

$$T(x, t) - T_i = \frac{\dot{q}_s}{k} \left[\sqrt{\frac{4\alpha t}{\pi}} \exp\left(-\frac{x^2}{4\alpha t}\right) - x \text{erfc}\left(\frac{x}{2\sqrt{\alpha t}}\right) \right] \quad (4-46)$$

Caso 3: Convección sobre la superficie, $\dot{q}_s(t) = h[T_\infty - T(0, t)]$.

$$\frac{T(x, t) - T_i}{T_\infty - T_i} = \operatorname{erfc}\left(\frac{x}{2\sqrt{\alpha t}}\right) - \exp\left(\frac{hx}{k} + \frac{h^2\alpha t}{k^2}\right) \operatorname{erfc}\left(\frac{x}{2\sqrt{\alpha t}} + \frac{h\sqrt{\alpha t}}{k}\right) \quad (4-47)$$

Caso 4: Pulso de energía en la superficie, $e_s = \text{constante}$.

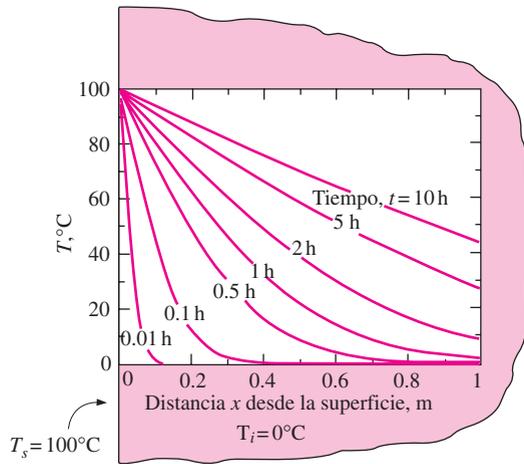
Se transfiere energía al cuerpo infinito en forma instantánea, en la cantidad de e_s por unidad de área de la superficie (en J/m^2), en el instante $t = 0$ (por ejemplo, por medio de un pulso de láser), y se supone que la energía completa entra al cuerpo, sin pérdida de calor desde la superficie.

$$T(x, t) - T_i = \frac{e_s}{k\sqrt{\pi t/\alpha}} \exp\left(-\frac{x^2}{4\alpha t}\right) \quad (4-48)$$

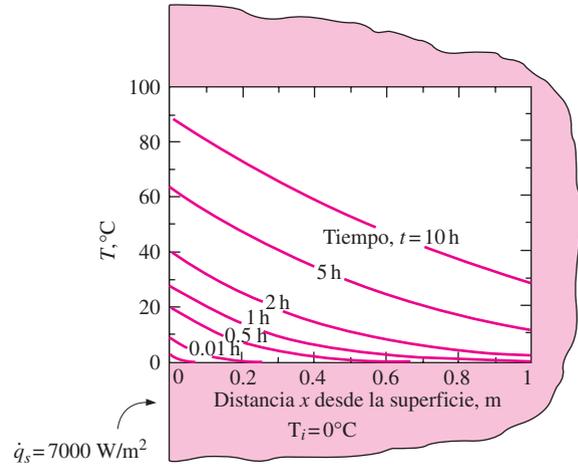
Nótese que los casos 1 y 3 están íntimamente relacionados. En el 1, se lleva la superficie $x = 0$ hasta una temperatura T_s , en el instante $t = 0$, y se mantiene en ese valor en todo momento. En el caso 3, la superficie se expone a convección por medio de un fluido a una temperatura constante T_∞ , con un coeficiente h de transferencia de calor.

En la figura 4-28, se muestran las gráficas para los cuatro casos, para una situación representativa con el uso de un bloque grande de hierro fundido, inicialmente a 0°C en toda su extensión. En el caso 1, la temperatura de la superficie permanece constante en el valor especificado de T_s , y aumenta en forma gradual dentro del medio, conforme el calor penetra a mayor profundidad. Nótese que en el transcurso de los periodos iniciales sólo una delgada rebanada cercana a la superficie resulta afectada por la transferencia de calor. Asimismo, el gradiente de temperatura en la superficie y, como consecuencia, la rapidez de la transferencia de calor hacia dentro del sólido disminuyen con el tiempo. En el caso 2, se suministra calor al sólido en forma continua; de este modo, la temperatura dentro del mismo, incluida la superficie, aumenta con el tiempo. Éste también es el caso con la convección (caso 3), excepto que la temperatura T_∞ del fluido circundante es la más alta a la que puede llegar la del cuerpo sólido. En el caso 4, la superficie se expone a una ráfaga instantánea de suministro de calor en el instante $t = 0$, como calentamiento por medio de un pulso de láser, y a continuación se cubre con aislamiento. El resultado es una elevación instantánea en la temperatura de la superficie, seguida por una caída conforme el calor es conducido a mayor profundidad dentro del sólido. Nótese que el perfil de temperaturas siempre es normal a la superficie en todo momento. (¿Por qué?)

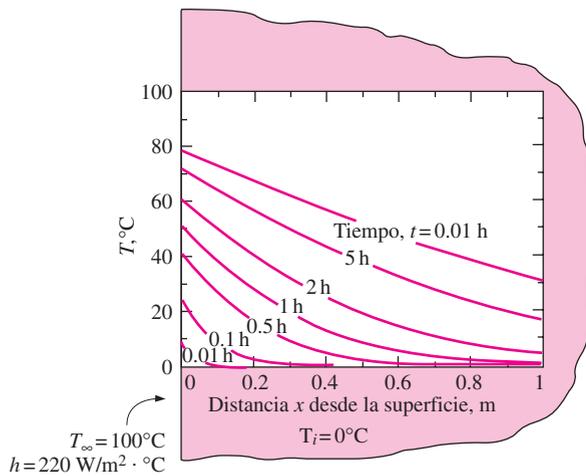
En la figura 4-29, se muestra la gráfica de la variación de la temperatura con la posición y el tiempo en un sólido semiinfinito expuesto a transferencia de calor por convección, para la temperatura en forma adimensional contra la variable adimensional de semejanza $\eta = x/\sqrt{4\alpha t}$, para varios valores del parámetro $h\sqrt{\alpha t}/k$. Aunque la solución gráfica dada en la figura 4-29 es sencillamente una gráfica de la solución analítica exacta, está sujeta a errores de lectura y, por lo tanto, tiene una exactitud limitada en comparación con la solución analítica. Asimismo, los valores en el eje vertical de la figura 4-29 corresponden a $x = 0$, por lo que representan la temperatura en la superficie. La curva $h\sqrt{\alpha t}/k = \infty$ corresponde a $h \rightarrow \infty$, lo cual corresponde al caso de la temperatura especificada T_∞ en la superficie, en $x = 0$. Es decir, el caso en el que la superficie del cuerpo semiinfinito se lleve en forma repentina a la temperatura T_∞ en $t = 0$, y se mantenga en ella en todo momento puede manejarse al hacer tender h al infinito. Para un coeficiente h finito de transferencia de calor, la temperatura en la superficie tiende a la del fluido, T_∞ , conforme el tiempo t tiende al infinito.



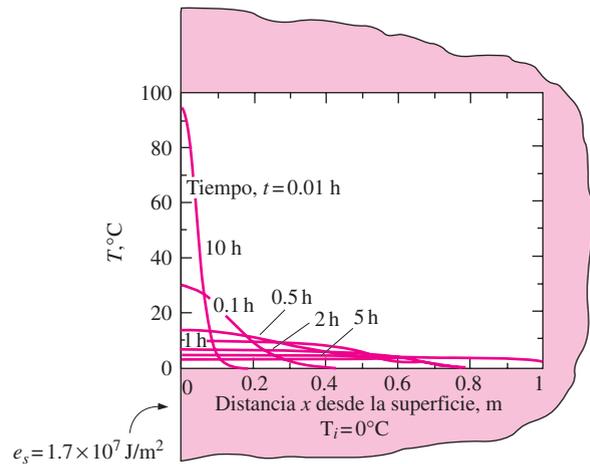
a) Temperatura especificada en la superficie, $T_s = \text{constante}$.



b) Flujo de calor especificado en la superficie, $\dot{q}_s = \text{constante}$



c) Convección en la superficie



d) Pulso de energía en la superficie, $e_s = \text{constante}$

FIGURA 4-28

Variaciones de la temperatura con la posición y el tiempo en un bloque grande de hierro fundido ($\alpha = 2.31 \times 10^{-5} \text{ m}^2/\text{s}$, $k = 80.2 \text{ W/m}^\circ\text{C}$), inicialmente a 0°C , en condiciones térmicas diferentes en la superficie.

Contacto de dos sólidos semiinfinitos

Cuando se ponen en contacto dos cuerpos grandes A y B, inicialmente a las temperaturas uniformes $T_{A,i}$ y $T_{B,i}$, logran en forma instantánea la igualdad de temperatura en la superficie de contacto (la igualdad de temperatura se logra sobre la superficie completa si la resistencia de contacto es despreciable). Si los dos cuerpos son del mismo material, con propiedades constantes, la simetría térmica requiere que la temperatura de la superficie de contacto sea el promedio aritmético, $T_s = (T_{A,i} + T_{B,i})/2$, y que permanezca constante en ese valor en todo tiempo.

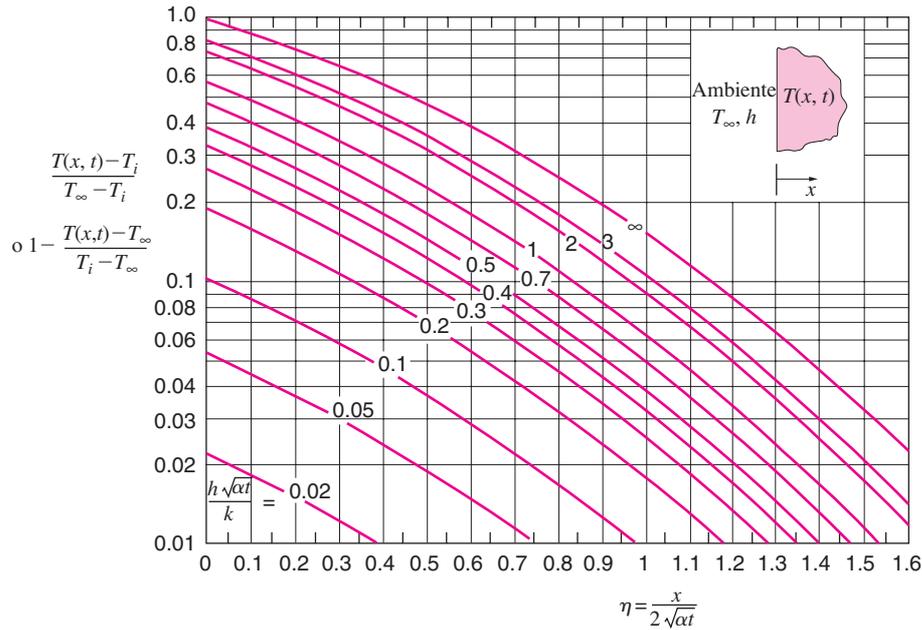


FIGURA 4-29

Variación de la temperatura con la posición y el tiempo en un sólido semiinfinito, inicialmente a la temperatura T_i , expuesto a convección en un medio ambiente a T_∞ , con un coeficiente de transferencia de calor por convección de h (gráfica trazada con el uso de EES).

Incluso se obtendrá una temperatura de superficie de contacto constante si los cuerpos son de materiales diferentes, pero, en este caso, la temperatura de la superficie, T_s , será diferente del promedio aritmético. Si se considera que los dos cuerpos pueden tratarse como sólidos semiinfinitos con la misma temperatura especificada en la superficie, con base en las ecuaciones 4-45 el balance de energía en la superficie de contacto da

$$\dot{q}_{s,A} = \dot{q}_{s,B} \rightarrow -\frac{k_A(T_s - T_{A,i})}{\sqrt{\pi\alpha_A t}} = \frac{k_B(T_s - T_{B,i})}{\sqrt{\pi\alpha_B t}} \rightarrow \frac{T_{A,i} - T_s}{T_s - T_{B,i}} = \sqrt{\frac{(k\rho c_p)_B}{(k\rho c_p)_A}}$$

Entonces se determina que la temperatura T_s es (figura 4-30)

$$T_s = \frac{\sqrt{(k\rho c_p)_A} T_{A,i} + \sqrt{(k\rho c_p)_B} T_{B,i}}{\sqrt{(k\rho c_p)_A} + \sqrt{(k\rho c_p)_B}} \quad (4-49)$$

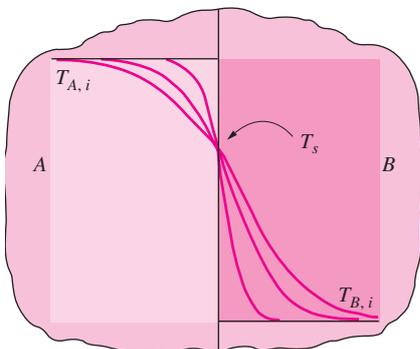


FIGURA 4-30

Contacto de dos sólidos semiinfinitos de temperaturas iniciales diferentes.

Por lo tanto, la temperatura de la interfase de dos cuerpos que se ponen en contacto es dominada por el cuerpo con el $k\rho c_p$ más grande. Esto también explica por qué un metal a la temperatura ambiente se siente más frío que la madera a la misma temperatura. A la temperatura ambiente, el valor $\sqrt{k\rho c_p}$ es $24 \text{ kJ/m}^2 \cdot ^\circ\text{C}$ para el aluminio, $0.38 \text{ kJ/m}^2 \cdot ^\circ\text{C}$ para la madera y $1.1 \text{ kJ/m}^2 \cdot ^\circ\text{C}$ para la carne humana. Si se usa la ecuación 4-49, puede demostrarse que cuando una persona con una temperatura en la piel de 35°C toca un bloque de aluminio y a continuación uno de madera, ambos a 15°C , la temperatura de la superficie de contacto será de 15.9°C , en el caso del aluminio, y de 30°C , en el de la madera.

EJEMPLO 4-6 Profundidad mínima de entierro de los tubos de agua para evitar el congelamiento

En zonas en donde la temperatura del aire permanece por debajo de 0°C durante periodos prolongados, el congelamiento del agua en los tubos subterráneos es una preocupación importante. Por fortuna, el suelo permanece relativamente caliente durante esos periodos y pasan semanas para que las temperaturas por debajo del punto de congelación lleguen hasta las tuberías de agua que están enterradas. Por tanto, el suelo sirve de manera efectiva como un aislamiento para proteger el agua contra las temperaturas por debajo del punto de congelación en el invierno.

En un lugar particular, el piso se cubre con una capa de nieve a -10°C durante un periodo continuo de tres meses y las propiedades promedio del suelo en ese lugar son $k = 0.4 \text{ W/m} \cdot ^\circ\text{C}$ y $\alpha = 0.15 \times 10^{-6} \text{ m}^2/\text{s}$ (figura 4-31). Si se supone una temperatura inicial uniforme de 15°C para el suelo, determine la profundidad mínima de entierro para impedir que los tubos de agua se congelen.

SOLUCIÓN Los tubos de agua se entierran en el suelo para impedir la congelación. Se debe determinar la profundidad mínima de entierro en un lugar en particular.

Suposiciones 1 La temperatura del suelo es afectada sólo por las condiciones térmicas en una superficie y, por tanto, dicho suelo se puede considerar como un medio semiinfinito. 2 Las propiedades térmicas del suelo son constantes.

Propiedades En el enunciado del problema se dan las propiedades del suelo.

Análisis En el caso de la profundidad mínima de entierro, la temperatura del suelo que rodea los tubos será de 0°C después de tres meses. Por lo tanto, a partir de la figura 4-29, se tiene

$$\left. \begin{aligned} \frac{h\sqrt{\alpha t}}{k} &= \infty \quad (\text{ya que } h \rightarrow \infty) \\ \frac{T(x, t) - T_i}{T_s - T_i} &= \frac{0 - 15}{-10 - 15} = 0.6 \end{aligned} \right\} \eta = \frac{x}{2\sqrt{\alpha t}} = 0.36$$

Se nota que

$$t = (90 \text{ días})(24 \text{ h/día})(3600 \text{ s/h}) = 7.78 \times 10^6 \text{ s}$$

y de donde

$$x = 2\eta\sqrt{\alpha t} = 2 \times 0.36\sqrt{(0.15 \times 10^{-6} \text{ m}^2/\text{s})(7.78 \times 10^6 \text{ s})} = \mathbf{0.78 \text{ m}}$$

Por lo tanto, los tubos de agua deben enterrarse a una profundidad de por lo menos 78 cm para evitar el congelamiento en las severas condiciones invernales específicas.

SOLUCIÓN ALTERNATIVA También pudo determinarse la solución de este problema a partir de la ecuación 4-45:

$$\frac{T(x, t) - T_i}{T_s - T_i} = \text{erfc} \left(\frac{x}{2\sqrt{\alpha t}} \right) \longrightarrow \frac{0 - 15}{-10 - 15} = \text{erfc} \left(\frac{x}{2\sqrt{\alpha t}} \right) = 0.60$$

Con base en la tabla 4-4, se determina que el argumento que corresponde a este valor de la función complementaria de error es $\eta = 0.37$. Por lo tanto,

$$x = 2\eta\sqrt{\alpha t} = 2 \times 0.37\sqrt{(0.15 \times 10^{-6} \text{ m}^2/\text{s})(7.78 \times 10^6 \text{ s})} = \mathbf{0.80 \text{ m}}$$

Una vez más, la ligera diferencia se debe al error de lectura del diagrama.

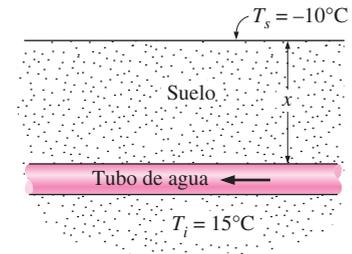


FIGURA 4-31
Esquema para el ejemplo 4-6.

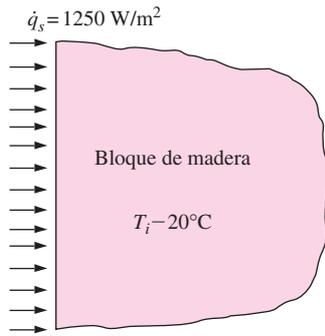


FIGURA 4-32
Esquema para el ejemplo 4-7.

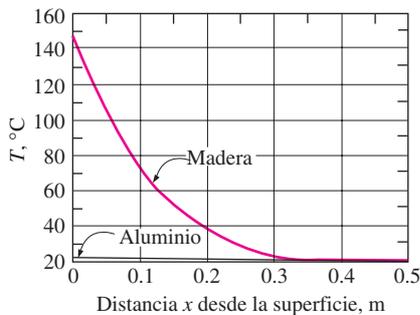


FIGURA 4-33
Variación de la temperatura dentro de los bloques de madera y de aluminio en $t = 20$ min.

EJEMPLO 4-7 Elevación de la temperatura de la superficie en bloques calentados

Un bloque grueso de madera pintado de negro y a 20°C es expuesto a un flujo constante de calor solar de 1250 W/m^2 (figura 4-32). Determine la temperatura alcanzada en la superficie expuesta del bloque después de 20 minutos. ¿Cuál sería su respuesta si el bloque estuviera hecho de aluminio?

SOLUCIÓN Se expone un bloque de madera a flujo de calor solar. Debe determinarse la temperatura de la superficie del bloque y compararse con el valor para un bloque de aluminio.

Suposiciones **1** Toda la radiación solar incidente es absorbida por el bloque. **2** Se descarta la pérdida de calor desde el bloque (y, por consiguiente, el resultado que se obtenga es la temperatura máxima). **3** El bloque es suficientemente grueso como para ser considerado un sólido semiinfinito y las propiedades del mismo son constantes.

Propiedades Los valores de la conductividad y difusividad térmica a temperatura ambiente son $k = 1.26\text{ W/m}\cdot\text{K}$ y $\alpha = 1.1 \times 10^{-5}\text{ m}^2/\text{s}$, para la madera, y $k = 237\text{ W/m}\cdot\text{K}$ y $\alpha = 9.71 \times 10^{-5}\text{ m}^2/\text{s}$, para el aluminio.

Análisis Éste es un problema de conducción transitoria en un medio semiinfinito expuesto a flujo constante de calor en la superficie; con base en la ecuación 4-46, la temperatura de la superficie se puede expresar como

$$T_s = T(0, t) = T_i + \frac{\dot{q}_s}{k} \sqrt{\frac{4\alpha t}{\pi}}$$

Si se sustituyen los valores dados, se determina que las temperaturas superficiales tanto para la madera como para el aluminio son

$$T_{s, \text{madera}} = 20^\circ\text{C} + \frac{1250\text{ W/m}^2}{1.26\text{ W/m}\cdot^\circ\text{C}} \sqrt{\frac{4(1.1 \times 10^{-5}\text{ m}^2/\text{s})(20 \times 60\text{ s})}{\pi}} = 149^\circ\text{C}$$

$$T_{s, \text{Al}} = 20^\circ\text{C} + \frac{1250\text{ W/m}^2}{237\text{ W/m}\cdot^\circ\text{C}} \sqrt{\frac{4(9.71 \times 10^{-5}\text{ m}^2/\text{s})(20 \times 60\text{ s})}{\pi}} = 22.0^\circ\text{C}$$

Nótese que la energía térmica suministrada a la madera se acumula cerca de la superficie, debido a la conductividad y difusividad bajas de la misma, lo que causa que la temperatura de la superficie aumente hasta valores elevados. Por otra parte, los metales conducen el calor que reciben hacia las partes interiores del bloque debido a su conductividad y difusividad altas, lo que da como resultado una elevación mínima de la temperatura en la superficie. En realidad, las dos temperaturas serán más bajas debido a las pérdidas de calor.

Discusión Con el uso de EES, en la figura 4-33 se han evaluado y trazado las gráficas de los perfiles de temperaturas, en $t = 20$ min, tanto para la madera como para el aluminio. A una profundidad de $x = 0.41$ m, la temperatura de ambos bloques es 20.6°C . A una profundidad de 0.5 m, las temperaturas llegan a ser de 20.1°C , para el bloque de madera, y de 20.4°C , para el de aluminio, lo cual confirma que el calor penetra más y más rápido en los metales, en comparación con los no metales.

4-4 ■ CONDUCCIÓN DE CALOR EN RÉGIMEN TRANSITORIO EN SISTEMAS MULTIDIMENSIONALES

Se pueden usar los diagramas de temperatura transitoria y las soluciones analíticas presentados con anterioridad con el fin de determinar la distribución de temperatura y la transferencia de calor en problemas *unidimensionales* de

conducción de calor asociados con una pared plana grande, un cilindro largo, una esfera y un medio semiinfinito. Por medio de un procedimiento de superposición llamado **solución producto**, también se pueden usar estos diagramas con el fin de construir soluciones para los problemas *bidimensionales* de conducción de calor en régimen transitorio que se encuentran en configuraciones geométricas como un cilindro corto, una barra rectangular larga o un cilindro o placa semiinfinitos, e incluso problemas *tridimensionales* asociados con configuraciones como un prisma rectangular o una barra rectangular semiinfinita, siempre que *todas* las superficies del sólido estén sujetas a convección hacia el *mismo* fluido a la temperatura T_∞ , como el *mismo* coeficiente de transferencia de calor h , y que el cuerpo no genere calor (figura 4-34). En esas configuraciones geométricas multidimensionales, la solución se puede expresar como el *producto* de las soluciones para las configuraciones geométricas unidimensionales cuya intersección es la geometría multidimensional.

Considere un *cilindro corto* de altura a y radio r_o , inicialmente a una temperatura T_i . No hay generación de calor en el cilindro. En el instante $t = 0$, el cilindro se sujeta a convección desde todas las superficies hacia un medio a la temperatura T_∞ , con un coeficiente de transferencia de calor h . La temperatura dentro del cilindro cambiará con x así como con r y el tiempo t , ya que se tiene transferencia de calor desde las superficies superior e inferior del cilindro así como desde su superficie lateral. Es decir, $T = T(r, x, t)$ y, por consiguiente, éste es un problema bidimensional de conducción de calor en régimen transitorio. Cuando se supone que las propiedades son constantes, se puede demostrar que la solución de este problema bidimensional se puede expresar como

$$\left(\frac{T(r, x, t) - T_\infty}{T_i - T_\infty} \right)_{\text{cilindro corto}} = \left(\frac{T(x, t) - T_\infty}{T_i - T_\infty} \right)_{\text{pared plana}} \left(\frac{T(r, t) - T_\infty}{T_i - T_\infty} \right)_{\text{cilindro infinito}} \quad (4-50)$$

Es decir, la solución para el cilindro corto bidimensional de altura a y radio r_o es igual al *producto* de las soluciones sin dimensiones para la pared plana unidimensional de espesor a y el cilindro largo de radio r_o , las cuales son las dos configuraciones geométricas cuya intersección es el cilindro corto, como se muestra en la figura 4-35. Esto se generaliza como sigue: *la solución para una configuración geométrica multidimensional es el producto de las soluciones de las geometrías unidimensionales cuya intersección es el cuerpo multidimensional.*

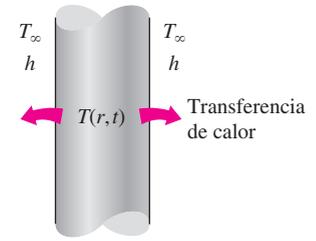
Por conveniencia, las soluciones unidimensionales se denotan por

$$\begin{aligned} \theta_{\text{pared}}(x, t) &= \left(\frac{T(x, t) - T_\infty}{T_i - T_\infty} \right)_{\text{pared plana}} \\ \theta_{\text{cil}}(r, t) &= \left(\frac{T(r, t) - T_\infty}{T_i - T_\infty} \right)_{\text{cilindro infinito}} \\ \theta_{\text{semiinf}}(x, t) &= \left(\frac{T(x, t) - T_\infty}{T_i - T_\infty} \right)_{\text{sólido semiinfinito}} \end{aligned} \quad (4-51)$$

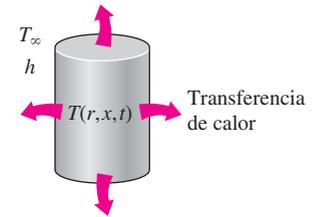
Por ejemplo, la solución para una barra sólida larga, cuya sección transversal es un rectángulo de $a \times b$, es la intersección de las dos paredes planas infinitas de espesores a y b , como se muestra en la figura 4-36 y, por consiguiente, la distribución de temperatura transitoria para esta barra rectangular se puede expresar como

$$\left(\frac{T(x, y, t) - T_\infty}{T_i - T_\infty} \right)_{\text{barra rectangular}} = \theta_{\text{pared}}(x, t) \theta_{\text{pared}}(y, t) \quad (4-52)$$

En la tabla 4-5, se dan las formas apropiadas de las soluciones productos para algunas otras configuraciones geométricas. Es importante observar que en un



a) Cilindro largo



b) Cilindro corto (bidimensional)

FIGURA 4-34

La temperatura en un cilindro corto expuesto a convección desde todas las superficies varía tanto en la dirección radial como en la axial y, por tanto, el calor se transfiere en las dos direcciones.

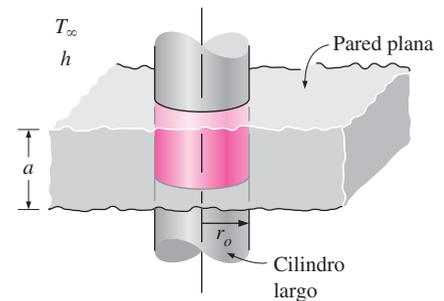
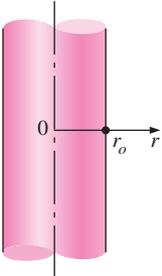
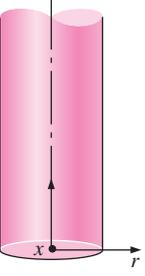
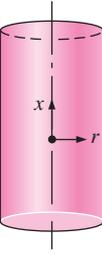
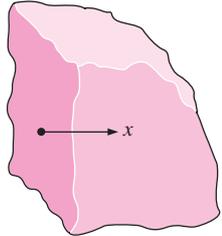
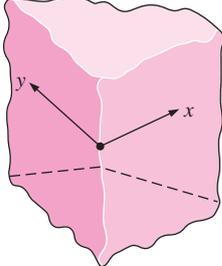
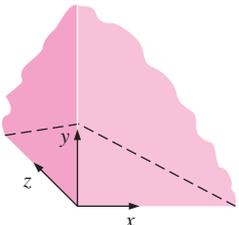
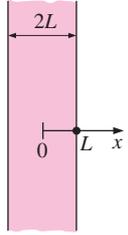
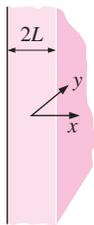
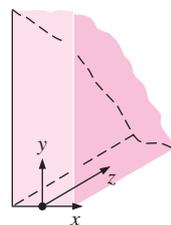
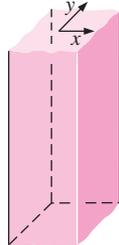
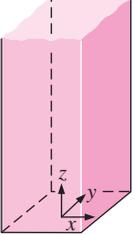
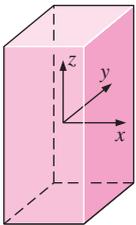


FIGURA 4-35

Un cilindro corto de radio r_o y altura a es la *intersección* de un cilindro largo de radio r_o y una pared plana de espesor a .

TABLA 4-5

Soluciones multidimensionales expresadas como productos de soluciones unidimensionales para cuerpos que están inicialmente a una temperatura uniforme T_i y expuestos a convección desde todas sus superficies hacia un medio a T_∞

 <p>$\theta(r, t) = \theta_{\text{cil}}(r, t)$ Cilindro infinito</p>	 <p>$\theta(x, r, t) = \theta_{\text{cil}}(r, t) \theta_{\text{semiinf}}(x, t)$ Cilindro semiinfinito</p>	 <p>$\theta(x, r, t) = \theta_{\text{cil}}(r, t) \theta_{\text{pared}}(x, t)$ Cilindro corto</p>
 <p>$\theta(x, t) = \theta_{\text{semiinf}}(x, t)$ Medio semiinfinito</p>	 <p>$\theta(x, y, t) = \theta_{\text{semiinf}}(x, t) \theta_{\text{semiinf}}(y, t)$ Medio un cuarto de infinito</p>	 <p>$\theta(x, y, z, t) = \theta_{\text{semiinf}}(x, t) \theta_{\text{semiinf}}(y, t) \theta_{\text{semiinf}}(z, t)$ Región de la esquina de un medio grande</p>
 <p>$\theta(x, t) = \theta_{\text{pared}}(x, t)$ Placa infinita (o pared plana)</p>	 <p>$\theta(x, y, t) = \theta_{\text{pared}}(x, t) \theta_{\text{semiinf}}(y, t)$ Placa semiinfinita</p>	 <p>$\theta(x, y, z, t) = \theta_{\text{pared}}(x, t) \theta_{\text{semiinf}}(y, t) \theta_{\text{semiinf}}(z, t)$ Placa un cuarto de infinito</p>
 <p>$\theta(x, y, t) = \theta_{\text{pared}}(x, t) \theta_{\text{pared}}(y, t)$ Barra rectangular infinita</p>	 <p>$\theta(x, y, z, t) = \theta_{\text{pared}}(x, t) \theta_{\text{pared}}(y, t) \theta_{\text{semiinf}}(z, t)$ Barra rectangular semiinfinita</p>	 <p>$\theta(x, y, z, t) = \theta_{\text{pared}}(x, t) \theta_{\text{pared}}(y, t) \theta_{\text{pared}}(z, t)$ Paralelepípedo rectangular</p>

sólido semiinfinito la coordenada x se mide desde la *superficie* y desde el *plano medio*, en una pared plana. La distancia radial r siempre se mide desde la línea central.

Note que la solución de un problema *bidimensional* comprende el producto de *dos* soluciones unidimensionales, en tanto que la solución de un problema *tridimensional* comprende el producto de *tres* soluciones unidimensionales.

También se puede aplicar una forma modificada de la solución producto para determinar la transferencia de calor total hacia una configuración geométrica multidimensional o desde ésta, en régimen transitorio, utilizando los valores unidimensionales, como demostró L. S. Langston en 1982. La transferencia de calor en régimen transitorio para una configuración geométrica bidimensional formada por la intersección de dos configuraciones unidimensionales 1 y 2 es

$$\left(\frac{Q}{Q_{\text{máx}}}\right)_{\text{total, 2D}} = \left(\frac{Q}{Q_{\text{máx}}}\right)_1 + \left(\frac{Q}{Q_{\text{máx}}}\right)_2 \left[1 - \left(\frac{Q}{Q_{\text{máx}}}\right)_1\right] \quad (4-53)$$

La transferencia de calor en régimen transitorio para un cuerpo tridimensional formado por la intersección de tres cuerpos unidimensionales, 1, 2 y 3, queda dada por

$$\begin{aligned} \left(\frac{Q}{Q_{\text{máx}}}\right)_{\text{total, 3D}} &= \left(\frac{Q}{Q_{\text{máx}}}\right)_1 + \left(\frac{Q}{Q_{\text{máx}}}\right)_2 \left[1 - \left(\frac{Q}{Q_{\text{máx}}}\right)_1\right] \\ &+ \left(\frac{Q}{Q_{\text{máx}}}\right)_3 \left[1 - \left(\frac{Q}{Q_{\text{máx}}}\right)_1\right] \left[1 - \left(\frac{Q}{Q_{\text{máx}}}\right)_2\right] \end{aligned} \quad (4-54)$$

En los ejemplos siguientes se ilustra el uso de la solución producto en los problemas bidimensionales y tridimensionales de conducción de calor en régimen transitorio.

EJEMPLO 4-8 Enfriamiento de un cilindro corto de latón

Un cilindro corto de latón de diámetro $D = 10$ cm y altura $H = 12$ cm está inicialmente a una temperatura uniforme $T_i = 120^\circ\text{C}$. Ahora el cilindro se coloca en aire atmosférico a 25°C , donde la transferencia de calor tiene lugar por convección, con un coeficiente de transferencia de calor de $h = 60 \text{ W/m}^2 \cdot ^\circ\text{C}$. Calcule la temperatura en *a)* el centro del cilindro y *b)* el centro de la superficie superior del cilindro 15 min después del inicio del enfriamiento.

SOLUCIÓN Un cilindro corto se deja enfriar en aire atmosférico. Deben determinarse las temperaturas en los centros del cilindro y en la superficie superior.

Suposiciones **1** La conducción de calor en el cilindro corto es bidimensional y, por tanto, la temperatura varía tanto en la dirección x axial como en la r radial. **2** Las propiedades térmicas del cilindro y el coeficiente de transferencia de calor son constantes. **3** El número de Fourier es $\tau > 0.2$, de modo que pueden aplicarse las soluciones aproximadas de un término.

Propiedades Las propiedades del latón a la temperatura ambiente son $k = 110 \text{ W/m} \cdot ^\circ\text{C}$ y $\alpha = 33.9 \times 10^{-6} \text{ m}^2/\text{s}$ (tabla A-3). Se pueden obtener resultados más exactos usando las propiedades a la temperatura promedio.

Análisis *a)* Este cilindro corto se puede formar físicamente por la intersección de un cilindro largo de radio $r_o = 5$ cm y una pared plana de espesor $2L = 12$

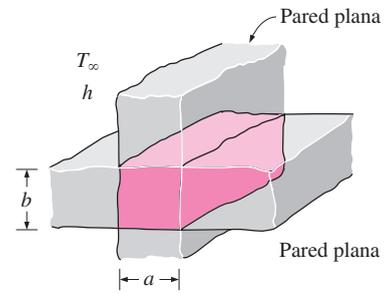


FIGURA 4-36

Una barra sólida larga de perfil rectangular $a \times b$ es la intersección de dos paredes planas de espesores a y b .

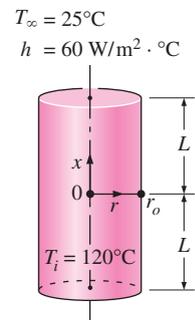


FIGURA 4-37

Esquema para el ejemplo 4-8.

cm, como se muestra en la figura 4-37. A partir de la figura 4-15a, se determina que la temperatura adimensional en el centro de la pared plana es

$$\left. \begin{aligned} \tau = \frac{\alpha t}{L^2} &= \frac{(3.39 \times 10^{-5} \text{ m}^2/\text{s})(900 \text{ s})}{(0.06 \text{ m})^2} = 8.48 \\ \frac{1}{\text{Bi}} = \frac{k}{hL} &= \frac{110 \text{ W/m} \cdot ^\circ\text{C}}{(60 \text{ W/m}^2 \cdot ^\circ\text{C})(0.06 \text{ m})} = 30.6 \end{aligned} \right\} \theta_{\text{pared}}(0, t) = \frac{T(0, t) - T_\infty}{T_i - T_\infty} = 0.8$$

De manera análoga, en el centro del cilindro, se tiene

$$\left. \begin{aligned} \tau = \frac{\alpha t}{r_o^2} &= \frac{(3.39 \times 10^{-5} \text{ m}^2/\text{s})(900 \text{ s})}{(0.05 \text{ m})^2} = 12.2 \\ \frac{1}{\text{Bi}} = \frac{k}{hr_o} &= \frac{110 \text{ W/m} \cdot ^\circ\text{C}}{(60 \text{ W/m}^2 \cdot ^\circ\text{C})(0.05 \text{ m})} = 36.7 \end{aligned} \right\} \theta_{\text{cil}}(0, t) = \frac{T(0, t) - T_\infty}{T_i - T_\infty} = 0.5$$

Por lo tanto,

$$\left(\frac{T(0, 0, t) - T_\infty}{T_i - T_\infty} \right)_{\text{cilindro corto}} = \theta_{\text{pared}}(0, t) \times \theta_{\text{cil}}(0, t) = 0.8 \times 0.5 = 0.4$$

y

$$T(0, 0, t) = T_\infty + 0.4(T_i - T_\infty) = 25 + 0.4(120 - 25) = \mathbf{63^\circ\text{C}}$$

Esta es la temperatura en el centro del cilindro corto, el cual también es el centro del cilindro largo y de la placa.

b) El centro de la superficie superior del cilindro todavía es el centro del cilindro largo ($r = 0$), pero en la superficie exterior de la pared plana ($x = L$). Por lo tanto, en primer lugar se necesita hallar la temperatura superficial de la pared. Dado que $x = L = 0.06 \text{ m}$,

$$\left. \begin{aligned} \frac{x}{L} &= \frac{0.06 \text{ m}}{0.06 \text{ m}} = 1 \\ \frac{1}{\text{Bi}} = \frac{k}{hL} &= \frac{110 \text{ W/m} \cdot ^\circ\text{C}}{(60 \text{ W/m}^2 \cdot ^\circ\text{C})(0.06 \text{ m})} = 30.6 \end{aligned} \right\} \frac{T(L, t) - T_\infty}{T_o - T_\infty} = 0.98$$

Entonces

$$\theta_{\text{pared}}(L, t) = \frac{T(L, t) - T_\infty}{T_i - T_\infty} = \left(\frac{T(L, t) - T_\infty}{T_o - T_\infty} \right) \left(\frac{T_o - T_\infty}{T_i - T_\infty} \right) = 0.98 \times 0.8 = 0.784$$

Por lo tanto,

$$\left(\frac{T(L, 0, t) - T_\infty}{T_i - T_\infty} \right)_{\text{cilindro corto}} = \theta_{\text{pared}}(L, t) \theta_{\text{cil}}(0, t) = 0.784 \times 0.5 = 0.392$$

y

$$T(L, 0, t) = T_\infty + 0.392(T_i - T_\infty) = 25 + 0.392(120 - 25) = \mathbf{62.2^\circ\text{C}}$$

que es la temperatura en el centro de la superficie superior del cilindro.

EJEMPLO 4-9 Transferencia de calor desde un cilindro corto

Determine la transferencia de calor total desde el cilindro corto de latón ($\rho = 8\,530 \text{ kg/m}^3$, $c_p = 0.380 \text{ kJ/kg} \cdot ^\circ\text{C}$) discutido en el ejemplo 4-8.

SOLUCIÓN En principio, se determina el calor máximo que se puede transferir desde el cilindro, el cual es el contenido de energía sensible de éste en relación con su medio ambiente:

$$m = \rho V = \rho \pi r_o^2 L = (8\,530 \text{ kg/m}^3) \pi (0.05 \text{ m})^2 (0.12 \text{ m}) = 8.04 \text{ kg}$$

$$Q_{\text{máx}} = mc_p(T_i - T_\infty) = (8.04 \text{ kg})(0.380 \text{ kJ/kg} \cdot ^\circ\text{C})(120 - 25)^\circ\text{C} = 290.02 \text{ kJ}$$

Enseguida, se determina la transferencia adimensional de calor para las dos configuraciones geométricas. Para la pared plana, de la figura 4-15c se determina que es

$$\left. \begin{aligned} \text{Bi} &= \frac{1}{1/\text{Bi}} = \frac{1}{30.6} = 0.0327 \\ \frac{h^2 \alpha t}{k^2} &= \text{Bi}^2 \tau = (0.0327)^2 (8.48) = 0.0091 \end{aligned} \right\} \left(\frac{Q}{Q_{\text{máx}}} \right)_{\text{pared plana}} = 0.23$$

De manera análoga, para el cilindro, se tiene

$$\left. \begin{aligned} \text{Bi} &= \frac{1}{1/\text{Bi}} = \frac{1}{36.7} = 0.0272 \\ \frac{h^2 \alpha t}{k^2} &= \text{Bi}^2 \tau = (0.0272)^2 (12.2) = 0.0090 \end{aligned} \right\} \left(\frac{Q}{Q_{\text{máx}}} \right)_{\text{cilindro infinito}} = 0.47$$

Entonces, por la ecuación 4-53, la razón de la transferencia de calor para el cilindro corto es

$$\begin{aligned} \left(\frac{Q}{Q_{\text{máx}}} \right)_{\text{cil corto}} &= \left(\frac{Q}{Q_{\text{máx}}} \right)_1 + \left(\frac{Q}{Q_{\text{máx}}} \right)_2 \left[1 - \left(\frac{Q}{Q_{\text{máx}}} \right)_1 \right] \\ &= 0.23 + 0.47(1 - 0.23) = 0.592 \end{aligned}$$

Por lo tanto, la transferencia de calor total desde el cilindro durante los primeros 15 min de enfriamiento es

$$Q = 0.592 Q_{\text{máx}} = 0.592 \times (290.2 \text{ kJ}) = \mathbf{172 \text{ kJ}}$$

EJEMPLO 4-10 Enfriamiento de un cilindro largo por agua

Un cilindro semiinfinito de aluminio de diámetro $D = 20 \text{ cm}$ está inicialmente a una temperatura uniforme $T_i = 200^\circ\text{C}$. Ahora se coloca el cilindro en agua a 15°C donde la transferencia de calor tiene lugar por convección, con un coeficiente de transferencia de calor de $h = 120 \text{ W/m}^2 \cdot ^\circ\text{C}$. Determine la temperatura en el centro del cilindro a 15 cm de la superficie de uno de sus extremos, 5 min después del inicio del enfriamiento.

SOLUCIÓN Un cilindro semiinfinito de aluminio se enfría por agua. Debe determinarse la temperatura en el centro del cilindro a 15 cm de la superficie del extremo.

Suposiciones 1 La conducción de calor en el cilindro semiinfinito es bidimensional y, por tanto, la temperatura varía tanto en la dirección x axial como en la r

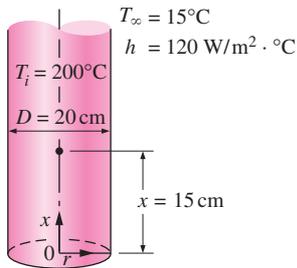


FIGURA 4-38

Esquema para el ejemplo 4-10.

radial. **2** Las propiedades térmicas del cilindro y el coeficiente de transferencia de calor son constantes. **3** El número de Fourier es $\tau > 0.2$, de modo que pueden aplicarse las soluciones aproximadas de un término.

Propiedades Las propiedades del aluminio a la temperatura ambiente son $k = 237 \text{ W/m} \cdot ^\circ\text{C}$ y $\alpha = 9.71 \times 10^{-6} \text{ m}^2/\text{s}$ (tabla A-3). Se pueden obtener resultados más exactos usando las propiedades a la temperatura promedio.

Análisis El cilindro semiinfinito se puede formar físicamente por la intersección de un cilindro infinito de radio $r_o = 10 \text{ cm}$ y un medio semiinfinito, como se muestra en la figura 4-38.

Se resuelve este problema por medio de la relación de un término para el cilindro y la solución analítica para el medio semiinfinito. En primer lugar, se considera el cilindro infinitamente largo y se evalúa el número de Biot:

$$\text{Bi} = \frac{hr_o}{k} = \frac{(120 \text{ W/m}^2 \cdot ^\circ\text{C})(0.1 \text{ m})}{237 \text{ W/m} \cdot ^\circ\text{C}} = 0.05$$

A partir de la tabla 4-2, se determina que los coeficientes λ_1 y A_1 para un cilindro, correspondientes a este Bi son $\lambda_1 = 0.3126$ y $A_1 = 1.0124$. En este caso, el número de Fourier es

$$\tau = \frac{\alpha t}{r_o^2} = \frac{(9.71 \times 10^{-6} \text{ m}^2/\text{s})(5 \times 60 \text{ s})}{(0.1 \text{ m})^2} = 2.91 > 0.2$$

y, por tanto, se puede aplicar la aproximación de un término. Al sustituir estos valores en la ecuación 4-27 da

$$\theta_0 = \theta_{\text{cil}}(0, t) = A_1 e^{-\lambda_1^2 \tau} = 1.0124 e^{-(0.3126)^2 (2.91)} = 0.762$$

La solución para el sólido semiinfinito se puede determinar a partir de

$$1 - \theta_{\text{semiinf}}(x, t) = \text{erfc} \left(\frac{x}{2\sqrt{\alpha t}} \right) - \exp \left(\frac{hx}{k} + \frac{h^2 \alpha t}{k^2} \right) \left[\text{erfc} \left(\frac{x}{2\sqrt{\alpha t}} + \frac{h\sqrt{\alpha t}}{k} \right) \right]$$

En primer lugar, se determinan las diversas cantidades entre paréntesis:

$$\eta = \frac{x}{2\sqrt{\alpha t}} = \frac{0.15 \text{ m}}{2\sqrt{(9.71 \times 10^{-6} \text{ m}^2/\text{s})(5 \times 60 \text{ s})}} = 0.44$$

$$\frac{h\sqrt{\alpha t}}{k} = \frac{(120 \text{ W/m}^2 \cdot ^\circ\text{C})\sqrt{(9.71 \times 10^{-6} \text{ m}^2/\text{s})(300 \text{ s})}}{237 \text{ W/m} \cdot ^\circ\text{C}} = 0.086$$

$$\frac{hx}{k} = \frac{(120 \text{ W/m}^2 \cdot ^\circ\text{C})(0.15 \text{ m})}{237 \text{ W/m} \cdot ^\circ\text{C}} = 0.0759$$

$$\frac{h^2 \alpha t}{k^2} = \left(\frac{h\sqrt{\alpha t}}{k} \right)^2 = (0.086)^2 = 0.0074$$

Al sustituir y evaluar las funciones complementarias de error, con base en la tabla 4-4,

$$\begin{aligned} \theta_{\text{semiinf}}(x, t) &= 1 - \text{erfc}(0.44) + \exp(0.0759 + 0.0074) \text{erfc}(0.44 + 0.086) \\ &= 1 - 0.5338 + \exp(0.0833) \times 0.457 \\ &= 0.963 \end{aligned}$$

Ahora se aplica la solución producto para obtener

$$\left(\frac{T(x, 0, t) - T_\infty}{T_i - T_\infty} \right)_{\substack{\text{cilindro} \\ \text{semiinfinito}}} = \theta_{\text{semiinf}}(x, t) \theta_{\text{cil}}(0, t) = 0.963 \times 0.762 = 0.734$$

y

$$T(x, 0, t) = T_\infty + 0.734(T_i - T_\infty) = 15 + 0.734(200 - 15) = 151^\circ\text{C}$$

la cual es la temperatura en el centro del cilindro a 15 cm de la superficie inferior expuesta.

EJEMPLO 4-11 Refrigeración de bisteces evitando al mismo tiempo la quemadura por el frío

En una planta de procesamiento de carne se deben enfriar bisteces de 1 in de grueso, que están inicialmente a 75°F, en las rejillas de un refrigerador grande que se mantiene a 5°F (figura 4-39). Los bisteces se colocan cercanos entre sí, de modo que la transferencia de calor desde los bordes de 1 in de espesor es despreciable. El bistec completo se debe enfriar por debajo de 45°F, pero su temperatura no debe caer por debajo de 35°F en cualquier punto durante la refrigeración para evitar la “quemadura por el frío”. El coeficiente de transferencia de calor por convección y, por tanto, la razón de la transferencia de calor desde el bistec se puede controlar al variar la velocidad de un ventilador que hace circular el aire en el interior. Determine el coeficiente de transferencia de calor h que permitirá satisfacer las dos restricciones con respecto a la temperatura, manteniendo a la vez el tiempo de refrigeración en un mínimo. El bistec se puede tratar como una capa homogénea que tiene las propiedades $\rho = 74.9 \text{ lbm/ft}^3$, $C_p = 0.98 \text{ Btu/lbm} \cdot ^\circ\text{F}$, $k = 0.26 \text{ Btu/h} \cdot \text{ft} \cdot ^\circ\text{F}$ y $\alpha = 0.0035 \text{ ft}^2/\text{h}$.

SOLUCIÓN Se deben enfriar bisteces en un refrigerador que se mantiene a 5°F. Debe determinarse el coeficiente de transferencia de calor por convección que permite el enfriamiento de los bisteces por debajo de 45°F, evitando al mismo tiempo la quemadura por el frío.

Suposiciones **1** La conducción de calor a través de los bisteces es unidimensional, ya que éstos forman una capa grande en relación con su espesor y se tiene simetría térmica con respecto al plano central. **2** Las propiedades térmicas de los trozos de bistec y el coeficiente de transferencia de calor son constantes. **3** El número de Fourier es $\tau > 0.2$, de modo que pueden aplicarse las soluciones aproximadas de un término.

Propiedades Las propiedades de los bisteces se dan en el enunciado del problema.

Análisis En un instante dado se tendrá la temperatura más baja en las superficies del bistec y la más alta en el centro, ya que la parte interior será el último lugar en enfriarse. En el caso límite, la temperatura superficial en $x = L = 0.5 \text{ in}$ a partir del centro será de 35°F, en tanto que la del plano central es de 45°F en un medio ambiente a 5°F. Entonces, de la figura 4-15b, se obtiene

$$\left. \begin{aligned} \frac{x}{L} &= \frac{0.5 \text{ in}}{0.5 \text{ in}} = 1 \\ \frac{T(L, t) - T_\infty}{T_o - T_\infty} &= \frac{35 - 5}{45 - 5} = 0.75 \end{aligned} \right\} \frac{1}{\text{Bi}} = \frac{k}{hL} = 1.5$$

lo cual da

$$h = \frac{1}{1.5} \frac{k}{L} = \frac{0.26 \text{ Btu/h} \cdot \text{ft} \cdot ^\circ\text{F}}{1.5(0.5/12 \text{ ft})} = 4.16 \text{ Btu/h} \cdot \text{ft}^2 \cdot ^\circ\text{F}$$

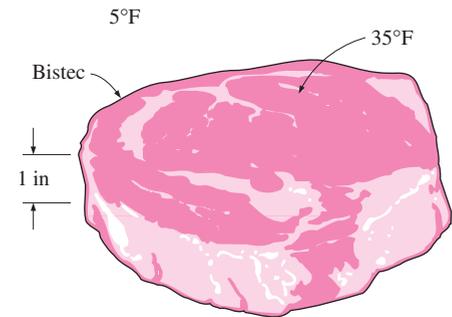


FIGURA 4-39
Esquema para el ejemplo 4-11.

Discusión Con el fin de satisfacer las restricciones sobre la temperatura del bistec durante la refrigeración, el coeficiente de transferencia de calor por convección debe mantenerse por debajo de este valor. También se pueden satisfacer las restricciones por medio de un coeficiente de transferencia de calor más bajo, pero al hacerlo se extendería el tiempo de refrigeración de manera innecesaria.

Se pueden pasar por alto las restricciones inherentes al uso de los diagramas de Heisler y las soluciones de un término (o cualesquiera otras soluciones analíticas) al aplicar los métodos numéricos que se discuten en el capítulo 5.

TEMA DE INTERÉS ESPECIAL *

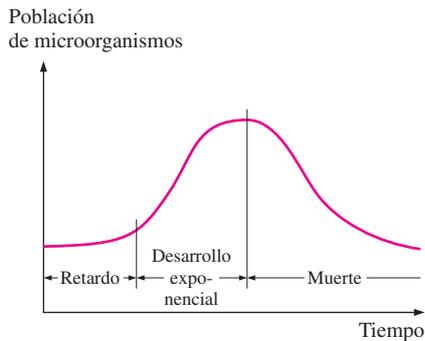


FIGURA 4-40
Curva típica de desarrollo de los microorganismos.

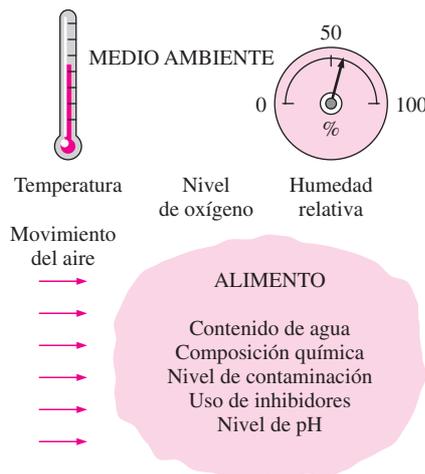


FIGURA 4-41
Factores que afectan la velocidad de desarrollo de los microorganismos.

Refrigeración y congelación de alimentos

Control de los microorganismos en los alimentos

Los **microorganismos** como las *bacterias*, las *levaduras*, los *mohos* y los *virus* se encuentran en el aire, el agua, el suelo, los organismos vivos y los productos alimenticios no procesados, y causan *sabores y olores fuera de lo común*, *producción de baba*, *cambios* en la textura y el aspecto y, al final, *corrupción* de los alimentos. El mantenimiento de los alimentos perecederos a temperaturas cálidas es la causa principal de su corrupción y la prevención de ésta y de la degradación prematura de la calidad debida a los microorganismos es el área más grande de aplicación de la refrigeración. El primer paso en el control de los microorganismos es entender qué son y los factores que influyen en su transmisión, desarrollo y destrucción.

De las diversas clases de microorganismos, las *bacterias* constituyen la causa principal de la corrupción de los alimentos, en especial los húmedos. Los alimentos secos y ácidos crean un medio ambiente indeseable para el desarrollo de las bacterias, pero no para el de las levaduras y los mohos. Los *mohos* también se encuentran sobre las superficies húmedas, el queso y los alimentos corruptos. En ciertos animales y humanos se encuentran *virus* específicos y las malas prácticas sanitarias, como la de mantener los alimentos procesados en la misma área que los no cocinados, y no tener el cuidado de lavarse las manos, pueden causar la contaminación de los productos alimenticios.

Cuando ocurre la *contaminación*, los microorganismos empiezan a adaptarse a las nuevas condiciones ambientales. Este periodo inicial lento y sin desarrollo se llama **fase de retardo** y la vida en anaquel de un producto alimenticio es directamente proporcional a la duración de esta fase (figura 4-40). Al periodo de adaptación le sigue uno de *desarrollo exponencial* durante el cual la población de microorganismos puede duplicarse dos o más veces cada hora, en condiciones favorables, a menos que se tomen medidas sanitarias drásticas. El agotamiento de los nutrientes y la acumulación de toxinas desaceleran el desarrollo e inician el periodo de *muerte*.

La *velocidad de desarrollo* de los microorganismos en un artículo alimenticio depende tanto de las características del propio alimento como de la estructura química, el nivel de pH, la presencia de inhibidores y microorganismos competidores, del contenido de agua así como de las condiciones ambientales, como la temperatura y la humedad relativa del medio ambiente y el movimiento del aire (figura 4-41).

Los microorganismos necesitan *alimento* para crecer y multiplicarse y sus necesidades de nutrición son satisfechas con facilidad por los carbohidratos,

*Esta sección se puede pasar por alto sin pérdida de continuidad.

las proteínas, los minerales y las vitaminas de un alimento. Diferentes tipos de microorganismos tienen necesidades diferentes de nutrición y los tipos de nutrientes de un alimento determinan los tipos de microorganismos que se pueden alojar en ellos. Los preservativos agregados al alimento también pueden inhibir el desarrollo de ciertos microorganismos. Las clases diferentes de microorganismos que existen compiten por la misma fuente de alimentos y, por consiguiente, la composición de los microorganismos que existen en un alimento en cualquier instante depende de la *composición inicial* de ellos.

Todos los organismos vivos necesitan *agua* para crecer y los microorganismos no pueden crecer en los alimentos que no están suficientemente húmedos. El desarrollo microbiológico en los alimentos refrigerados como las frutas frescas, los vegetales y las carnes se inicia en las *superficies expuestas*, donde es más probable que ocurra la contaminación. La carne fresca en un paquete que se deja en una habitación se estropeará con rapidez, como es probable que el lector haya advertido. Por otra parte, un canal de carne colgado en un medio ambiente controlado envejecerá sanamente como resultado de la *deshidratación* en la superficie exterior, lo cual inhibe el desarrollo microbiológico allí y protege el canal.

El desarrollo de los microorganismos en un artículo alimenticio está regido por los efectos combinados de las *características del alimento* y los *factores ambientales*. No se puede hacer mucho con respecto a las características del alimento, pero con toda certeza se pueden alterar las condiciones ambientales para llevarlas hacia niveles más deseables a través de la *calefacción*, el *enfriamiento*, la *ventilación*, la *humidificación*, la *deshumidificación* y el control de los niveles de *oxígeno*. La velocidad de desarrollo de los microorganismos en los alimentos depende principalmente de la temperatura, y el control de ésta es el mecanismo más eficaz para controlar esa velocidad.

El mejor desarrollo de los microorganismos ocurre a las temperaturas “cálidas”, por lo común entre 20 y 60°C. La rapidez de desarrollo *declina* a las temperaturas altas y ocurre la *muerte* a temperaturas todavía más elevadas, por lo general arriba de 70°C para la mayor parte de los microorganismos. El *enfriamiento* es una manera eficaz y práctica de reducir la velocidad de desarrollo de los microorganismos y, de este modo, la extensión de la *vida en anaquel* de los alimentos perecederos. Una temperatura de refrigeración de 4°C o inferior se considera segura. A veces, un pequeño incremento en la temperatura de refrigeración puede causar un aumento grande en la velocidad de desarrollo y, por tanto, una disminución considerable de la vida en anaquel del alimento (figura 4-42). Por ejemplo, la velocidad de desarrollo de algunos microorganismos se duplica por cada 3°C de aumento en la temperatura.

Otro factor que afecta el desarrollo y la transmisión microbiológicos es la *humedad relativa* del medio ambiente, que es una medida del contenido de agua del aire. En los *cuartos fríos* debe evitarse la alta humedad relativa, ya que la condensación que se forma sobre las paredes y el techo crea el medio ambiente apropiado para el *desarrollo y acumulación de mohos*. El goteo del condensado contaminado sobre los productos alimenticios en el cuarto representa un riesgo potencial para la salud.

Los diferentes microorganismos reaccionan de manera distinta a la presencia de oxígeno. Algunos microorganismos, como los mohos, requieren oxígeno para desarrollarse, en tanto que algunos no pueden desarrollarse en presencia del mismo. Algunos tienen su mejor desarrollo en ambientes con poco oxígeno, en tanto que otros se desarrollan sin importar la cantidad de éste. Por lo tanto, se puede controlar el desarrollo de ciertos microorganismos mediante el control de la *cantidad de oxígeno* en el medio ambiente. Por ejemplo, el empaque al vacío inhibe el desarrollo de los microorganismos que requieren oxígeno.

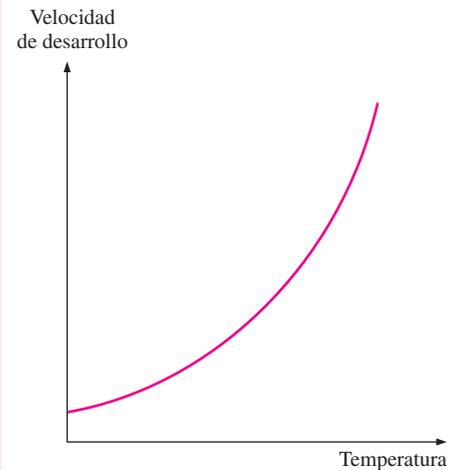


FIGURA 4-42

La velocidad de desarrollo de los microorganismos en un producto alimenticio aumenta en forma exponencial con el aumento de la temperatura ambiental.

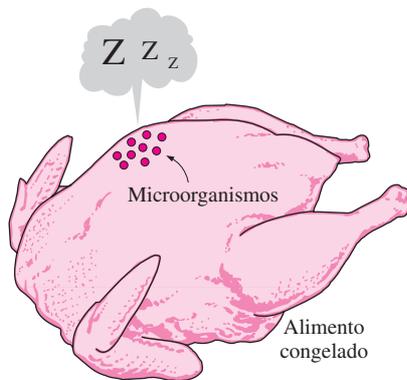


FIGURA 4-43

La congelación puede detener el desarrollo de los microorganismos, pero no los mataría.

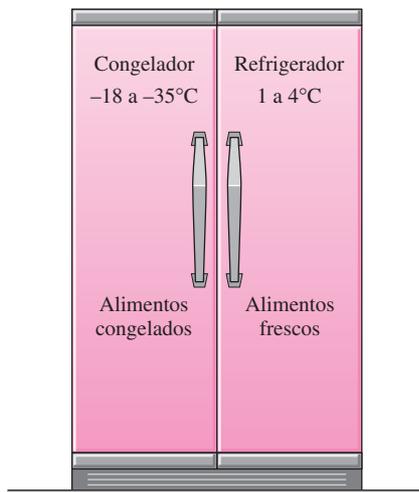


FIGURA 4-44

Temperaturas de refrigeración y de congelación recomendadas para la mayor parte de los alimentos perecederos.

no. También se puede extender la vida en almacenamiento de algunas frutas reduciendo el nivel de oxígeno en el cuarto en el que se almacenen.

Los microorganismos en los productos alimenticios se pueden controlar 1) *impidiendo* la contaminación al seguir prácticas sanitarias estrictas, 2) *inhibiendo* el desarrollo al alterar las condiciones ambientales y 3) *destruyendo* los organismos por tratamiento con calor o mediante productos químicos. La mejor manera de minimizar la contaminación en las áreas de procesamiento de alimentos es usar filtros finos de aire en los sistemas de ventilación para capturar las *partículas de polvo* que transportan las bacterias en el aire. Por supuesto, los filtros deben permanecer secos, ya que en los húmedos se pueden desarrollar microorganismos. Asimismo, el sistema de ventilación debe mantener una presión positiva en las áreas de procesamiento de los alimentos para impedir que se introduzcan por infiltración contaminantes transportados por el aire. La eliminación de la *condensación* sobre las paredes y el techo de la instalación y la desviación de las bandejas de goteo de la condensación en las *tuberías* de los refrigeradores hacia el sistema de drenaje son otras dos medidas preventivas contra la contaminación. Los sistemas de goteo deben limpiarse con regularidad para impedir el desarrollo microbiológico en ellos. También debe minimizarse todo *contacto* entre los productos alimenticios crudos y los cocinados, y estos últimos deben almacenarse en cuartos con presiones positivas. Los alimentos congelados deben mantenerse a -18°C o menos y se debe tener sumo cuidado cuando se empacan los productos alimenticios después de ser congelados, con el fin de evitar la contaminación durante el empaque.

El desarrollo de los microorganismos se controla de la mejor manera manteniendo la *temperatura* y la *humedad relativa* del medio ambiente en el rango deseable. Por ejemplo, mantener la humedad relativa por debajo de 60% impide el desarrollo de todos los microorganismos sobre las superficies. Los microorganismos se pueden destruir *calentando* el producto alimenticio hasta temperaturas elevadas (por lo común, arriba de 70°C), tratándolos con *productos químicos* o exponiéndolos a la *luz ultravioleta* o a la radiación solar.

Se debe establecer una distinción entre *supervivencia* y *desarrollo* de los microorganismos. Un microorganismo particular que puede no desarrollarse a cierta temperatura baja puede ser capaz de sobrevivir en ella durante mucho tiempo (figura 4-43). Por lo tanto, la congelación no es una manera eficaz de matar los microorganismos. De hecho, algunos cultivos de microorganismos se conservan congelándolos a temperaturas muy bajas. La *velocidad de la congelación* también es una consideración importante en la refrigeración de alimentos, ya que algunos microorganismos se adaptan a las bajas temperaturas y se desarrollan en ellas cuando el enfriamiento es muy lento.

Refrigeración y congelación de los alimentos

La *vida en almacenamiento* de los alimentos frescos perecederos, como las carnes, el pescado, los vegetales y las frutas se puede extender durante varios días almacenándolos a temperaturas escasamente arriba de la de congelación, por lo común entre 1 y 4°C . La vida en almacenamiento de los alimentos se puede extender durante varios meses congelándolos y almacenándolos a temperaturas por debajo de la de congelación, por lo común entre -18 y -35°C , dependiendo del alimento en particular (figura 4-44).

La refrigeración *retarda* los procesos químicos y biológicos en los alimentos y el deterioro y pérdida de calidad y de nutrientes que los acompañan. El maíz dulce, por ejemplo, puede perder la mitad de su contenido inicial de azúcar en un día a 21°C , pero sólo 5% de él a 0°C . El espárrago fresco puede perder 50% de su contenido de vitamina C en un día a 20°C , pero se hará en 12 días a 0°C . La refrigeración también extiende la vida en anaquel de los pro-

ductos. Por ejemplo, se puede retrasar en tres o más días la primera aparición del feo color amarillento del brócoli mediante la refrigeración.

Los primeros intentos de congelar los artículos alimenticios condujeron a productos de mala calidad debido a los grandes cristales de hielo que se formaron. Se determinó que la *velocidad de la congelación* tiene un efecto importante sobre el tamaño de los cristales de hielo y, por ende, en la calidad, textura y las propiedades nutritivas y sensoriales de muchos alimentos. Durante la *congelación lenta*, los cristales de hielo pueden llegar hasta un tamaño grande, en tanto que durante la *congelación rápida*, un gran número de cristales de hielo se empiezan a formar a la vez y tienen un tamaño mucho más pequeño. Los cristales grandes de hielo no son deseables ya que pueden *perforar* las paredes de las células, causando una degradación de la textura y una pérdida de los jugos naturales durante la descongelación. Se forma una *corteza* con rapidez sobre la capa exterior del producto y sella los jugos, los aromas y los agentes que dan el sabor. La calidad del producto también resulta afectada de manera adversa por las fluctuaciones en la temperatura del cuarto de almacenamiento.

La refrigeración común de alimentos comprende sólo el *enfriamiento* sin cambio de fase. Por otra parte, la *congelación* de los alimentos comprende tres etapas: el *enfriamiento* hasta el punto de congelación (eliminación del calor sensible), la *congelación* (eliminación del calor latente) y *enfriamiento adicional* hasta la temperatura deseada debajo de la de congelación (eliminación del calor sensible del alimento congelado), como se muestra en la figura 4-45.

Productos de carne de res

Las reses abiertas en canal en los mataderos deben enfriarse *tan rápido como sea posible* hasta una temperatura de más o menos 1.7°C , con el fin de reducir la velocidad de desarrollo de los microorganismos que pueden estar presentes sobre las superficies de esos canales y, de este modo, minimizar la corrupción. Deben seleccionarse los niveles correctos de *temperatura, humedad y movimiento del aire* para impedir el encogimiento, el endurecimiento y la decoloración excesivos.

La temperatura profunda del cuerpo de un animal es de alrededor de 39°C , pero tiende a elevarse un par de grados en las secciones de en medio, después de la matanza, como resultado del *calor generado* durante las reacciones biológicas que ocurren en las células. Por otra parte, la temperatura de las superficies expuestas tiende a caer como resultado de las pérdidas de calor. La parte más gruesa del canal es el *cuarto trasero* y el centro de éste es el último lugar en enfriarse durante el proceso de refrigeración. Por lo tanto, se puede monitorear de la mejor manera el enfriamiento del canal introduciendo un termómetro profundamente en la parte central del cuarto trasero.

Alrededor de 70% del canal de carne de res es agua y se enfría en su mayor parte por *enfriamiento evaporativo* como resultado de la expulsión de la humedad hacia las superficies donde ocurre la evaporación. Pero este encogimiento se traduce en una pérdida de masa comerciable que puede equivaler a 2% de la masa total, durante un enfriamiento a lo largo de una noche. Para impedir una pérdida *excesiva* de masa, los canales suelen lavarse o rociarse con agua antes del enfriamiento. Con el cuidado adecuado, el enfriamiento con rocío puede eliminar el encogimiento del canal casi por completo.

La masa total promedio de la carne preparada, que normalmente se divide en dos, es de alrededor de 300 kg y el calor específico promedio del canal es de más o menos $3.14 \text{ kJ/kg} \cdot ^{\circ}\text{C}$ (tabla 4-6). El *cuarto de enfriamiento* debe tener una capacidad igual a la de la matanza diaria del rastro, la cual puede ser de varios cientos. Un canal de carne de res se lava antes de que entre en el

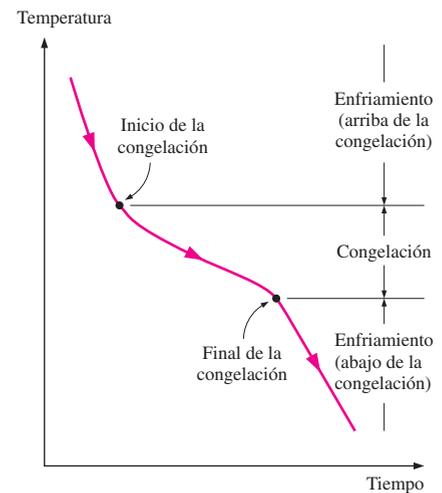


FIGURA 4-45

Curva de congelación típica de un producto alimenticio.

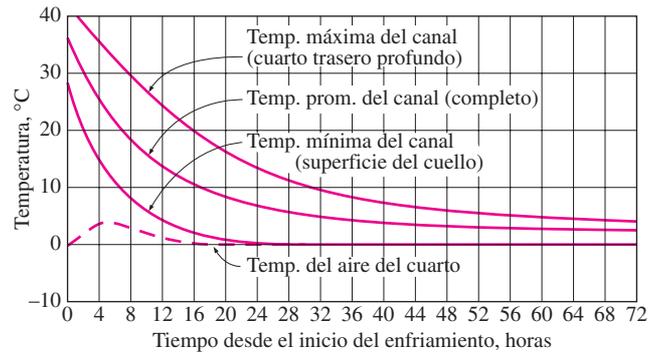
TABLA 4-6

Propiedades térmicas de la carne de res

Cantidad	Valor típico
Densidad promedio	1 070 kg/m ³
Calor específico	
Arriba de la congelación	3.14 kJ/kg · °C
Abajo de la congelación	1.70 kJ/kg · °C
Punto de congelación	-2.7°C
Calor latente de fusión	249 kJ/kg
Conductividad térmica	0.41 W/m · °C (a 6°C)

FIGURA 4-46

Curva típica de enfriamiento de una res abierta en canal en los cuartos de enfriamiento y conservación a una temperatura promedio de 0°C (tomado de ASHRAE, *Handbook: Refrigeration*, Ref. 3, Cap. 11, Fig. 2).



cuarto de enfriamiento y absorbe una gran cantidad de agua (alrededor de 3.6 kg) en su superficie durante el proceso de lavado. Sin embargo, esto no representa una ganancia neta de masa, ya que se pierde por goteo o evaporación en el cuarto de enfriamiento durante el proceso. Idealmente, el canal no gana ni pierde peso neto a medida que se enfría en dicho cuarto. Sin embargo, en realidad pierde alrededor de 0.5% de la masa total en el *cuarto de conservación*, a medida que sigue enfriándose. La pérdida real de producto se determina al pesar en primer lugar el canal seco, antes del lavado y, a continuación, se pesa una vez más después de que se enfría.

La temperatura del aire refrigerado en el cuarto de enfriamiento de los canales de res debe ser suficientemente alta para evitar la *congelación* y la *decoloración* en las superficies exteriores del canal. Lo anterior requiere un largo tiempo de residencia en dicho cuarto para que los grandes canales logren enfriarse hasta la temperatura deseada. Los canales de res sólo se enfrían en forma parcial luego de una permanencia de una noche en el cuarto de enfriamiento. La temperatura de un canal cae de 1.7 a 7°C, en la superficie, y hasta más o menos 15°C en las partes de en medio del cuarto trasero, en 10 h. Se requiere de otro día o dos en el *cuarto de conservación*, mantenido a una temperatura entre 1 y 2°C, para completar el *enfriamiento* y la *igualación de la temperatura*. Pero los canales de cerdo se enfrían por completo durante ese periodo porque su tamaño es menor. La *circulación del aire* en el cuarto de conservación se mantiene en niveles mínimos con el fin de evitar la pérdida excesiva de humedad y la decoloración. La carga de refrigeración en el cuarto de conservación es mucho menor que en el de enfriamiento y, como consecuencia, requiere un sistema más pequeño de refrigeración.

Los canales dirigidos a mercados distantes se embarcan al día siguiente de la matanza en camiones refrigerados, donde se realiza el resto del enfriamiento. Esta práctica hace posible entregar carne fresca a tiempo a largas distancias.

En la figura 4-46 se muestra la variación en la temperatura del canal de res durante el enfriamiento. Inicialmente, el proceso de enfriamiento es dominado por la transferencia de calor *sensible*. Note que la temperatura promedio del canal se reduce en alrededor de 28°C (de 36 a 8°C) en 20 h. La velocidad de enfriamiento del canal podría aumentarse al *bajar* la temperatura del aire refrigerado y *aumentar* la velocidad del aire, pero ese tipo de medidas también aumenta el riesgo de *congelación superficial*.

La mayor parte de las carnes se juzgan en relación con su **suavidad** y la conservación de ésta es una consideración importante en la refrigeración y congelamiento. La carne consta principalmente de haces de diminutas *fibras musculares* hacinadas en el interior de largas hileras de *tejidos conjuntivos* que las mantienen juntas. La suavidad de cierto corte de carne de res depende de su ubicación, la edad y la actividad del animal. Los cortes tomados de la sec-

ción relativamente inactiva de la espina dorsal del animal, como el lomo, el filete y las costillas de primera calidad son más suaves que las partes activas, como las piernas y el cuello (figura 4-47). Entre más activo sea el animal, habrá mayor cantidad de tejido conjuntivo y más dura será la carne. Sin embargo, la carne de un animal viejo tiene más sabor y se prefiere para el estofado, ya que la dureza de la carne no plantea un problema para la cocción con calor húmedo, como sucede al hervir. El *colágeno* proteínico, que constituye el componente principal del tejido conjuntivo, se ablanda y disuelve en medios ambientes calientes y húmedos y, de manera gradual, se transforma en *gelatina* y ablanda la carne.

El viejo dicho “se debe cocinar un animal inmediatamente después del sacrificio o esperar por lo menos dos días” tiene mucho de verdad. Las reacciones biomecánicas en el músculo continúan después del sacrificio hasta que disminuye la energía suministrada al mismo para realizar trabajo. El músculo entonces se pone rígido y se presenta el *rigor mortis*. Este proceso empieza varias horas después de que se sacrificó el animal y dura de 12 a 36 h más, hasta que entran en acción las enzimas y se suaviza el tejido conjuntivo, como se muestra en la figura 4-48. Transcurren alrededor de siete días para completar la suavización de manera natural en las instalaciones de almacenamiento mantenidas a 2°C. La estimulación eléctrica también hace que la carne se suavice. Para evitar la dureza, la carne fresca no debe congelarse antes de que haya pasado el *rigor mortis*.

Es probable que el lector haya advertido que los bisteces están suaves y son más sabrosos cuando están calientes, pero se endurecen a medida que se enfrían. Esto se debe a que la gelatina que se formó durante la cocción se espesa conforme se enfría y la carne pierde su suavidad. De modo que no debe sorprender que los restaurantes de primera clase sirvan su bistec sobre placas gruesas calientes que lo mantienen a alta temperatura durante un tiempo prolongado. Asimismo, el cocimiento *ablanda* el tejido conjuntivo pero *endurece* las fibras del músculo. Por lo tanto, asar con *bajo calor* durante un tiempo prolongado da por resultado un bistec duro.

Las carnes de diversas variedades que se pretende almacenar durante un tiempo prolongado deben congelarse con rapidez con el fin de reducir la corrupción y conservar la calidad. Quizá el primer pensamiento que viene a la mente para congelar un paquete de carne es colocarlo en el *congelador* y esperar. Pero, en este caso, el tiempo de congelación es *demasiado largo*, en especial para cajas grandes. Por ejemplo, la temperatura en el centro de una caja de 4 cm de profundidad que contiene 32 kg de diversas carnes puede ser tan elevada como 16°C después de 24 h de haberla colocado en un congelador a -30°C. Se puede acortar considerablemente el tiempo de congelación de las cajas grandes poniendo algo de *hielo seco* dentro de ellas.

Un método más eficaz de congelación, llamada *enfriamiento rápido*, comprende el uso de temperaturas más bajas del aire, -40 a -30°C, con velocidades más altas de 2.5 m/s hasta 5 m/s sobre el producto (figura 4-49). La temperatura interior debe bajarse hasta -4°C, para los productos que se van a transferir a un congelador de almacenamiento, y hasta -18°C para aquellos que se van a embarcar de inmediato. La *velocidad de congelación* depende del *material de empaque* y de sus propiedades aislantes, del *espesor* de las cajas más grandes, del *tipo* de carne y de la *capacidad* del sistema de refrigeración. Note que la temperatura del aire se elevará de manera excesiva durante las etapas iniciales de la congelación y aumentará el tiempo para realizarla si la capacidad del sistema es inadecuada. Un sistema más pequeño de refrigeración resultará óptimo si se va a usar hielo seco en los paquetes. El encogimiento durante la congelación varía entre 0.5 y 1% aproximadamente.

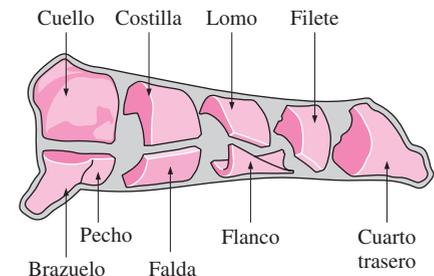


FIGURA 4-47

Diversos cortes de la carne de res (tomado de National Livestock and Meat Board).

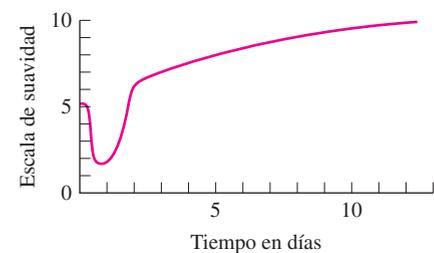


FIGURA 4-48

Variación de la suavidad de la carne almacenada a 2°C con el tiempo después de la matanza.

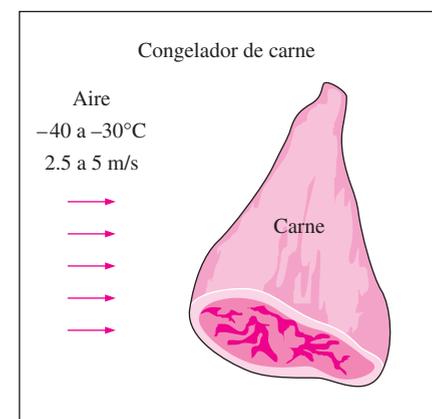


FIGURA 4-49

El tiempo de congelación de la carne se puede reducir de manera considerable mediante aire a baja temperatura y alta velocidad.

TABLA 4-7

Vida en almacenamiento de productos congelados de carne a diferentes temperaturas de almacenamiento (tomado de ASHRAE *Handbook: Refrigeration*, Cap. 10, tabla 7)

Producto	Vida en almacenamiento, meses		
	Temperatura		
	-12°C	-18°C	-23°C
Carne de res	4-12	6-18	12-24
Cordero	3-8	6-16	12-18
Ternera	3-4	4-14	8
Puerco	2-6	4-12	8-15
Carne de res en rebanadas	3-4	4-6	8
Alimentos cocidos	2-3	2-4	

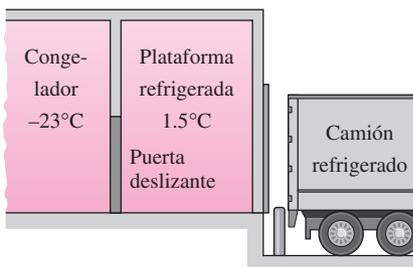


FIGURA 4-50

Una plataforma refrigerada para cargar artículos congelados a un camión refrigerado.

Aun cuando el punto promedio de congelación de la carne magra se puede tomar como -2°C , con un calor latente de 249 kJ/kg, debe recordarse que la congelación ocurre sobre un *rango de temperatura*, presentándose la mayor parte de ella entre -1 y -4°C . Por lo tanto, enfriar la carne dentro de este rango de temperatura y eliminar el calor latente consume la mayor parte del tiempo durante la congelación.

La carne se puede conservar a una temperatura interna de -2 a -1°C , para uso local y almacenamiento *durante una semana*. La carne debe congelarse y almacenarse a temperaturas mucho más bajas para *almacenamiento de largo plazo*. Entre más baja sea la temperatura de almacenamiento, más larga será la vida en almacén de los productos de carne, como se muestra en la tabla 4-7.

La *temperatura interna* de los canales que entran en las secciones de enfriamiento varía desde 38 hasta 41°C , para los cerdos, y desde 37 hasta 39°C , para los corderos y becerros. Transcurren alrededor de 15 h para enfriar los cerdos y becerros hasta la temperatura recomendada de 3 a 4°C . La temperatura del cuarto de enfriamiento se mantiene desde -1 hasta 0°C y la diferencia de temperatura entre el refrigerante y el aire de enfriamiento se conserva en alrededor de 6°C . El aire se hace circular con una velocidad de más o menos 7 a 12 cambios por hora. Los *canales de cordero* se enfrían hasta una temperatura de 1 a 2°C , lo cual requiere alrededor de 12 a 14 h, y se mantienen a esa temperatura con un 85 a 90% de humedad relativa hasta que se embarcan o procesan. La velocidad recomendada de la circulación de aire es de 50 a 60 cambios por hora durante las primeras 4 a 6 h, la cual se reduce posteriormente hasta 10 a 12 cambios por hora.

La *congelación* no parece afectar mucho el sabor de la carne, pero sí la *calidad* de varias maneras. La *velocidad* y la *temperatura* de congelación pueden influir en el color, la suavidad y el goteo. La congelación rápida aumenta la suavidad y reduce el daño a los tejidos y la cantidad de goteo posterior a la descongelación. El almacenamiento a bajas temperaturas de congelación causa cambios significativos en la *grasa animal*. El puerco congelado experimenta más cambios indeseables durante el almacenamiento debido a su estructura grasosa y, como consecuencia, su periodo aceptable de almacenamiento es más corto que el de la res, la ternera o el cordero.

Las instalaciones de almacenamiento de carne suelen tener una *plataforma de embarque refrigerada* donde se forman y embarcan los pedidos. Esas plataformas evitan que el valioso espacio de almacenamiento sea usado para fines de embarque y suministran un medio ambiente de trabajo más aceptable para los empleados. Las plantas de empaque en las que se embarcan canales completos o medios canales en grandes cantidades puede ser que no necesiten una plataforma de embarque; para esos casos, a menudo resulta adecuada una puerta para salida de la carga.

Una *plataforma de carga refrigerada*, como la que se muestra en la figura 4-50, reduce la *carga de refrigeración* de los congeladores o enfriadores e impide las *fluctuaciones en la temperatura* en el área de almacenamiento. Con frecuencia resulta adecuado mantener las plataformas de embarque a una temperatura de entre 4 a 7°C , para los enfriadores, y más o menos 1.5°C para los congeladores. El punto de rocío del aire de la plataforma debe estar por debajo de la temperatura del producto para evitar la condensación sobre la superficie de los productos y la pérdida de calidad. La velocidad del *flujo de aire* a través de las puertas de carga y otras aberturas es proporcional a la *raíz cuadrada* de la diferencia de temperatura y, por tanto, la reducción a la mitad de esta diferencia en la abertura, conservando la plataforma de carga a la temperatura promedio, reduce la velocidad del flujo de aire hacia ella y, de este modo, hacia el congelador en $1 - \sqrt{0.5} \cong 0.3$, o sea, 30%. Asimismo, el aire

que fluye hacia el congelador ya está enfriado hasta alrededor de 1.5°C por la unidad de refrigeración de la plataforma, lo cual representa más o menos 50% de la carga de enfriamiento del aire entrante. Como consecuencia, el efecto neto de la plataforma de embarque refrigerada es una reducción de la *carga por infiltración* del congelador en alrededor de 65%, puesto que $1 - 0.7 \times 0.5 = 0.65$. La ganancia neta es igual a la diferencia entre la reducción de la carga por infiltración del congelador y la carga de refrigeración de la plataforma de embarque. Note que los refrigeradores de la plataforma operan a temperaturas mucho más altas (1.5°C , en lugar de alrededor de -23°C), por lo tanto, consumen mucho menos potencia para la misma cantidad de enfriamiento.

Productos de aves de corral

Los productos de aves de corral se pueden conservar por *enfriamiento con hielo* hasta una temperatura de 1 a 2°C , o *enfriamiento profundo* hasta alrededor de -2°C , para almacenamientos de corta duración, o bien, *congelándolos* hasta -18°C , o por debajo de esta temperatura, para almacenamiento a largo plazo. Las plantas de procesamiento de aves de corral están por completo *automatizadas* y el tamaño pequeño de las aves hace factible la operación mediante una línea continua con transportador.

En primer lugar, con corriente eléctrica se hace perder el sentido a las aves, antes de cortarlas, para evitar la lucha. Después de 90 a 120 s de tiempo de sangrado, se *escaldan* sumergiéndolas en un tanque con agua caliente, por lo común entre 51 y 55°C , hasta por 120 s, para aflojar las plumas, enseguida se quitan por medio de máquinas que las arrancan y el ave sin vísceras se *lava* por completo antes de enfriarla. La temperatura interna de las aves varía de 24 a 35°C después del lavado, dependiendo de las temperaturas del aire ambiente y del agua de lavado, así como de la duración de éste.

Para controlar el desarrollo microbiano, las reglamentaciones de la USDA requieren que el ave se enfríe hasta 4°C o menos, en menos de 4 h, para las que poseen menos de 1.8 kg; en menos de 6 h, para las de 1.8 a 3.6 kg; y en menos de 8 h, para aquellas de más de 3.6 kg. En la actualidad no es difícil cumplir con estos requisitos, ya que el lento *enfriamiento por aire* ha sido reemplazado en gran parte por el rápido *enfriamiento por inmersión*, en tanques de hielo semiderretido. El enfriamiento por inmersión tiene el beneficio adicional de que no sólo previene la deshidratación sino que causa una *absorción neta de agua* y, por consiguiente, aumenta la masa del producto comerciable. El enfriamiento por aire de las aves no empacadas puede causar una pérdida de humedad de 4 a 15% (figura 4-51). El enfriamiento con rocío de agua puede causar una absorción de humedad de hasta 4%. La mayor parte del agua absorbida se mantiene entre la carne y la piel, y los tejidos conjuntivos de ésta. En el enfriamiento por inmersión se pierden algunos sólidos solubles del ave, que se van al agua, pero la pérdida no tiene efecto significativo sobre el sabor.

En la actualidad muchos de los enfriadores en los que se emplea un tanque de hielo semiderretido han sido reemplazados por enfriadores por inmersión en hielo semiderretido del tipo de flujo *continuo*. Este tipo de enfriadores pueden reducir la temperatura interna del ave de 32 hasta 4°C en alrededor de 30 minutos, a razón de hasta 10 000 aves por hora. Las necesidades de hielo dependen de las temperaturas de entrada y de salida del canal y del agua, pero suele ser adecuado 0.25 kg de hielo por kg de canal. Sin embargo, la *contaminación bacteriana*, como la salmonela, es una preocupación al aplicar este método y es posible que sea necesario clorar el agua para controlar la contaminación.

La *suavidad* es una consideración importante para los productos de aves de corral, como también la es para la carne roja, y conservarla es una considera-

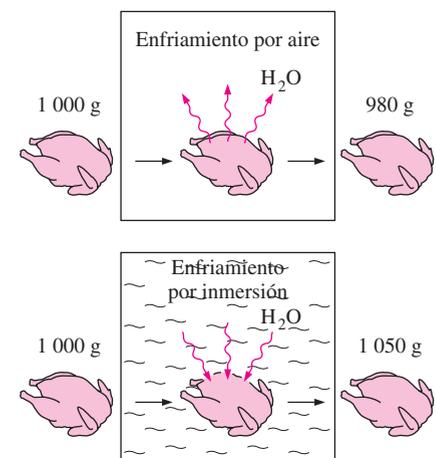


FIGURA 4-51

El enfriamiento por aire causa deshidratación y, por consiguiente, pérdida de peso en el ave, en tanto que el enfriamiento por inmersión causa una ganancia en peso como resultado de la absorción de agua.

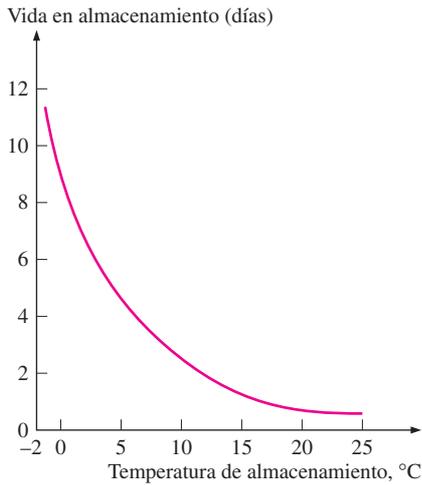
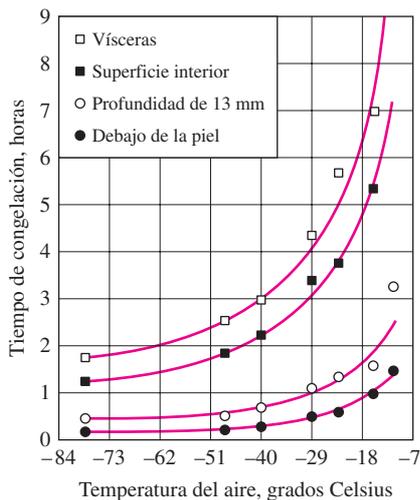


FIGURA 4-52

La vida en almacenamiento de las aves frescas decrece en forma exponencial al aumentar la temperatura de almacenamiento.



Nota: El tiempo de congelación es el intervalo requerido para que la temperatura caiga desde 0 hasta -4°C . Los valores son para pollos de 2.3 a 3.6 kg, con temperatura inicial de 0 a 2°C y con una velocidad del aire de 2.3 a 2.8 m/s.

FIGURA 4-53

Variación del tiempo de congelación de las aves con la temperatura del aire.

ción importante en el enfriamiento y la congelación de aves. Las aves cocidas o congeladas antes de pasar por el rigor mortis permanecen muy duras. La suavización natural se inicia pronto después del sacrificio y se completa en menos de 24 h cuando las aves se mantienen a 4°C . La suavización es rápida durante las primeras tres horas y se desacelera de allí en adelante. La inmersión en agua caliente y el corte en el músculo influyen de manera adversa en la suavización. Se ha observado que la *temperatura de escaldado* o la duración de este proceso aumentan la dureza y, asimismo, se ha observado que la reducción de ese tiempo aumenta la suavidad. La *acción de golpeo* de las máquinas mecánicas para desplumar causa un endurecimiento considerable, por ello, se recomienda que el desplumado se realice después de la suavización. *Cortar* el ave en trozos antes de que se complete la suavización natural la endurece de manera considerable. Por lo tanto, se recomienda cortar después de la suavización. El *enfriamiento rápido* de las aves también puede endurecerlas. Se encuentra que el proceso de suavización se puede acelerar considerablemente por un proceso patentado de *hacer perder el conocimiento a las aves con corriente eléctrica*.

Los productos de aves de corral son *intensamente perecederos* y, como consecuencia, deben conservarse a la temperatura *más baja* posible con el fin de maximizar su vida en anaquel. Los estudios han demostrado que las poblaciones de ciertas bacterias se duplican cada 36 h a -2°C , cada 14 h a 0°C , cada 7 h a 5°C y en menos de 1 h, a 25°C (figura 4-52). Los estudios también han demostrado que los conteos bacterianos totales en las aves conservadas a 2°C durante 14 días son equivalentes a las conservadas a 10°C durante 5 días o a 24°C durante un día. También se ha encontrado que las aves conservadas a -1°C tuvieron 8 días de vida adicional en anaquel por encima de las conservadas a 4°C .

El desarrollo de los microorganismos sobre las *superficies* de las aves causa el desarrollo de un *olor desagradable* y de *baba bacteriana*. Entre más alta es la cantidad inicial de contaminación bacteriana, con mayor rapidez ocurre la formación de baba. Por lo tanto, las buenas prácticas sanitarias durante el procesamiento, como la limpieza frecuente del equipo y el lavado de los canales, son tan importantes como la temperatura de almacenamiento para ampliar la vida en anaquel.

Las aves de corral deben congelarse *con rapidez* para garantizar un aspecto ligero y atractivo. Las aves que se congelan con lentitud se ven oscuras y desarrollan grandes cristales de hielo que dañan los tejidos. Los cristales de hielo que se forman durante la congelación rápida son pequeños. Retrasar la congelación de las aves causa que los cristales de hielo se vuelvan más grandes. Se puede realizar la congelación rápida por medio de aire forzado a temperaturas de -23 a -40°C y velocidades de 1.5 a 5 m/s en *congeladores en túnel con ráfaga de viento*. La mayor parte de las aves se congelan de esta manera. Asimismo, las aves empacadas se congelan más rápido sobre anaqueles abiertos que dentro de cajas. Los paquetes de aves deben congelarse en cajas, y resulta conveniente dejar las cajas abiertas o cortar orificios en ellas en la dirección del flujo de aire durante la congelación. Para obtener los mejores resultados, el túnel con ráfaga de viento debe estar completamente cargado a través de su sección transversal con un espaciamiento parejo entre los productos para garantizar un flujo uniforme del aire alrededor de todos los lados de los paquetes. En la figura 4-53 se muestra el tiempo de congelación de las aves en función de la temperatura del aire refrigerado. En la tabla 4-8 se dan las propiedades térmicas de las aves de corral.

Otros métodos de congelación de las aves incluyen la compresión entre *placas frías*, la *inmersión* en un líquido refrigerado, como glicol o salmuera de

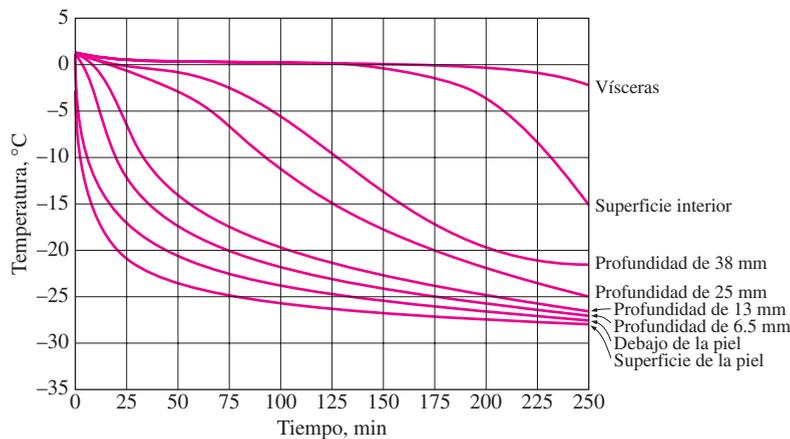


FIGURA 4-54

Variación de la temperatura de las pechugas de pavos de 6.8 kg, inicialmente a 1°C, con la profundidad, durante el enfriamiento por inmersión a -29°C (tomado de van der Berg y Lentz, Ref. 11).

cloruro de calcio, y el *enfriamiento criogénico* con nitrógeno líquido. Las aves se pueden congelar en varias horas mediante las placas frías. Se pueden obtener velocidades de congelación muy altas por la *inmersión* de las aves empacadas en una salmuera a baja temperatura. El tiempo de congelación de las aves en salmuera a -29°C puede ser tan bajo como 20 min, dependiendo del tamaño del ave (figura 4-54). La congelación por inmersión también produce una apariencia ligera muy atractiva y las altas velocidades de transferencia de calor hacen factible la operación en línea continua. También tiene un costo inicial y costos de mantenimiento más bajos que el aire forzado, pero las *infiltraciones* en los paquetes a través de algunos orificios o grietas pequeños siguen siendo una preocupación. El coeficiente de transferencia de calor por convección es de 17 W/m² · °C, para aire a -29°C y 2.5 m/s, en tanto que es de 170 W/m² · °C, para la salmuera de cloruro de sodio a -18°C y a una velocidad de 0.02 m/s. A veces se usa nitrógeno líquido para congelar la corteza de los productos de aves de corral hasta -73°C. A continuación, la congelación se completa con aire en un cuarto de conservación a -23°C.

Los productos de aves de corral empacados de modo adecuado se pueden *almacenar* hasta alrededor de un año a temperaturas de -18°C o menores. La vida en almacenamiento cae considerablemente a temperaturas más elevadas (pero todavía por debajo de la de congelación). Cuando las aves se congelan durante demasiado tiempo, se tienen cambios significativos en el sabor y el jugo y se desarrolla un olor a rancio. Las aves congeladas se pueden deshidratar y experimentan **quemadura del congelador**, lo cual deteriora el aspecto visual del producto y causa endurecimiento del área afectada. La deshidratación y, por consiguiente, la quemadura del congelador se pueden controlar por *humidificación*, *disminución* de la temperatura de almacenamiento y empacando el producto con una película *impermeable*. Se puede ampliar la vida en almacenamiento empacando las aves en un medio ambiente *libre de oxígeno*. Los conteos bacterianos en los productos congelados precocidos pueden conservarse en niveles seguros, ya que es posible que las bacterias no se destruyan por completo durante el proceso de recalentamiento en el hogar.

Las aves congeladas se pueden *descongelar* en el aire ambiental, en agua, en el refrigerador o en el horno sin diferencia significativa en el sabor. Las aves grandes, como el pavo, deben descongelarse de manera segura manteniéndolos en el refrigerador entre 2 y 4°C, durante 2 a 4 días, dependiendo de su tamaño. También se pueden descongelar sumergiéndolos en agua fría, en un recipiente grande, durante 4 a 6 h, o metiéndolos en una bolsa de papel. Se debe tener cuidado en conservar *fría* la superficie del ave para minimizar el *desarrollo microbiológico* al descongelar en el aire o en el agua.

TABLA 4-8

Propiedades térmicas de las aves de corral

Cantidad	Valor típico
Densidad promedio:	
Músculo	1 070 kg/m ³
Piel	1 030 kg/m ³
Calor específico	
Arriba de la congelación	2.94 kJ/kg · °C
Abajo de la congelación	1.55 kJ/kg · °C
Punto de congelación	-2.8°C
Calor latente de fusión	247 kJ/kg
Conductividad térmica: (en W/m · °C)	
Músculo de la pechuga	0.502 a 20°C 1.384 a -20°C 1.506 a -40°C
Músculo oscuro	1.557 a -40°C

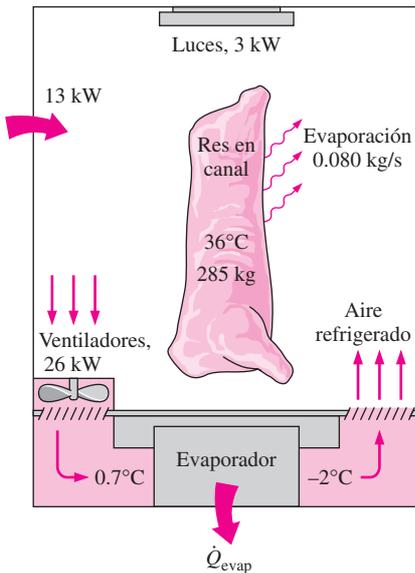


FIGURA 4-55
Esquema para el ejemplo 4-12.

EJEMPLO 4-12 Enfriamiento de canales de res en una planta de carne

El cuarto de enfriamiento de una planta de carne tiene un tamaño de $18 \text{ m} \times 20 \text{ m} \times 5.5 \text{ m}$ y una capacidad de 450 canales de res. Las potencias consumidas por los ventiladores y las luces del cuarto son de 26 y 3 kW, respectivamente, y el cuarto gana calor a través de su cubierta a razón de 13 kW. La masa promedio de los canales es de 285 kg. Las canales entran al cuarto a 36°C , después de que se han lavado para facilitar el enfriamiento evaporativo, y se enfrían hasta 15°C en 10 h. Se espera que el agua se evapore a razón de 0.080 kg/s. El aire entra en la sección del evaporador del sistema de refrigeración a 0.7°C y sale a -2°C . El lado del aire del evaporador tiene gran cantidad de aletas y el coeficiente total de transferencia de calor del evaporador, basado en el lado del aire, es de $20 \text{ W/m}^2 \cdot ^\circ\text{C}$. Asimismo, la diferencia promedio de temperatura entre el aire y el refrigerante que está en el evaporador es de 5.5°C . Determine *a*) la carga de refrigeración del cuarto de enfriamiento, *b*) el gasto volumétrico de aire y *c*) el área superficial de transferencia de calor del evaporador en el lado del aire, si se supone que todo el vapor y la niebla que están en el aire se congelan en el evaporador.

SOLUCIÓN Se considera el cuarto de enfriamiento de una planta de carne con una capacidad de 450 canales de res. Se deben determinar la carga de enfriamiento, el gasto de aire y el área de transferencia de calor del evaporador.

Suposiciones 1 El agua se evapora a razón de 0.080 kg/s. 2 Toda la humedad que está en el aire se congela en el evaporador.

Propiedades El calor de fusión y el calor de vaporización del agua a 0°C son de 333.7 kJ/kg y 2 501 kJ/kg (tabla A-9). La densidad y el calor específico del aire a 0°C son 1.292 kg/m^3 y $1.006 \text{ kJ/kg} \cdot ^\circ\text{C}$ (tabla A-15). También, a partir de la relación dada en la tabla A-7b, se determina que el calor específico del canal de res es

$$c_p = 1.68 + 2.51 \times (\text{contenido de agua}) = 1.68 + 2.51 \times 0.58 = 3.14 \text{ kJ/kg} \cdot ^\circ\text{C}$$

Análisis *a*) En la figura 4-55, se da un esquema del cuarto de enfriamiento. La cantidad de masa de carne de res que es necesario enfriar por unidad de tiempo es

$$\begin{aligned} m_{\text{res}} &= (\text{Masa total de carne de res enfriada})/(\text{Tiempo de enfriamiento}) \\ &= (450 \text{ canales})(285 \text{ kg/canal})/(10 \times 3600 \text{ s}) = 3.56 \text{ kg/s} \end{aligned}$$

La carga de refrigeración de los productos se puede concebir como la energía que es necesario eliminar de la carne de res, conforme se enfría de 36 hasta 15°C , a razón de 3.56 kg/s y se determina que es

$$\dot{Q}_{\text{res}} = (mC\Delta T)_{\text{res}} = (3.56 \text{ kg/s})(3.14 \text{ kJ/kg} \cdot ^\circ\text{C})(36 - 15)^\circ\text{C} = 235 \text{ kW}$$

Entonces la carga total de refrigeración del cuarto de enfriamiento queda

$$\begin{aligned} \dot{Q}_{\text{total, cuarto de enfriamiento}} &= \dot{Q}_{\text{res}} + \dot{Q}_{\text{ventilador}} + \dot{Q}_{\text{luces}} + \dot{Q}_{\text{ganancia de calor}} \\ &= 235 + 26 + 3 + 13 = \mathbf{277 \text{ kW}} \end{aligned}$$

La cantidad de enfriamiento del canal debida al enfriamiento evaporativo del agua es

$$\dot{Q}_{\text{res, evaporativo}} = (mh_{fg})_{\text{agua}} = (0.080 \text{ kg/s})(2501 \text{ kJ/kg}) = 200 \text{ kW}$$

lo cual es $200/235 = 85\%$ de la carga total de enfriamiento de los productos. El 15% restante del calor se transfiere por convección y radiación.

b) El calor se transfiere hacia el aire a la razón determinada en los párrafos anteriores y, como resultado, la temperatura del aire se eleva de -2°C hasta 0.7°C . Por lo tanto, el gasto de masa de aire es

$$\dot{m}_{\text{aire}} = \frac{\dot{Q}_{\text{aire}}}{(c_p \Delta T_{\text{aire}})} = \frac{277 \text{ kW}}{(1.006 \text{ kJ/kg} \cdot ^{\circ}\text{C})[0.7 - (-2)^{\circ}\text{C}]} = 102.0 \text{ kg/s}$$

Entonces el gasto volumétrico de aire queda

$$\dot{V}_{\text{aire}} = \frac{\dot{m}_{\text{aire}}}{\rho_{\text{aire}}} = \frac{102 \text{ kg/s}}{1.292 \text{ kg/m}^3} = 78.9 \text{ m}^3/\text{s}$$

c) Normalmente, la carga de transferencia de calor del evaporador es la misma que la de refrigeración. Pero, en este caso, el agua que entra en el evaporador como líquido se congela cuando la temperatura cae hasta -2°C y el evaporador también debe eliminar el calor latente de congelación, que se determina a partir de

$$\dot{Q}_{\text{congelación}} = (\dot{m} h_{\text{latente}})_{\text{agua}} = (0.080 \text{ kg/s})(333.7 \text{ kJ/kg}) = 27 \text{ kW}$$

Por lo tanto, la razón total de eliminación de calor en el evaporador es

$$\dot{Q}_{\text{evaporador}} = \dot{Q}_{\text{total, cuarto de enfriamiento}} + \dot{Q}_{\text{congelación}} = 277 + 27 = 304 \text{ kW}$$

Entonces, se determina el área superficial de transferencia de calor del evaporador en el lado del aire a partir de $\dot{Q}_{\text{evaporador}} = (UA)_{\text{lado del aire}} \Delta T$,

$$A = \frac{\dot{Q}_{\text{evaporador}}}{U \Delta T} = \frac{304 \text{ 000 W}}{(20 \text{ W/m}^2 \cdot ^{\circ}\text{C})(5.5^{\circ}\text{C})} = 2 \text{ 764 m}^2$$

Es obvio que debe usarse una superficie con aletas para proporcionar un área superficial tan grande en el lado del aire.

RESUMEN

En este capítulo, se consideró la variación de la temperatura con el tiempo así como con la posición en sistemas unidimensionales y multidimensionales. En primer lugar, se consideraron los *sistemas concentrados*, en los que la temperatura varía con el tiempo pero permanece uniforme a través del sistema en todo momento. La temperatura de un cuerpo concentrado de forma arbitraria de masa m , volumen V , área superficial A_s , densidad ρ y calor específico c_p , inicialmente a una temperatura uniforme T_i , que se expone a convección en el instante $t = 0$ en un medio a la temperatura T_{∞} , con un coeficiente de transferencia de calor h , se expresa como

$$\frac{T(t) - T_{\infty}}{T_i - T_{\infty}} = e^{-bt}$$

donde

$$b = \frac{hA_s}{\rho c_p V} = \frac{h}{\rho c_p L_c} \quad (1/\text{s})$$

es una cantidad positiva cuya dimensión es $(\text{tiempo})^{-1}$. Se puede usar esta relación con el fin de determinar la temperatura

$T(t)$ de un cuerpo en el instante t o, de modo alternativo, el tiempo t requerido para que la temperatura alcance un valor especificado $T(t)$. Una vez que se disponga de la temperatura $T(t)$ en el instante t , se puede determinar la *razón* de la transferencia de calor por convección en ese instante, a partir de la ley de Newton del enfriamiento, como

$$\dot{Q}(t) = hA_s [T(t) - T_{\infty}] \quad (\text{W})$$

La *cantidad total* de transferencia de calor entre el cuerpo y el medio circundante durante el intervalo de tiempo de $t = 0$ hasta t es simplemente el cambio en el contenido de energía del cuerpo:

$$Q = mc_p [T(t) - T_i] \quad (\text{kJ})$$

La cantidad de transferencia de calor alcanza su límite superior cuando el cuerpo llega a la temperatura T_{∞} de los alrededores. Por lo tanto, la transferencia de calor *máxima* entre el cuerpo y los alrededores es

$$Q_{\text{máx}} = mc_p (T_{\infty} - T_i) \quad (\text{kJ})$$