

FIGURA 5-49

Elemento de volumen de un nodo interior general (m, n) para conducción bidimensional en régimen transitorio, en coordenadas rectangulares.

Conducción bidimensional de calor en régimen transitorio

Considere una región rectangular en la que la conducción de calor es significativa en las direcciones x y y , y considere una profundidad unitaria de $\Delta z = 1$ en la dirección z . Se puede generar calor en el medio con una velocidad de $\dot{e}(x, y, t)$, la cual puede variar con el tiempo y la posición, si se supone que la conductividad térmica k del medio es constante. Ahora divida el plano x - y de la región en una *malla rectangular* de puntos nodales espaciados con una separación Δx y Δy en las direcciones x y y , respectivamente, y considere un nodo interior general (m, n) cuyas coordenadas son $x = m\Delta x$ y $y = n\Delta y$, como se muestra en la figura 5-49. Dado que el elemento de volumen centrado en torno del nodo interior general (m, n) comprende conducción de calor desde los cuatro lados (derecho, izquierdo, superior e inferior), y el elemento de volumen es $V_{\text{elemento}} = \Delta x \times \Delta y \times 1 = \Delta x \Delta y$, la formulación en diferencias finitas en régimen transitorio para un nodo de ese tipo se puede expresar sobre la base de la ecuación 5-39 como

$$k\Delta y \frac{T_{m-1,n} - T_{m,n}}{\Delta x} + k\Delta x \frac{T_{m,n+1} - T_{m,n}}{\Delta y} + k\Delta y \frac{T_{m+1,n} - T_{m,n}}{\Delta x} + k\Delta x \frac{T_{m,n-1} - T_{m,n}}{\Delta y} + \dot{e}_{m,n} \Delta x \Delta y = \rho \Delta x \Delta y c_p \frac{T_m^{i+1} - T_m^i}{\Delta t} \quad (5-56)$$

Cuando se toma una malla cuadrada ($\Delta x = \Delta y = l$) y se divide cada término entre k da, después de simplificar,

$$T_{m-1,n} + T_{m+1,n} + T_{m,n+1} + T_{m,n-1} - 4T_{m,n} + \frac{\dot{e}_{m,n} l^2}{k} = \frac{T_m^{i+1} - T_m^i}{\tau} \quad (5-57)$$

donde, una vez más, $\alpha = k/\rho c_p$ es la difusividad térmica del material y $\tau = \alpha \Delta t / l^2$ es el número adimensional de malla de Fourier. Esto también se puede expresar en términos de las temperaturas en los nodos vecinos en la siguiente forma, la cual es fácil de recordar:

$$T_{\text{izquierda}} + T_{\text{superior}} + T_{\text{derecha}} + T_{\text{inferior}} - 4T_{\text{nodo}} + \frac{\dot{e}_{\text{nodo}} l^2}{k} = \frac{T_{\text{nodo}}^{i+1} - T_{\text{nodo}}^i}{\tau} \quad (5-58)$$

De nuevo, el primer miembro de esta ecuación es simplemente la formulación en diferencias finitas para el *caso de estado estacionario*, como era de esperarse. Asimismo, todavía no se ha presentado la formulación explícita o implícita, puesto que no se indicó el intervalo de tiempo en el primer miembro de la ecuación. Ahora se obtiene la formulación *explícita* en diferencias finitas al expresar el primer miembro en el paso i de tiempo como

$$T_{\text{izquierda}}^i + T_{\text{superior}}^i + T_{\text{derecha}}^i + T_{\text{inferior}}^i - 4T_{\text{nodo}}^i + \frac{\dot{e}_{\text{nodo}}^i l^2}{k} = \frac{T_{\text{nodo}}^{i+1} - T_{\text{nodo}}^i}{\tau} \quad (5-59)$$

Si se expresa el primer miembro en el intervalo de tiempo $i + 1$ en lugar del i , daría la formulación implícita. Esta ecuación se puede resolver *explícitamente* para la nueva temperatura T_{nodo}^{i+1} , para dar

$$T_{\text{nodo}}^{i+1} = \tau (T_{\text{izquierda}}^i + T_{\text{superior}}^i + T_{\text{derecha}}^i + T_{\text{inferior}}^i) + (1 - 4\tau) T_{\text{nodo}}^i + \tau \frac{\dot{e}_{\text{nodo}}^i l^2}{k} \quad (5-60)$$

para todos los nodos interiores (m, n) , donde $m = 1, 2, 3, \dots, M - 1$ y $n = 1, 2, 3, \dots, N - 1$, en el medio. En el caso de que no haya generación de calor y $\tau = \frac{1}{4}$, la formulación explícita en diferencias finitas para un nodo interior

general se reduce a $T_{\text{nodo}}^{i+1} = (T_{\text{izquierda}}^i + T_{\text{superior}}^i + T_{\text{derecha}}^i + T_{\text{inferior}}^i)/4$, la cual tiene la interpretación de que *la temperatura de un nodo interior en el nuevo intervalo de tiempo es simplemente el promedio de las temperaturas de sus nodos vecinos en el intervalo de tiempo anterior* (figura 5-50).

El criterio de estabilidad que requiere que el coeficiente de T_m^i en la expresión T_m^{i+1} sea mayor o igual a cero para todos los nodos es igualmente válido para los casos bidimensionales o tridimensionales y limita en forma severa el tamaño del intervalo de tiempo Δt que se puede usar con el método explícito. En el caso de transferencia de calor bidimensional en régimen transitorio, en coordenadas rectangulares, el coeficiente de T_m^i en la expresión T_m^{i+1} es $1 - 4\tau$ y, por tanto, en este caso el criterio de estabilidad para todos los nodos interiores es $1 - 4\tau > 0$, o bien,

$$\tau = \frac{\alpha \Delta t}{l^2} \leq \frac{1}{4} \quad \text{(nodos interiores, transferencia de calor bidimensional en coordenadas rectangulares)} \quad (5-61)$$

donde $\Delta x = \Delta y = l$. Cuando se conoce el material del medio y, por tanto, su difusividad térmica α y se especifica el valor del tamaño l de la malla, se puede determinar el valor más grande admisible del intervalo de tiempo Δt a partir de la relación antes dada. Una vez más, los nodos frontera en los que interviene convección y/o radiación son más restrictivos que los interiores y, por consiguiente, requieren intervalos de tiempo más pequeños. Por lo tanto, debe usarse el nodo frontera más restrictivo en la determinación del intervalo de tiempo máximo admisible Δt cuando se resuelve un problema en régimen transitorio con el método explícito.

La aplicación de la ecuación 5-60 a cada uno de los $(M - 1) \times (N - 1)$ nodos interiores da $(M - 1) \times (N - 1)$ ecuaciones. Las ecuaciones restantes se obtienen mediante la aplicación del método de los nodos frontera a menos, por supuesto, que las temperaturas de frontera se especifiquen como constantes. El desarrollo de la formulación en diferencias finitas en régimen transitorio de los nodos frontera en los problemas bidimensionales (o tridimensionales) es semejante al que se realiza en el caso unidimensional discutido al principio. De nuevo la región se divide entre los nodos mediante la formación de elementos de volumen en torno a estos últimos y se escribe un balance de energía para cada nodo frontera con base en la ecuación 5-39. Esto se ilustra en el ejemplo 5-7.

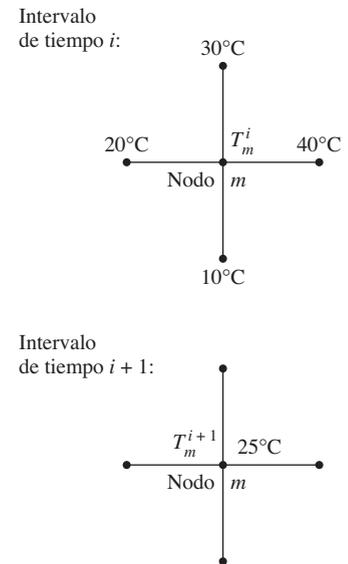


FIGURA 5-50

En el caso de que no haya generación de calor y $\tau = \frac{1}{4}$, la temperatura de un nodo interior en el nuevo intervalo de tiempo es el promedio de las temperaturas de sus nodos vecinos en el intervalo de tiempo anterior.

EJEMPLO 5-7 Conducción de calor bidimensional en régimen transitorio en barras en L

Considere la transferencia de calor bidimensional en régimen transitorio en un cuerpo sólido con forma de L que se encuentra inicialmente a una temperatura uniforme de 90°C y cuya sección transversal se da en la figura 5-51. La conductividad y difusividad térmicas del cuerpo son $k = 15 \text{ W/m} \cdot \text{°C}$ y $\alpha = 3.2 \times 10^{-6} \text{ m}^2/\text{s}$, respectivamente, y se genera calor en el cuerpo con una razón de $\dot{e} = 2 \times 10^6 \text{ W/m}^3$. La superficie izquierda del cuerpo está aislada y la inferior se mantiene a una temperatura uniforme de 90°C en todo momento. En el instante $t = 0$, toda la superficie superior se sujeta a convección hacia el aire ambiente que está a $T_\infty = 25^\circ\text{C}$, con un coeficiente de convección de $h = 80 \text{ W/m}^2 \cdot \text{°C}$, y la derecha se sujeta a flujo de calor con una velocidad uniforme de $\dot{q}_R = 5000 \text{ W/m}^2$. La red nodal del problema consta de 15 nodos igualmente espaciados con $\Delta x = \Delta y = 1.2 \text{ cm}$, como se muestra en la figura. Cinco de los nodos están en la superficie inferior y, por tanto, se conocen sus temperaturas. Mediante el método explícito, determine la temperatura en la esquina superior (nodo 3) del cuerpo después de 1, 3, 5, 10 y 60 min.

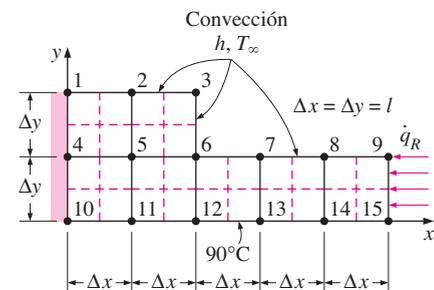
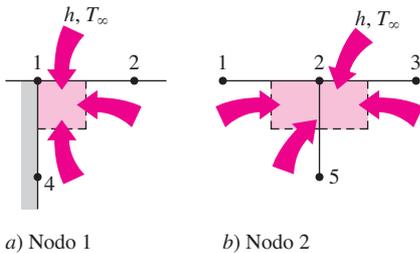


FIGURA 5-51

Red esquemática y nodal para el ejemplo 5-7.



a) Nodo 1

b) Nodo 2

FIGURA 5-52

Esquemas para los balances de energía sobre los elementos de volumen de los nodos 1 y 2.

SOLUCIÓN Éste es un problema de transferencia de calor bidimensional en régimen transitorio en coordenadas rectangulares, y se resolvió en el ejemplo 5-3 para el caso de estado estacionario. Por lo tanto, la solución de este problema en régimen transitorio debe aproximarse a la solución para el caso de estado estacionario cuando el tiempo es suficientemente grande. Se dice que la conductividad térmica y la razón de generación de calor son constantes. Se observa que todos los nodos son frontera excepto el 5, que es interior. Por lo tanto, se tendrá que apoyar en los balances de energía con el fin de obtener las ecuaciones en diferencias finitas. La región se divide entre los nodos de manera equitativa, como se muestra en la figura 5-51, y las ecuaciones explícitas en diferencias finitas se determinan con base en el balance de energía para el caso en régimen transitorio, expresadas como

$$\sum_{\text{Todos los lados}} \dot{Q}^i + \dot{e}V_{\text{elemento}} = \rho V_{\text{elemento}} c_p \frac{T_m^{i+1} - T_m^i}{\Delta t}$$

Las cantidades h , \dot{e} y \dot{q}_R no cambian con el tiempo y, por tanto, no se necesita usar el superíndice i para ellas. Asimismo, las expresiones de los balances de energía se simplifican mediante las definiciones de la difusividad térmica, $\alpha = k/\rho c_p$, y del número adimensional de malla de Fourier, $\tau = \alpha \Delta t/l^2$, donde $\Delta x = \Delta y = l$.

a) Nodo 1. (Nodo frontera sujeto a convección y aislamiento, figura 5-52a)

$$h \frac{\Delta x}{2} (T_\infty - T_1) + k \frac{\Delta y}{2} \frac{T_2^i - T_1^i}{\Delta x} + k \frac{\Delta x}{2} \frac{T_4^i - T_1^i}{\Delta y} + \dot{e}_1 \frac{\Delta x \Delta y}{2} = \rho \frac{\Delta x \Delta y}{2} c_p \frac{T_1^{i+1} - T_1^i}{\Delta t}$$

Al dividir entre $k/4$ y simplificar,

$$\frac{2hl}{k} (T_\infty - T_1) + 2(T_2^i - T_1^i) + 2(T_4^i - T_1^i) + \frac{\dot{e}_1 l^2}{k} = \frac{T_1^{i+1} - T_1^i}{\tau}$$

en la cual se puede despejar T_1^{i+1} para dar

$$T_1^{i+1} = \left(1 - 4\tau - 2\tau \frac{hl}{k}\right) T_1^i + 2\tau \left(T_2^i + T_4^i + \frac{hl}{k} T_\infty + \frac{\dot{e}_1 l^2}{2k}\right)$$

b) Nodo 2. (Nodo frontera sujeto a convección, figura 5-52b)

$$h\Delta x(T_\infty - T_2) + k \frac{\Delta y}{2} \frac{T_3^i - T_2^i}{\Delta x} + k\Delta x \frac{T_5^i - T_2^i}{\Delta y} + k \frac{\Delta y}{2} \frac{T_1^i - T_2^i}{\Delta x} + \dot{e}_2 \Delta x \frac{\Delta y}{2} = \rho \Delta x \frac{\Delta y}{2} c_p \frac{T_2^{i+1} - T_2^i}{\Delta t}$$

Al dividir entre $k/2$, simplificar y despejar T_2^{i+1} da

$$T_2^{i+1} = \left(1 - 4\tau - 2\tau \frac{hl}{k}\right) T_2^i + \tau \left(T_1^i + T_3^i + 2T_5^i + \frac{2hl}{k} T_\infty + \frac{\dot{e}_2 l^2}{k}\right)$$

c) Nodo 3. (Nodo frontera sujeto a convección sobre los dos lados, figura 5-53a)

$$h\left(\frac{\Delta x}{2} + \frac{\Delta y}{2}\right)(T_\infty - T_3^i) + k\frac{\Delta x}{2}\frac{T_6^i - T_3^i}{\Delta y} + k\frac{\Delta y}{2}\frac{T_2^i - T_3^i}{\Delta x} + \dot{e}_3\frac{\Delta x}{2}\frac{\Delta y}{2} = \rho\frac{\Delta x}{2}\frac{\Delta y}{2}\frac{T_3^{i+1} - T_3^i}{\Delta t}$$

Al dividir entre $k/4$, simplificar y despejar T_3^{i+1} da

$$T_3^{i+1} = \left(1 - 4\tau - 4\tau\frac{hl}{k}\right)T_3^i + 2\tau\left(T_4^i + T_6^i + 2\frac{hl}{k}T_\infty + \frac{\dot{e}_3 l^2}{2k}\right)$$

d) Nodo 4. (Sobre la frontera aislada y se puede tratar como un nodo interior, figura 5-53b.) Dado que $T_{10} = 90^\circ\text{C}$, la ecuación 5-60 da

$$T_4^{i+1} = (1 - 4\tau)T_4^i + \tau\left(T_1^i + 2T_5^i + 90 + \frac{\dot{e}_4 l^2}{k}\right)$$

e) Nodo 5. (Nodo interior, figura 5-54a.) Dado que $T_{11} = 90^\circ\text{C}$, la ecuación 5-60 da

$$T_5^{i+1} = (1 - 4\tau)T_5^i + \tau\left(T_2^i + T_4^i + T_6^i + 90 + \frac{\dot{e}_5 l^2}{k}\right)$$

f) Nodo 6. (Nodo frontera sujeto a convección sobre los dos lados, figura 5-54b)

$$h\left(\frac{\Delta x}{2} + \frac{\Delta y}{2}\right)(T_\infty - T_6^i) + k\frac{\Delta y}{2}\frac{T_7^i - T_6^i}{\Delta x} + k\Delta x\frac{T_{12}^i - T_6^i}{\Delta y} + k\Delta y\frac{T_5^i - T_6^i}{\Delta x} + \frac{\Delta x}{2}\frac{T_3^i - T_6^i}{\Delta y} + \dot{e}_6\frac{3\Delta x\Delta y}{4} = \rho\frac{3\Delta x\Delta y}{4}c_p\frac{T_6^{i+1} - T_6^i}{\Delta t}$$

Al dividir entre $3k/4$, simplificar y despejar T_6^{i+1} da

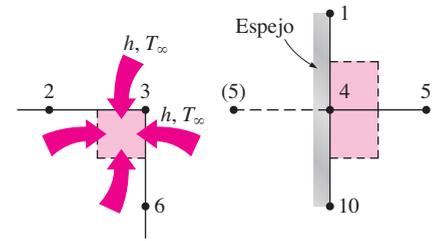
$$T_6^{i+1} = \left(1 - 4\tau - 4\tau\frac{hl}{3k}\right)T_6^i + \frac{\tau}{3}\left[2T_3^i + 4T_5^i + 2T_7^i + 4 \times 90 + 4\frac{hl}{k}T_\infty + 3\frac{\dot{e}_6 l^2}{k}\right]$$

g) Nodo 7. (Nodo frontera sujeto a convección, figura 5-55)

$$h\Delta x(T_\infty - T_7^i) + k\frac{\Delta y}{2}\frac{T_8^i - T_7^i}{\Delta x} + k\Delta x\frac{T_{13}^i - T_7^i}{\Delta y} + k\frac{\Delta y}{2}\frac{T_6^i - T_7^i}{\Delta x} + \dot{e}_7\Delta x\frac{\Delta y}{2} = \rho\Delta x\frac{\Delta y}{2}c_p\frac{T_7^{i+1} - T_7^i}{\Delta t}$$

Al dividir entre $k/2$, simplificar y despejar T_7^{i+1} da

$$T_7^{i+1} = \left(1 - 4\tau - 2\tau\frac{hl}{k}\right)T_7^i + \tau\left[T_6^i + T_8^i + 2 \times 90 + \frac{2hl}{k}T_\infty + \frac{\dot{e}_7 l^2}{k}\right]$$

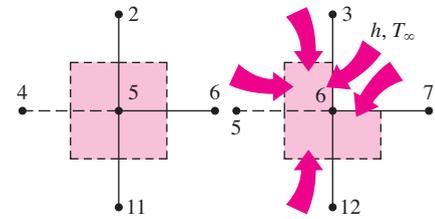


a) Nodo 3

b) Nodo 4

FIGURA 5-53

Esquemas para los balances de energía sobre los elementos de volumen de los nodos 3 y 4.



a) Nodo 5

b) Nodo 6

FIGURA 5-54

Esquemas para los balances de energía sobre los elementos de volumen de los nodos 5 y 6.

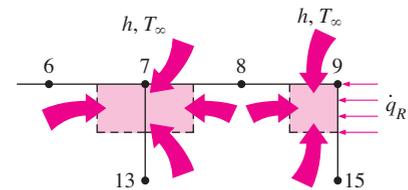


FIGURA 5-55

Esquemas para los balances de energía sobre los elementos de volumen de los nodos 7 y 9.

h) Nodo 8. Este nodo es idéntico al 7 y su formulación en diferencias finitas se puede obtener de la correspondiente al nodo 7, al desplazar los números de nodos en 1 (es decir, reemplazar el subíndice m por el $m + 1$). Esto da

$$T_8^{i+1} = \left(1 - 4\tau - 2\tau \frac{hl}{k}\right) T_8^i + \tau \left[T_7^i + T_9^i + 2 \times 90 + \frac{2hl}{k} T_\infty + \frac{\dot{e}_8 l^2}{k} \right]$$

i) Nodo 9. (Nodo frontera sujeto a convección sobre los dos lados, figura 5-55)

$$\begin{aligned} h \frac{\Delta x}{2} (T_\infty - T_9^i) + \dot{q}_R \frac{\Delta y}{2} k \frac{\Delta x}{2} \frac{T_{15}^i - T_9^i}{\Delta y} \\ + \frac{k \Delta y}{2} \frac{T_8^i - T_9^i}{\Delta x} + \dot{e}_9 \frac{\Delta x}{2} \frac{\Delta y}{2} = \rho \frac{\Delta x}{2} \frac{\Delta y}{2} c_p \frac{T_9^{i+1} - T_9^i}{\Delta t} \end{aligned}$$

Al dividir entre $k/4$, simplificar y despejar T_9^{i+1} da

$$T_9^{i+1} = \left(1 - 4\tau - 2\tau \frac{hl}{k}\right) T_9^i + 2\tau \left(T_8^i + 90 + \frac{\dot{q}_R l}{k} + \frac{hl}{k} T_\infty + \frac{\dot{e}_9 l^2}{2k} \right)$$

Con esto se completa la formulación en diferencias finitas del problema. Enseguida se necesita determinar el límite superior del intervalo de tiempo Δt a partir del criterio de estabilidad, el cual requiere que el coeficiente de T_m^i en la expresión T_m^{i+1} (el coeficiente primario) sea mayor o igual a cero para todos los nodos. En este caso, el coeficiente primario más pequeño en las nueve ecuaciones es el de T_3^i en la expresión y, por tanto, el criterio de estabilidad para este problema se puede expresar como

$$1 - 4\tau - 4\tau \frac{hl}{k} \geq 0 \quad \rightarrow \quad \tau \leq \frac{1}{4(1 + hl/k)} \quad \rightarrow \quad \Delta t \leq \frac{l^2}{4\alpha(1 + hl/k)}$$

puesto que $\tau = \alpha \Delta t / l^2$. Al sustituir las cantidades dadas, se determina que el valor máximo admisible del paso de tiempo es

$$\Delta t \leq \frac{(0.012 \text{ m})^2}{4(3.2 \times 10^{-6} \text{ m}^2/\text{s})[1 + (80 \text{ W/m}^2 \cdot \text{°C})(0.012 \text{ m})/(15 \text{ W/m} \cdot \text{°C})]} = 10.6 \text{ s}$$

Por lo tanto, para resolver este problema, se puede usar cualquier paso de tiempo menor que 10.6 s. Por conveniencia, se elige que el intervalo de tiempo sea $\Delta t = 10$ s. Entonces el número discreto de Fourier queda

$$\tau = \frac{\alpha \Delta t}{l^2} = \frac{(3.2 \times 10^{-6} \text{ m}^2/\text{s})(10 \text{ s})}{(0.012 \text{ m})^2} = 0.222 \quad (\text{para } \Delta t = 10 \text{ s})$$

Al sustituir este valor de τ y el de las otras cantidades dadas, se simplifican las ecuaciones desarrolladas en diferencias finitas en régimen transitorio, para dar

$$\begin{aligned} T_1^{i+1} &= 0.0836T_1^i + 0.444(T_2^i + T_4^i + 11.2) \\ T_2^{i+1} &= 0.0836T_2^i + 0.222(T_1^i + T_3^i + 2T_5^i + 22.4) \\ T_3^{i+1} &= 0.0552T_3^i + 0.444(T_2^i + T_6^i + 12.8) \\ T_4^{i+1} &= 0.112T_4^i + 0.222(T_1^i + 2T_5^i + 109.2) \\ T_5^{i+1} &= 0.112T_5^i + 0.222(T_2^i + T_4^i + T_6^i + 109.2) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 T_6^{i+1} &= 0.0931T_6^i + 0.074(2T_3^i + 4T_5^i + 2T_7^i + 424) \\
 T_7^{i+1} &= 0.0836T_7^i + 0.222(T_6^i + T_8^i + 202.4) \\
 T_8^{i+1} &= 0.0836T_8^i + 0.222(T_7^i + T_9^i + 202.4) \\
 T_9^{i+1} &= 0.0836T_{\text{nodo}}^{i+1} + 0.444(T_8^i + 105.2)
 \end{aligned}$$

Mediante la condición inicial específica como la solución en el instante $t = 0$ (para $i = 0$), al barrer a través de estas nueve ecuaciones se obtiene la solución a intervalos de 10 s. Se determina que la solución en el nodo de la esquina superior (nodo 3) es 100.2, 105.9, 106.5, 106.6 y 106.6°C, en los instantes 1, 3, 5, 10 y 60 min, respectivamente. Note que las tres últimas soluciones son prácticamente idénticas a la solución para el caso de estado estacionario obtenida en el ejemplo 5-3. Esto indica que se alcanzan las condiciones estacionarias en el medio después de transcurridos más o menos 5 min.

TEMA DE INTERÉS ESPECIAL*

Control del error numérico

Una comparación de los resultados numéricos con los resultados exactos para la distribución de temperatura en un cilindro mostraría que los primeros son aproximados y pueden estar o no suficientemente cercanos a los valores de la solución exacta (verdadera). La diferencia entre una solución numérica y la exacta es el **error** en el que se incurre en la solución numérica y tiene como origen principal dos fuentes:

- El **error de discretización** (también llamado error *por truncamiento* o *de formulación*), en el cual se incurre por las aproximaciones usadas en la formulación del método numérico.
- El **error por redondeo**, en el cual se incurre por el uso de la computadora de un número limitado de cifras significativas y que redondea (o recorta) en forma continua los dígitos que no puede conservar.

Enseguida se discuten los dos tipos de errores.

Error de discretización

El error de discretización en el que se incurre en los métodos numéricos se debe al reemplazo de las *derivadas* por *diferencias* en cada paso, o bien, la distribución real de temperatura entre dos nodos adyacentes por un segmento rectilíneo.

Considere la variación de la solución de un problema de transferencia de calor en régimen transitorio con el tiempo en un punto nodal especificado. Tanto la solución numérica como la real (exacta) coinciden al principio del primer intervalo de tiempo, como es de esperarse, pero la primera se desvía de la segunda a medida que se incrementa el tiempo t . La diferencia entre las dos soluciones en $t = \Delta t$ se debe sólo a la aproximación en el primer intervalo de tiempo y se llama *error local de discretización*. Se podría esperar que la situación empeore con cada intervalo, puesto que en el segundo intervalo se usa el resultado erróneo del primer paso como punto de partida y se añade un segundo error local de discretización en la parte superior

*Se puede pasar por alto esta unidad, sin pérdida de continuidad.

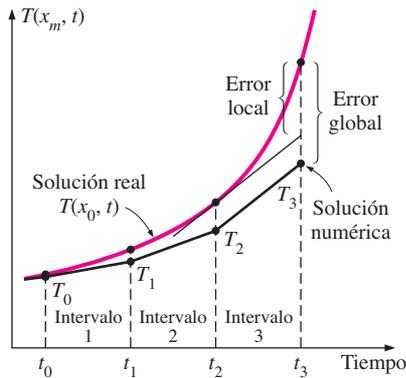


FIGURA 5-56

Errores local y global de discretización del método de las diferencias finitas en el tercer intervalo de tiempo, en un punto nodal especificado.

de él, como se muestra en la figura 5-56. La acumulación de los errores locales de discretización continúa al aumentar el número de escalones de tiempo y, en cualquier intervalo, el error total de discretización se llama *error global* o *acumulado de discretización*. Note que en el primer intervalo de tiempo los errores local y global de discretización son idénticos. Por lo común este último aumenta al incrementarse el número de intervalos, pero puede ocurrir lo opuesto cuando la función solución cambia con frecuencia de dirección, lo que da lugar a errores locales de discretización de signos opuestos, los cuales tienden a cancelarse entre sí.

Para tener una idea acerca de la magnitud del error local de discretización, considere el desarrollo de las series de Taylor de la temperatura en un punto nodal m especificado en el instante t_i ,

$$T(x_m, t_i + \Delta t) = T(x_m, t_i) + \Delta t \frac{\partial T(x_m, t_i)}{\partial t} + \frac{1}{2} \Delta t^2 \frac{\partial^2 T(x_m, t_i)}{\partial t^2} + \dots \quad (5-62)$$

La formulación en diferencias finitas de la derivada con respecto al tiempo en el mismo punto nodal se expresa como

$$\frac{\partial T(x_m, t_i)}{\partial t} \cong \frac{T(x_m, t_i + \Delta t) - T(x_m, t_i)}{\Delta t} = \frac{T_m^{i+1} - T_m^i}{\Delta t} \quad (5-63)$$

o bien,

$$T(x_m, t_i + \Delta t) \cong T(x_m, t_i) + \Delta t \frac{\partial T(x_m, t_i)}{\partial t} \quad (5-64)$$

lo cual se asemeja al *desarrollo de las series de Taylor* terminado después de los dos primeros términos. Por lo tanto, los términos tercero y posteriores en el desarrollo de las series de Taylor representan el error que se comete en la aproximación en diferencias finitas. Para un lapso de tiempo suficientemente pequeño, estos términos decaen con rapidez, a medida que se incrementa el orden de la derivada, y sus contribuciones se vuelven cada vez más y más pequeñas. El primer término despreciado en el desarrollo de las series de Taylor es proporcional a Δt^2 y, por tanto, el error local de discretización de esta aproximación, el cual es en el que se incurre en cada paso, también es proporcional a Δt^2 .

El error local de discretización es el error de formulación asociado con un solo paso y da una idea acerca de la precisión del método usado. Sin embargo, los resultados solución que se obtienen en cada paso, excepto en el primero, contienen el *error acumulado* hasta ese punto y el error local por sí solo no tiene mucho significado. Lo que en realidad se necesita conocer es el error global de discretización. En el peor de los casos, el error acumulado de discretización después de I intervalos de tiempo, durante un periodo t_0 es $i(\Delta t)^2 = (t_0/\Delta t)(\Delta t)^2 = t_0\Delta t$, el cual es proporcional a Δt . Por tanto, se concluye que el error local de discretización es proporcional al cuadrado del intervalo Δt^2 , mientras que el error global de discretización es proporcional al Δt . Por lo tanto, entre menor sea el tamaño de la malla (o el tamaño del intervalo de tiempo en los problemas en régimen transitorio) más pequeño es el error y, por consiguiente, más exacta es la aproximación. Por ejemplo, reducir a la mitad el tamaño del intervalo reducirá el error global de discretización a la mitad. Con base en la discusión anterior, debe quedar claro que se puede minimizar el error de discretización al decrecer el tamaño del intervalo, en el espacio o en el tiempo, tanto como sea posible. El error de discretización tiende a cero conforme las diferencias, como Δx y Δt , tienden a diferenciales, como dx y dt .

Error por redondeo

Si se tuviera una computadora que pudiera conservar un número infinito de dígitos para todos los números, la diferencia entre la solución exacta y la aproximada (numérica) en cualquier punto se debería por completo al error de discretización. Pero se sabe que toda computadora (o calculadora) representa números mediante un número finito de cifras significativas. El valor predeterminado del número de dígitos significativos para muchas computadoras es de 7, lo cual se conoce como *precisión sencilla*. Pero el usuario puede realizar los cálculos mediante 15 dígitos significativos para los números si lo desea, lo cual se menciona como *precisión doble*. Por supuesto, realizar cálculos con precisión doble requerirá más memoria de computadora y un tiempo más largo de ejecución.

En el modo de precisión sencilla con siete dígitos significativos una computadora registra el número 44 444.666666 como 44 444.67 o 44 444.66, dependiendo del método de redondeo que use. En el primer caso se dice que los dígitos en exceso se *redondearon* hasta el entero más cercano, mientras que en el segundo caso se dice que se *recortaron*. Por lo tanto, los números $a = 44\,444.12345$ y $b = 44\,444.12032$, son equivalentes para una computadora que realiza cálculos mediante siete dígitos significativos. Una computadora de ese tipo daría $a - b = 0$, en lugar del valor verdadero de 0.00313.

El error debido a la conservación de un número limitado de dígitos durante los cálculos se llama **error por redondeo**. Éste tiene naturaleza aleatoria y no existe una manera fácil y sistemática de predecirlo. Depende del número de cálculos, del método de redondeo, del tipo de computadora y hasta de la secuencia de los cálculos.

En álgebra, el lector aprendió que $a + b + c = a + c + b$, lo cual parece bastante razonable. Pero esto no se cumple necesariamente para los cálculos realizados con una computadora, como se demuestra en la figura 5-57. Note que el cambio en la secuencia de los cálculos condujo a un error de 30.8% en sólo dos operaciones. Si se considera que cualquier problema significativo comprende miles o incluso millones de esas operaciones realizadas en secuencia, se observa que el error acumulado por redondeo tiene el potencial de causar errores graves sin dar signos de advertencia. Los programadores experimentados están muy conscientes de este peligro y estructuran sus programas para impedir cualquier acumulación de error por redondeo. Por ejemplo, es mucho más seguro multiplicar un número por 10 que sumarlo 10 veces. Asimismo, es mucho más seguro empezar cualquier proceso de adición con los números más pequeños y continuar con los más grandes. Esta regla es, en particular, importante al evaluar series con un gran número de términos con signos alternantes.

El error por redondeo es proporcional al *número de cálculos* realizados durante la solución. En el método de las diferencias finitas, el número de cálculos se incrementa conforme decrece el tamaño de la malla o el del paso. Por ejemplo, al reducir el tamaño de la malla o del intervalo de tiempo a la mitad, se duplicará el número de cálculos y, por consiguiente, el error acumulado por redondeo.

Control del error en los métodos numéricos

El error total en cualquier resultado obtenido por un método numérico es la suma del *error de discretización*, el cual decrece al disminuir el tamaño del intervalo, y el *error por redondeo*, el cual se incrementa cuando decrece el tamaño del intervalo, como se muestra en la figura 5-58. Por lo tanto, decre-

Dado:

$$\begin{aligned} a &= 7\,777\,777 \\ b &= -7\,777\,776 \\ c &= 0.4444432 \end{aligned}$$

Hallar:

$$\begin{aligned} D &= a + b + c \\ E &= a + c + b \end{aligned}$$

Solución:

$$\begin{aligned} D &= 7\,777\,777 - 7\,777\,776 + 0.4444432 \\ &= 1 + 0.4444432 \\ &= 1.444443 \text{ (Resultado correcto)} \\ E &= 7\,777\,777 + 0.4444432 - 7\,777\,776 \\ &= 7\,777\,777 - 7\,777\,776 \\ &= 1.000000 \text{ (Con un error de 30.8\%)} \end{aligned}$$

FIGURA 5-57

Operación aritmética simple realizada con una computadora en precisión sencilla mediante siete dígitos significativos, que conduce a un error de 30.8% cuando se invierte el orden de la operación.

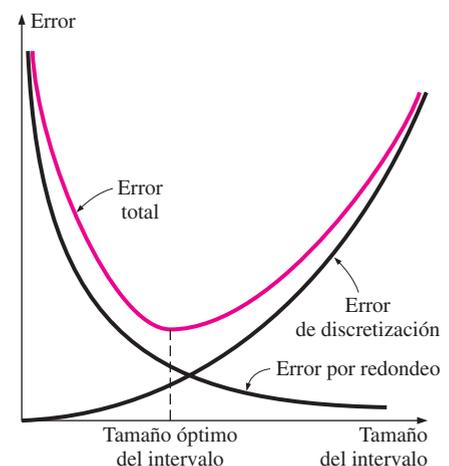


FIGURA 5-58

A medida que disminuye el tamaño de la malla o el intervalo de tiempo, el error de discretización decrece pero el debido al redondeo aumenta.

cer demasiado el tamaño del intervalo con el fin de obtener resultados más precisos, en realidad puede resultar contraproducente y dar resultados menos exactos debido a un incremento más rápido en el error por redondeo. Se debe ser cuidadoso para no permitir que este último tipo de error se salga de control, evitando un gran número de cálculos con números muy pequeños.

En la práctica no se conocerá la solución exacta del problema y, por consiguiente, no es capaz de determinar la magnitud del error en el que se incurre en el método numérico. Saber que el error global de discretización es proporcional al tamaño del intervalo tampoco es de mucha ayuda, ya que no se cuenta con una manera fácil de determinar el valor de la constante de proporcionalidad. Además, el error global de discretización no tiene significado por sí solo sin una estimación verdadera del error por redondeo. Por lo tanto, se recomiendan los siguientes procedimientos prácticos para valorar la precisión de los resultados obtenidos por un método numérico.

- Inicie los cálculos con un tamaño razonable de malla Δx (y del intervalo de tiempo Δt para los problemas en régimen transitorio) basado en la experiencia. A continuación, repita los cálculos mediante un tamaño de malla de $\Delta x/2$. Si los resultados obtenidos al reducir el tamaño de malla a la mitad no difieren de manera significativa de los resultados obtenidos con el tamaño completo de malla, se concluye que el error de discretización está en un nivel aceptable. Pero si la diferencia es mayor que la aceptada, se tienen que repetir los cálculos mediante un tamaño de malla de $\Delta x/4$, o incluso menor en las regiones de gradientes altos de temperatura. De esta manera, se continúa hasta que la reducción del tamaño de malla a la mitad no cause cambios significativos en los resultados, lo cual indica que el error de discretización se ha reducido a un nivel aceptable.
- Repita los cálculos mediante la precisión doble, al mantener el tamaño de malla (y el tamaño del intervalo de tiempo en los problemas en régimen transitorio). Si los cambios no son significativos, se concluye que el error por redondeo no es un problema. Pero si los cambios son demasiado grandes como para aceptarse, entonces se puede intentar reducir el número total de cálculos, al incrementar el tamaño de la malla o cambiar el orden de los cálculos. Pero si el tamaño mayor de malla produce errores inaceptables de discretización, entonces se puede hallar un término medio razonable.

Siempre se debe tener presente que los resultados obtenidos por cualquier método numérico pueden no reflejar algunos puntos conflictivos en ciertos problemas que requieren una consideración especial, como los puntos o zonas calientes de los gradientes altos de temperatura. Los errores que parecen razonables en forma global pueden ser considerables en ciertos lugares. La anterior es otra razón para repetir siempre los cálculos por lo menos dos veces con diferentes tamaños de malla, antes de aceptarlos como la solución del problema. La mayor parte de los paquetes comerciales de software cuentan con rutinas integradas que varían el tamaño de la malla según sea necesario para obtener soluciones muy precisas. Pero es una buena práctica de ingeniería estar conscientes de cualesquiera trampas potenciales de los métodos numéricos y examinar los resultados obtenidos con un ojo crítico.