

FUNDAMENTOS DE LA CONVECCIÓN

Hasta ahora se ha considerado la *conducción*, la cual constituye el mecanismo de transferencia de calor a través de un sólido o fluido en reposo. Ahora, se considerará la *convección*, la cual constituye el mecanismo de transferencia de calor a través de un fluido, en presencia de un movimiento masivo de éste.

La convección se clasifica como *convección natural* (o *libre*) y *forzada*, dependiendo de la manera en que se inicia el movimiento del fluido. En la convección forzada se obliga a que el fluido fluya sobre una superficie o en un tubo por medios externos, como una bomba o un ventilador. En la convección natural, cualquier movimiento del fluido es causado por medios naturales, como el efecto de flotación, el cual se manifiesta como la subida del fluido caliente y la caída del fluido frío. La convección también se clasifica como *externa* e *interna*, dependiendo de si se obliga al fluido a fluir sobre una superficie o en un tubo.

Se inicia este capítulo con una descripción física general de la convección. A continuación se discuten las *capas límite de velocidad* y *térmica*, así como los *flujos laminar* y *turbulento*. Se continúa con la discusión de los *números adimensionales de Reynolds, Prandtl y Nusselt*, y su significado físico. Enseñada, se deducen las *ecuaciones de la convección* sobre la base de la conservación de la masa, de la cantidad de movimiento y de la energía, y se obtienen soluciones para el *flujo sobre una placa plana*. Entonces se quitan las dimensiones de las ecuaciones de la convección y se obtienen formas funcionales de los coeficientes de fricción y de convección. Por último, se presentan analogías entre la cantidad de movimiento y la transferencia de calor.

OBJETIVOS

Cuando el lector termine de estudiar este capítulo, debe ser capaz de:

- Comprender el mecanismo físico de la convección y su clasificación
- Visualizar el desarrollo de las capas límite de velocidad y térmica en caso del flujo sobre superficies
- Adquirir un conocimiento útil para las aplicaciones de los números adimensionales de Reynolds, Prandtl y Nusselt
- Distinguir entre los flujos laminar y turbulento, y adquirir una comprensión de los mecanismos de la transferencia de la cantidad de movimiento y del calor en el flujo turbulento
- Deducir las ecuaciones diferenciales que rigen la convección, sobre la base de los balances de masa, de cantidad de movimiento y de energía, y resolver estas ecuaciones para algunos casos sencillos, como el flujo laminar sobre una placa plana
- Hallar la forma adimensional de las ecuaciones de convección y obtener las formas funcionales de los coeficientes de fricción y de transferencia de calor, y
- Usar analogías entre la cantidad de movimiento y la transferencia de calor, así como determinar el coeficiente de transferencia de calor a partir del conocimiento del coeficiente de fricción.

CONTENIDO

- 6-1 Mecanismo físico de la convección 356
- 6-2 Clasificación de los flujos de fluidos 359
- 6-3 Capa límite de la velocidad 362
- 6-4 Capa límite térmica 364
- 6-5 Flujos laminar y turbulento 365
- 6-6 Transferencia de calor y cantidad de movimiento en el flujo turbulento 367
- 6-7 Deducción de las ecuaciones diferenciales de la convección 369
- 6-8 Soluciones de las ecuaciones de convección para una placa plana 376
- 6-9 Ecuaciones adimensionales de la convección y semejanza 380
- 6-10 Formas funcionales de los coeficientes de fricción y de convección 381
- 6-11 Analogías entre la cantidad de movimiento y la transferencia de calor 382

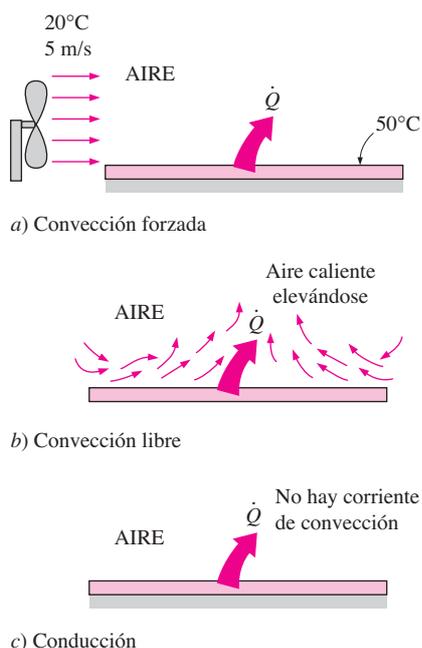
Tema de interés especial:

Transferencia de calor a microescala 385

Resumen 388

Bibliografía y lecturas sugeridas 389

Problemas 390



c) Conducción

FIGURA 6-1

Transferencia de calor de una superficie caliente hacia el fluido circundante, por convección y conducción.

6-1 ■ MECANISMO FÍSICO DE LA CONVECCIÓN

En el capítulo 1 se mencionó que existen tres mecanismos básicos de transferencia de calor: conducción, convección y radiación. La conducción y la convección son semejantes pues requieren la presencia de un medio material, pero difieren en que la convección requiere la presencia del movimiento de fluidos.

La transferencia de calor a través de un sólido siempre es por conducción, dado que las moléculas de un sólido de este tipo permanecen en posiciones relativamente fijas. Sin embargo, la transferencia de calor a través de un líquido o gas puede ser por conducción o convección, dependiendo de la presencia de algún movimiento masivo del fluido. La transferencia de calor a través de un fluido es por convección cuando se tiene un movimiento masivo de este último y por conducción cuando no existe dicho movimiento. Por lo tanto, la conducción en un fluido se puede concebir como el caso límite de la convección, correspondiente al caso de fluido en reposo (figura 6-1).

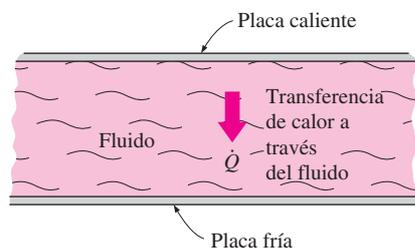
La transferencia de calor por convección es complicada por el hecho de que comprende movimiento del fluido así como conducción del calor. El movimiento del fluido mejora la transferencia de calor, ya que pone en contacto porciones más calientes y más frías de ese fluido, iniciando índices más altos de conducción en un gran número de sitios. Por lo tanto, la velocidad de la transferencia de calor a través de un fluido es mucho más alta por convección que por conducción. De hecho, entre más alta es la velocidad del fluido, mayor es la velocidad de la transferencia de calor.

Para aclarar este punto todavía más, considere la transferencia de calor en estado estable a través de un fluido contenido entre dos placas paralelas que se mantienen a temperaturas diferentes, como se muestra en la figura 6-2. Las temperaturas del fluido y de la placa son las mismas en los puntos de contacto debido a la continuidad de la temperatura. Si se supone que no hay movimiento del fluido, la energía de las moléculas más calientes de éste, cercanas a la placa caliente, se transferirá a las moléculas adyacentes más frías del mismo. Entonces, esta energía pasa a la siguiente capa de las moléculas más frías del fluido, y así sucesivamente hasta que, al final, se transfiere a la otra placa. Esto es lo que sucede durante la conducción a través de un fluido. Ahora, mediante una jeringa, se extrae algo del fluido cercano a la placa caliente para inyectarlo cerca de la placa fría repetidas veces. El lector puede imaginar que esto acelerará de manera considerable el proceso de transferencia de calor, ya que algo de la energía se lleva hasta el otro lado como resultado del movimiento del fluido.

Considérese el enfriamiento de un bloque caliente con un ventilador que sopla aire sobre su superficie superior. Se sabe que el calor se transfiere del bloque hacia el aire circundante más frío y que llega el momento en que el bloque se enfría. También se sabe que el bloque se enfría más rápido si se pone a funcionar el ventilador a una velocidad más alta. Si se reemplaza el aire por agua, incluso se mejora más la transferencia de calor por convección.

La experiencia muestra que la transferencia de calor por convección depende con intensidad de las propiedades *viscosidad dinámica* μ , *conductividad térmica* k , *densidad* ρ y *calor específico* c_p del fluido, así como de la *velocidad del fluido* V . También depende de la *configuración geométrica* y *asperidad* de la superficie sólida, además del *tipo de flujo del fluido* (el que sea laminar o turbulento). Por tanto, se espera que las relaciones de la transferencia de calor por convección sean un tanto complejas debido a su dependencia de tantas variables. Esto no es sorprendente, ya que la convección es el mecanismo más complejo de transferencia de calor.

A pesar de la complejidad de la convección, se observa que la razón de la transferencia de calor por este mecanismo es proporcional a la diferencia de temperatura y se expresa de manera conveniente por la **ley de Newton de enfriamiento** como

**FIGURA 6-2**

Transferencia de calor a través de un fluido comprimido entre dos placas paralelas.

$$\dot{q}_{\text{conv}} = h(T_s - T_\infty) \quad (\text{W/m}^2) \quad (6-1)$$

o bien,

$$\dot{Q}_{\text{conv}} = hA_s(T_s - T_\infty) \quad (\text{W}) \quad (6-2)$$

donde

- h = coeficiente de transferencia de calor por convección, $\text{W/m}^2 \cdot ^\circ\text{C}$
- A_s = área superficial de transferencia de calor, m^2
- T_s = temperatura de la superficie, $^\circ\text{C}$
- T_∞ = temperatura del fluido suficientemente lejos de la superficie, $^\circ\text{C}$

A juzgar por sus unidades, el **coeficiente de transferencia de calor por convección** h se puede definir como *la razón de la transferencia de calor entre una superficie sólida y un fluido por unidad de área superficial por unidad de diferencia en la temperatura*.

El lector no debe dejarse llevar por la simple apariencia de esta relación, en virtud de que el coeficiente de transferencia de calor por convección h depende de varias de las variables mencionadas y, por consiguiente, es difícil de determinar.

A menudo, el flujo del fluido se confina por medio de superficies sólidas y es importante entender la manera en que la presencia de esas superficies afecta ese flujo. Considérese el flujo de un fluido en un tubo estacionario o sobre una superficie sólida que no es porosa (es decir, que es impermeable al fluido). Todas las observaciones experimentales indican que un fluido en movimiento llega a detenerse por completo en la superficie y toma una velocidad cero con respecto a esta última. Es decir, un fluido en contacto directo con un sólido “se adhiere” a la superficie debido a los efectos viscosos y no se desliza. Esto se conoce como la **condición de no deslizamiento**.

La fotografía de la figura 6-3, obtenida de un videoclip, muestra con claridad la evolución de un gradiente de velocidad como resultado de la adherencia del fluido a la superficie de un cuerpo romo. La capa que se adhiere a la superficie desacelera la capa adyacente de fluido debido a las fuerzas viscosas existentes entre las capas del propio fluido, de manera que una capa desacelera a la que sigue, y así sucesivamente. Por lo tanto, la condición de no deslizamiento es responsable del desarrollo del perfil de velocidad. La región del flujo adyacente a la superficie en la cual los efectos viscosos (y, por lo tanto, los gradientes de velocidad) son significativos se llama **capa límite**. La propiedad del fluido responsable de la condición de no deslizamiento y del desarrollo de la capa límite es la *viscosidad* y se discute brevemente en la sección 6-2.

Una capa de fluido adyacente a una superficie en movimiento tiene la misma velocidad que esta última. Una consecuencia de la condición de no deslizamiento es que todos los perfiles de velocidades deben tener en los puntos de contacto entre un fluido y una superficie sólida los valores cero de velocidad relativa con respecto a la superficie (figura 6-4). Otra consecuencia de la condición de no deslizamiento es el *arrastre superficial*, el cual es la fuerza que un fluido ejerce sobre una superficie, en la dirección del flujo.

Una implicación de la condición de no deslizamiento es que la transferencia de calor de la superficie del sólido hacia la capa de fluido adyacente a esa superficie se da por *conducción pura*, ya que la capa de fluido está inmóvil, y se puede expresar como

$$\dot{q}_{\text{conv}} = \dot{q}_{\text{cond}} = -k_{\text{fluido}} \left. \frac{\partial T}{\partial y} \right|_{y=0} \quad (\text{W/m}^2) \quad (6-3)$$

donde T representa la distribución de temperatura en el fluido y $(\partial T/\partial y)_{y=0}$ es el *gradiente de temperatura* en la superficie. A continuación, este calor *se aleja por convección* de la superficie como resultado del movimiento del fluido. Nótese que la transferencia de calor por convección de una superficie sólida a un fluido es simplemente la transferencia de calor por conducción de esa su-

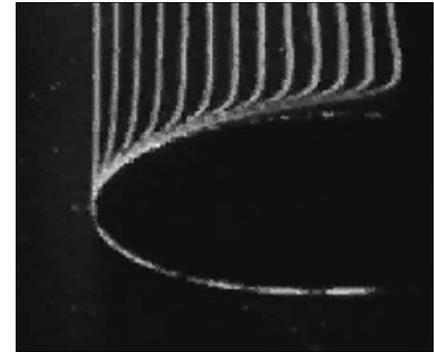


FIGURA 6-3

Desarrollo de un perfil de velocidad debido a la condición de no deslizamiento, conforme un fluido fluye sobre un cuerpo romo.

“Hunter Rouse: *Laminar and Turbulent Flow Film*.”
Copyright IHHR-Hydroscience & Engineering,
The University of Iowa. Usado con autorización.

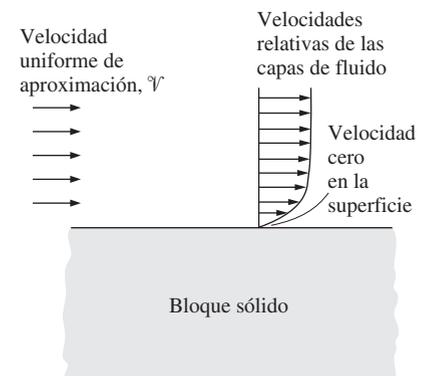


FIGURA 6-4

Un fluido que fluye sobre una superficie estacionaria llega a detenerse por completo en la superficie a causa de la condición de no deslizamiento.

perficie sólida a la capa de fluido adyacente. Por lo tanto, se pueden igualar las ecuaciones 6-1 y 6-3 del flujo de calor, con el fin de obtener

$$h = \frac{-k_{\text{fluido}}(\partial T/\partial y)_{y=0}}{T_s - T_\infty} \quad (\text{W/m}^2 \cdot ^\circ\text{C}) \quad (6-4)$$

para la determinación del *coeficiente de transferencia de calor por convección* cuando se conoce la distribución de temperatura dentro del fluido.

En general, el coeficiente de transferencia de calor por convección varía a lo largo de la dirección del flujo (o dirección x). En esos casos, el coeficiente *promedio* o *medio* de transferencia de calor por convección para una superficie se determina al promediar de manera adecuada los coeficientes *locales* sobre toda esa superficie.

Número de Nusselt

En los estudios sobre convección, es práctica común quitar las dimensiones a las ecuaciones que rigen y combinar las variables, las cuales se agrupan en *números adimensionales*, con el fin de reducir el número de variables totales. También es práctica común quitar las dimensiones del coeficiente de transferencia de calor h con el número de Nusselt, que se define como

$$\text{Nu} = \frac{hL_c}{k} \quad (6-5)$$

donde k es la conductividad térmica del fluido y L_c es la *longitud característica*. Este número recibió el nombre en honor de Wilhelm Nusselt, quien realizó contribuciones significativas a la transferencia de calor por convección durante la primera mitad del siglo xx, y se concibió como el *coeficiente adimensional de transferencia de calor por convección*.

Para comprender el significado físico del número de Nusselt, considere una capa de fluido de espesor L y diferencia de temperatura $\Delta T = T_2 - T_1$, como se muestra en la figura 6-5. La transferencia de calor a través de la capa de fluido será por *convección* cuando esta última tenga algún movimiento y por *conducción* cuando esté inmóvil. En cualquiera de los dos casos, el flujo de calor (la velocidad de transferencia de calor por unidad de tiempo por unidad de área superficial) es

$$\dot{q}_{\text{conv}} = h\Delta T \quad (6-6)$$

y

$$\dot{q}_{\text{cond}} = k \frac{\Delta T}{L} \quad (6-7)$$

Al dividir ambas ecuaciones da

$$\frac{\dot{q}_{\text{conv}}}{\dot{q}_{\text{cond}}} = \frac{h\Delta T}{k\Delta T/L} = \frac{hL}{k} = \text{Nu} \quad (6-8)$$

lo cual es el número de Nusselt. Por lo tanto, el número de Nusselt representa el mejoramiento de la transferencia de calor a través de una capa de fluido como resultado de la convección en relación con la conducción a través de la misma capa. Entre mayor sea el número de Nusselt, más eficaz es la convección. Un número de Nusselt de $\text{Nu} = 1$ para una capa de fluido representa transferencia de calor a través de ésta por conducción pura.

En la vida diaria se usa la convección forzada más de lo que el lector podría pensar (figura 6-6). Se recurre a la convección forzada siempre que se quiera incrementar la velocidad de la transferencia de calor desde un objeto caliente. Por ejemplo, se enciende el ventilador en los días cálidos de verano para ayudar a que nuestro cuerpo se enfríe de manera más eficaz. Entre mayor sea la velocidad del ventilador, mejor se siente. Se *agita* la sopa o se *sopla* sobre una rebanada de pizza caliente para hacer que se enfríen más rápido. En los días in-

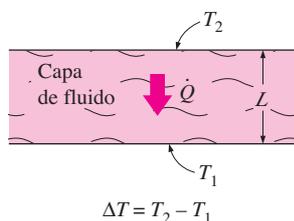


FIGURA 6-5

Transferencia de calor a través de una capa de fluido de espesor L y diferencia de temperatura ΔT .



FIGURA 6-6

Se recurre a la convección forzada siempre que se necesite incrementar la razón de la transferencia de calor.

vernales *de mucho viento* se siente mucho más frío de lo que en realidad hace. La solución más simple para los problemas de calentamiento en el empaque de los dispositivos electrónicos es usar un ventilador suficientemente grande.

6-2 ■ CLASIFICACIÓN DE LOS FLUJOS DE FLUIDOS

La transferencia de calor por convección está íntimamente ligada a la mecánica de fluidos, que es la ciencia que trata del comportamiento de los fluidos en reposo o en movimiento y de su interacción con sólidos o con otros fluidos en las fronteras. Existe una amplia variedad de problemas de flujo de fluidos que se encuentran en la práctica, y suele ser conveniente clasificarlos con base en algunas características comunes para hacer factible su estudio en grupos. Hay varias maneras de clasificar los problemas de flujo de fluidos y, a continuación, se presentan algunas categorías generales.

Región viscosa de flujo en comparación con la no viscosa

Cuando dos capas de fluido se mueven una en relación con la otra, se desarrolla una fuerza de fricción entre ellas, mediante la cual la capa más lenta trata de desacelerar a la más rápida. Esta resistencia interna del fluido al movimiento se cuantifica por la propiedad del fluido conocida como *viscosidad*, que es una medida de la pegajosidad interna de ese fluido. La viscosidad es causada por las fuerzas de cohesión entre las moléculas, en los líquidos, y por las colisiones moleculares, en los gases. No hay fluido con viscosidad cero y, por consiguiente, todos los flujos de fluidos implican efectos viscosos en cierto grado. Los flujos en los que los efectos de la fricción son significativos se conocen como **flujos viscosos**. Sin embargo, en muchos flujos de interés práctico, existen *regiones* (por lo común no cercanas a superficies sólidas) en donde las fuerzas viscosas son despreciablemente pequeñas en comparación con las fuerzas de inercia o de presión. El despreciar los términos viscosos en esas **regiones de flujo no viscoso** simplifica considerablemente el análisis, sin mucha pérdida de exactitud.

En la figura 6-7, se muestra el desarrollo de regiones viscosa y no viscosa de flujo como resultado de la inserción de una placa plana paralela en una corriente de fluido de velocidad uniforme. El fluido se adhiere a la placa en ambos lados, debido a la condición de no deslizamiento, y la delgada capa límite en la cual los efectos viscosos son significativos, cercana a la superficie de la placa, es la *región de flujo viscoso*. La región del flujo en ambos lados, alejada de la placa y que no es afectada por la presencia de ésta, es la *región de flujo no viscoso*.

Flujo interno en comparación con el externo

El flujo de un fluido se clasifica como interno o externo, dependiendo de si se fuerza ese fluido a fluir en un canal confinado o sobre una superficie. El flujo de un fluido no confinado sobre una superficie del tipo de una placa, un alambre o un tubo es **flujo externo**. El flujo en un tubo o ducto es **flujo interno** si el fluido está por completo limitado por superficies sólidas. Por ejemplo, el flujo de agua en un tubo es interno y el de aire sobre una pelota o sobre un tubo expuesto durante un día con viento es flujo externo (figura 6-8). El flujo de líquidos en un ducto se menciona como *flujo en canal abierto* si ese ducto sólo está lleno en forma parcial con el líquido y se tiene una superficie libre. Los flujos de agua en los ríos y zanjas de irrigación son ejemplos de esos flujos.

Los flujos internos son dominados por la influencia de la viscosidad en toda la extensión del campo de flujo. En los externos, los efectos viscosos se limitan a las capas límite cercanas a las superficies sólidas y a las regiones de la estela que se ubica atrás de los cuerpos.

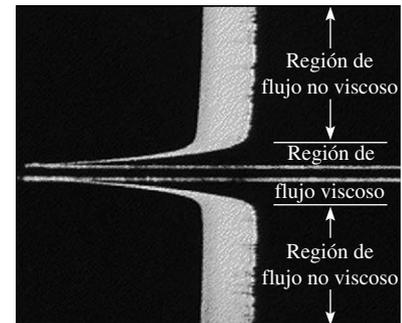


FIGURA 6-7

Flujo de fluido de una corriente originalmente uniforme sobre una placa plana y las regiones de flujo viscoso (próximas a la placa en ambos lados), así como no viscoso (lejos de la placa).

Fundamentals of Boundary Layers, National Committee from Fluid Mechanics Films, © Education Development Center.

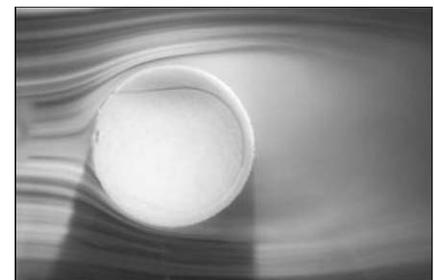


FIGURA 6-8

Flujo externo sobre una pelota de tenis y la región de la estela turbulenta detrás.

Cortesía de la NASA y Cislunar Aerospace, Inc.

Flujo compresible en comparación con el incompresible

Un flujo se clasifica como *compresible* o *incompresible*, dependiendo de la variación de la densidad en el flujo. La incompresibilidad es una aproximación y se dice que un flujo es **incompresible** si la densidad permanece casi constante en toda la extensión del flujo. Por lo tanto, el volumen de todas las porciones del fluido permanece inalterado durante su movimiento, cuando el flujo (o el fluido) es incompresible.

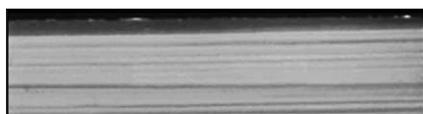
En esencia, las densidades de los líquidos son constantes, de donde es típico que el flujo de éstos sea incompresible. Por lo tanto, suele mencionarse que los líquidos son *sustancias incompresibles*. Por ejemplo, una presión de 210 atm causa que la densidad del agua líquida a 1 atm cambie en sólo 1%. Por otra parte, los gases son altamente compresibles. Por ejemplo, un cambio en la presión de sólo 0.01 atm causa un cambio de 1% en la densidad del aire atmosférico.

Los flujos de los líquidos, con una buena precisión, son incompresibles, pero la variación en la densidad en los flujos de gases y, como consecuencia, la exactitud de aproximación que se hace al modelar esos flujos como incompresibles depende del número de Mach, definido como $Ma = V/c$, en donde c es la **velocidad del sonido** cuyo valor es de 346 m/s en aire a la temperatura ambiente al nivel del mar. A menudo, los flujos de gases se consideran incompresibles si los cambios en la densidad están por debajo de alrededor de 5%, que suele ser el caso cuando $Ma < 0.3$. Por lo tanto, se pueden despreciar los efectos de la compresibilidad del aire a velocidades por debajo de alrededor de 100 m/s. Nótese que el flujo de un gas no es necesariamente compresible.

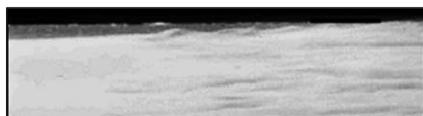
Aun los cambios pequeños en la densidad de los líquidos correspondientes a grandes cambios en la presión pueden tener consecuencias importantes. Por ejemplo, el irritante “golpe de ariete hidráulico” en un tubo de agua es causado por las vibraciones de éste generadas por la reflexión de las ondas de presión que se tienen después del cierre repentino de las válvulas.

Flujo laminar en comparación con el turbulento

Algunos flujos son suaves y ordenados, mientras que otros son un tanto caóticos. El movimiento de fluidos intensamente ordenado, caracterizado por capas suaves, se conoce como **laminar**. La palabra *laminar* proviene del movimiento de las partículas adyacentes de fluido reunidas en “láminas”. El flujo de los fluidos altamente viscosos, como los aceites a bajas velocidades, comúnmente es laminar. El movimiento altamente desordenado de los fluidos que, en general, se tiene a altas velocidades y que se caracteriza por fluctuaciones en la velocidad se conoce como **turbulento** (figura 6-9). Lo común es que el flujo de fluidos de baja viscosidad, como el aire a altas velocidades, sea turbulento. El régimen de flujo influye mucho en la potencia requerida para el bombeo. Un flujo que se alterna entre laminar y turbulento se conoce como **de transición**.



Laminar



De transición



Turbulento

FIGURA 6-9

Flujos laminar, de transición y turbulento.

Cortesía de ONERA, fotografía tomada por Werlé.

Flujo natural (o no forzado) en comparación con el forzado

Se dice que el flujo de un fluido es natural o forzado, dependiendo de la manera en que se inicia el movimiento de ese fluido. En el **flujo forzado**, se obliga a un fluido a desplazarse sobre una superficie o dentro de un tubo por medios externos, como una bomba o un ventilador. En los **flujos naturales**, cualquier movimiento del fluido se debe a medios naturales, como el efecto de flotación, que se manifiesta como la subida del fluido cálido (y, por consiguiente, más ligero) y la caída del más frío (y, por lo tanto, más denso) (figura 6-10). Por

ejemplo, en los colectores solares para calentamiento de agua, se utiliza el efecto de termosifón con el fin de reemplazar las bombas al colocar el tanque de agua suficientemente arriba de los colectores solares.

Flujo estacionario en comparación con el no estacionario

En ingeniería, se usan con frecuencia los términos *estacionario* y *uniforme*; por consiguiente, es importante tener una comprensión clara de sus significados. El término estacionario implica que *no hay cambio en un punto con el tiempo*. Lo opuesto a estacionario es no estacionario. El término **uniforme** implica que *no hay cambio con respecto a la posición* en una región especificada. Estos significados son coherentes con su uso cotidiano [amiga estable (*estacionaria*), distribución uniforme, etcétera].

Los términos *no estacionario* y *transitorio* con frecuencia se usan en forma intercambiable, pero no son sinónimos. En mecánica de fluidos, *no estacionario* es el término más general que se aplica a cualquier flujo que no es estacionario, y, normalmente, **transitorio** se usa para flujos en desarrollo. Por ejemplo, cuando se enciende un motor del cohete se tiene efectos transitorios (la presión se desarrolla en el interior del motor, el flujo se acelera, etcétera) hasta que el motor se estabiliza y opera en forma estacionaria. El término **periódico** se refiere a la clase de flujo no estacionario en la cual el flujo oscila en torno de una media estacionaria.

Muchos dispositivos, como las turbinas, los compresores, las calderas, los condensadores y los intercambiadores de calor, operan durante largos periodos en las mismas condiciones y se clasifican como *dispositivos de flujo estacionario*. (Nótese que, por supuesto, el campo de flujo cercano a las álabes de una turbomáquina es no estacionario, pero, cuando se clasifican los aparatos, se considera el campo de flujo total, en lugar de los detalles en algunos lugares). En el flujo estacionario, las propiedades del fluido pueden cambiar de punto a punto dentro de un dispositivo, pero en cualquier punto fijo permanecen constantes. Por lo tanto, el volumen, la masa y la cantidad total de energía de un dispositivo de flujo estacionario o una porción de flujo estacionario permanecen constantes en condiciones de la operación estacionaria.

Se puede tener una aproximación muy cercana de las condiciones de flujo estacionario debido a aparatos que se pretende sean para operación continua, como las turbinas, las bombas, las calderas, los condensadores y los intercambiadores de calor de las plantas generadoras de energía eléctrica o los sistemas de refrigeración. Algunos dispositivos cíclicos, como los motores o compresores recíprocos, no satisfacen las condiciones de flujo estacionario, ya que éste es pulsante y no estacionario en las admisiones y las salidas. Sin embargo, las propiedades del fluido varían con el tiempo de una manera periódica, y el flujo a través de estos dispositivos incluso se puede analizar como un proceso de flujo estacionario, utilizando los valores promediados en el tiempo para las propiedades.

Flujos unidimensional, bidimensional y tridimensional

Un campo de flujo se caracteriza de la mejor manera por la distribución de velocidades y, de este modo, se dice que un flujo es unidimensional, bidimensional o tridimensional si la velocidad del mismo varía en una, dos o tres direcciones de coordenadas espaciales, respectivamente. El flujo típico de un fluido comprende una configuración geométrica tridimensional y la velocidad puede variar en las tres direcciones, dando lugar al flujo tridimensional [$\vec{V}(x, y, z)$, en coordenadas rectangulares, o $\vec{V}(r, \theta, z)$, en coordenadas cilíndricas].

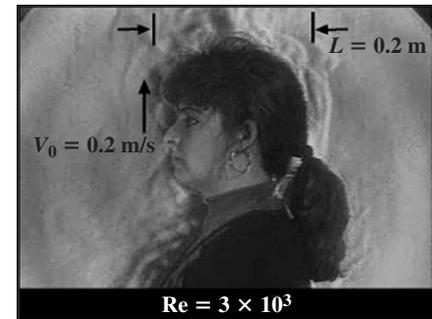


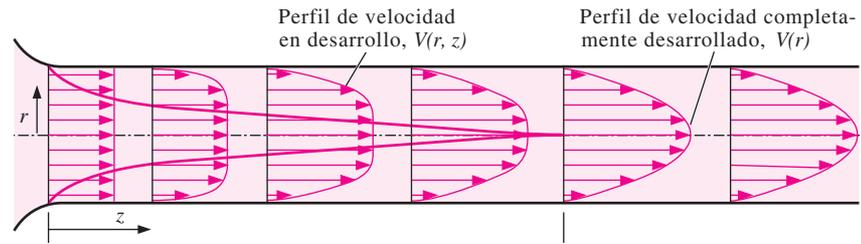
FIGURA 6-10

En esta imagen estrioscópica de una muchacha, la subida del aire cálido, más ligero, adyacente a su cuerpo indica que los humanos y los animales de sangre caliente estamos rodeados de columnas térmicas de aire cálido que sube.

G. S. Settles, Gas Dynamics Lab.
Penn State University. Usado con autorización.

FIGURA 6-11

Desarrollo del perfil de velocidad en un tubo circular. $V = V(r, z)$, de donde el flujo es bidimensional en la región de entrada y se vuelve unidimensional corriente abajo, cuando el perfil de velocidad se desarrolla por completo y permanece inalterado en la dirección del flujo, $V = V(r)$.



No obstante, la variación de la velocidad en ciertas direcciones puede ser pequeña en relación con la variación en otras, y se puede ignorar con el error despreciable. En esos casos, el flujo se puede modelar de manera conveniente como si fuera unidimensional o bidimensional, que son más fáciles de analizar.

Considérese el flujo estacionario de un fluido que pasa por un tubo circular unido a un tanque grande. La velocidad del fluido en todos los puntos sobre la superficie del tubo es cero, debido a la condición de no deslizamiento, y el flujo es bidimensional en la región de entrada de ese tubo, ya que la velocidad cambia tanto en la dirección r como en la z . El perfil de velocidad se desarrolla por completo y permanece inalterado después de recorrida cierta distancia desde la entrada (alrededor de 10 diámetros de tubo en el flujo turbulento y menos en el laminar), y se dice que, en esta región, el flujo está *completamente desarrollado*. El flujo completamente desarrollado en un tubo circular es *unidimensional*, ya que la velocidad varía en la dirección radial, pero no en las direcciones angular θ o axial z , como se muestra en la figura 6-11. Es decir, el perfil de velocidad es el mismo en cualquier ubicación axial z y es simétrico respecto al eje del tubo.

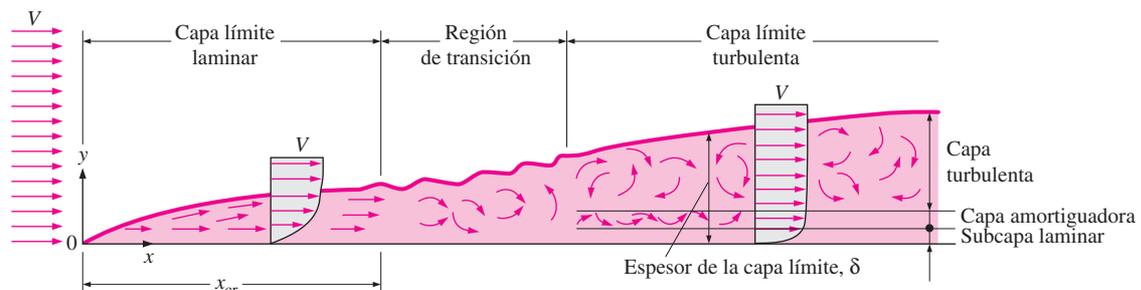
Nótese que la dimensionalidad del flujo también depende de la elección del sistema de coordenadas y de su orientación. Por ejemplo, como ya se dijo, el flujo en un tubo es unidimensional en coordenadas cilíndricas, pero bidimensional en cartesianas, lo que ilustra la importancia de la elección del sistema más apropiado de coordenadas. Nótese también que, incluso en este flujo sencillo, la velocidad no puede ser uniforme de uno a otro lado de la sección transversal del tubo, debido a la condición de no deslizamiento. Sin embargo, en una entrada bien redondeada del tubo, se puede obtener una aproximación del perfil de velocidad como si fuera casi uniforme de uno a otro lado del tubo, ya que la velocidad es casi constante en todos los radios, excepto muy cerca de la pared del propio tubo.

6-3 ■ CAPA LÍMITE DE LA VELOCIDAD

Considere el flujo paralelo de un fluido sobre una *placa plana*, como se muestra en la figura 6-12. Las superficies que están torneadas de manera ligera, como los álabes de las turbinas, también se pueden considerar como placas planas con precisión razonable. La coordenada x se mide a lo largo de la superficie de la placa, desde el *borde de ataque* de esta última, en la dirección

FIGURA 6-12

Desarrollo de la capa límite para el flujo sobre una placa plana y los diferentes regímenes de flujo.



del flujo y la y se mide desde esa superficie, en la dirección perpendicular. El fluido se aproxima a la placa en la dirección x con una velocidad uniforme superior V , la cual es prácticamente idéntica a la velocidad de la corriente libre sobre la placa, lejos de la superficie (éste no sería el caso para el flujo cruzado sobre objetos romos, como un cilindro).

En beneficio de la discusión, se puede considerar que el fluido consta de capas adyacentes apiladas una sobre la otra. La velocidad de las partículas en la primera capa de fluido adyacente a la placa se vuelve cero debido a la condición de no resbalamiento. Esta capa inmóvil retarda las partículas de la capa vecina como resultado de la fricción de las partículas de ambas capas adjuntas que tienen velocidades diferentes. Esta última capa retarda las moléculas de la capa siguiente, y así sucesivamente. Por tanto, la presencia de la placa se siente hasta cierta distancia normal δ a partir de ella, más allá de la cual la velocidad de la corriente libre permanece esencialmente inalterada. Como resultado, la componente x de la velocidad del fluido, u , varía desde 0, en $y = 0$, hasta casi V , en $y = \delta$ (figura 6-13).

La región del flujo arriba de la placa y limitada por δ , en la cual se sienten los efectos de las fuerzas cortantes viscosas causadas por la viscosidad del líquido se llama **capa límite de la velocidad**. El *espesor de la capa límite*, δ , por lo común se define como la distancia y tomada desde la superficie, a partir de la cual $u = 0.99V$

La recta hipotética de $u = 0.99V$ divide el flujo sobre una placa en dos regiones: la **región de la capa límite**, en la cual los efectos viscosos y los cambios de la velocidad son significativos, y la **región del flujo no viscoso**, en la cual los efectos de la fricción son despreciables y la velocidad permanece esencialmente constante.

Esfuerzo cortante superficial

Considere el flujo de un fluido sobre la superficie de una placa. La capa de fluido en contacto con la superficie tratará de arrastrar a la placa por efecto de la fricción, al ejercer una *fuerza de fricción* sobre ella. De modo semejante, una capa de fluido más rápida trata de arrastrar a la capa adyacente más lenta y ejercerá una fuerza de fricción en virtud de la fricción entre las dos. La fuerza de fricción por unidad de área se llama **esfuerzo cortante** y se denota por τ . Los estudios experimentales indican que, para la mayor parte de los fluidos, el esfuerzo cortante es proporcional al *gradiente de velocidad*, y el esfuerzo cortante en la superficie de la pared es expresada como

$$\tau_s = \mu \left. \frac{\partial u}{\partial y} \right|_{y=0} \quad (\text{N/m}^2) \quad (6-9)$$

donde la constante de proporcionalidad μ se llama **viscosidad dinámica** del fluido, cuya unidad es $\text{kg/m} \cdot \text{s}$ (o, lo que es equivalente, $\text{N} \cdot \text{s/m}^2$, o sea, $\text{Pa} \cdot \text{s}$, o bien, el poise = $0.1 \text{ Pa} \cdot \text{s}$).

Los fluidos que obedecen la relación lineal antes dada reciben el nombre de **fluidos newtonianos**, en honor de Sir Isaac Newton, quien la expresó por primera vez en 1687. Los fluidos más comunes, como el agua, el aire, la gasolina y los aceites, son newtonianos. La sangre y los líquidos plásticos son ejemplos de fluidos no newtonianos. En este texto sólo se consideran los fluidos newtonianos.

En los estudios de flujo de fluidos y de transferencia de calor con frecuencia aparece la razón de la viscosidad dinámica con respecto a la densidad. Por conveniencia, a esta razón se le da el nombre de **viscosidad cinemática** ν y se expresa como $\nu = \mu/\rho$. Dos unidades comunes de la viscosidad cinemática son el m^2/s y el *stoke* ($1 \text{ stoke} = 1 \text{ cm}^2/\text{s} = 0.0001 \text{ m}^2/\text{s}$).

La viscosidad de un fluido es una medida de su *resistencia a la deformación* y es una fuerte función de la temperatura. Las viscosidades de los líquidos de-

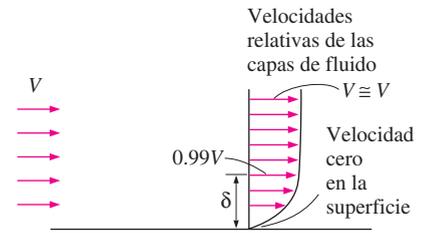


FIGURA 6-13

El desarrollo de una capa límite sobre una superficie se debe a la condición de no deslizamiento.

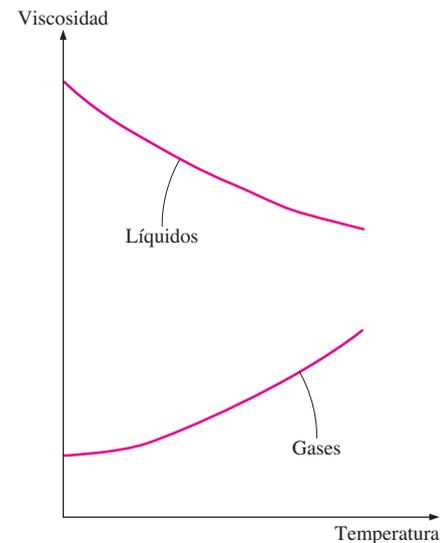


FIGURA 6-14

La viscosidad de los líquidos decrece y la de los gases aumenta con la temperatura.

TABLA 6-1

Viscosidades dinámicas de algunos fluidos a 1 atm y 20°C (a menos que se especifique otra cosa)

Fluido	Viscosidad dinámica μ , kg/m · s
Glicerina:	
-20°C	134.0
0°C	12.1
20°C	1.49
40°C	0.27
Aceite para motor:	
SAE 10W	0.10
SAE 10W30	0.17
SAE 30	0.29
SAE 50	0.86
Mercurio	0.0015
Alcohol etílico	0.0012
Agua:	
0°C	0.0018
20°C	0.0010
100°C (líquida)	0.0003
100°C (vapor)	0.000013
Sangre, 37°C	0.0004
Gasolina	0.00029
Amoniaco	0.00022
Aire	0.000018
Hidrógeno, 0°C	0.000009

crecen con la temperatura, en tanto que las de los gases *aumentan* con ella (figura 6-14). En la tabla 6-1, se da una lista de las viscosidades de algunos fluidos a 20°C. Nótese que las viscosidades de fluidos diferentes difieren en varios órdenes de magnitud.

La determinación del esfuerzo cortante superficial τ_s , a partir de la ecuación 6-9 no es práctica, ya que requiere conocimiento del perfil de velocidades del fluido. Un procedimiento más práctico en el flujo externo es relacionar τ_s con la velocidad corriente superior, V , como

$$\tau_s = C_f \frac{\rho V^2}{2} \quad (\text{N/m}^2) \quad (6-10)$$

donde C_f es el **coeficiente de fricción** adimensional, cuyo valor, en la mayor parte de los casos, se determina en forma experimental, y ρ es la densidad del fluido. Nótese que, en general, el coeficiente de fricción variará con la ubicación a lo largo de la superficie. Una vez que se dispone del coeficiente de fricción promedio sobre una superficie dada, la fuerza de fricción sobre la superficie completa se determina a partir de

$$F_f = C_f A_s \frac{\rho V^2}{2} \quad (\text{N}) \quad (6-11)$$

donde A_s es el área superficial.

El coeficiente de fricción es un parámetro importante en los estudios de transferencia de calor ya que está directamente relacionado con el coeficiente de transferencia de calor y con los requisitos de potencia de la bomba o el ventilador.

6-4 ■ CAPA LÍMITE TÉRMICA

Se ha visto que se desarrolla una capa límite de la velocidad cuando un fluido fluye sobre una superficie como resultado de que la capa de fluido adyacente a la superficie tome la velocidad de ésta (es decir, velocidad cero en relación con la superficie). Asimismo, se define la capa límite de la velocidad como la región en la cual la velocidad del fluido varía desde cero hasta 0.99 V . De modo semejante, se desarrolla una *capa límite térmica* cuando un fluido a una temperatura específica fluye sobre una superficie que está a una temperatura diferente, como se muestra en la figura 6-15.

Considere el flujo de un fluido a una temperatura uniforme de T_∞ sobre una placa plana isotérmica a la temperatura T_s . Las partículas de fluido en la capa adyacente a la superficie alcanzan el equilibrio térmico con la placa y tomarán la temperatura superficial T_s . Entonces, estas partículas de fluido intercambiarán energía con las partículas que están en la capa de fluido adjunta, y así sucesivamente. Como resultado, se desarrolla un perfil de temperaturas en el campo de flujo que va desde T_s en la superficie, hasta T_∞ suficientemente lejos de ésta. La región del flujo sobre la superficie en la cual la variación de la temperatura en la dirección normal a la superficie es significativa es la **capa límite térmica**. El *espesor* de la capa límite térmica δ_t en cualquier lugar a lo largo de la superficie se define como *la distancia, desde la superficie, a la cual la diferencia de temperatura $T - T_s$ es igual a 0.99($T_\infty - T_s$)*. Nótese que para el caso especial de $T_s = 0$, se tiene $T = 0.99T_\infty$ en el borde exterior del límite térmico, lo cual es análogo a $u = 0.99V$ para la capa límite de la velocidad.

El espesor de la capa límite térmica aumenta en la dirección del flujo, ya que, corriente más abajo, se sienten los efectos de la transferencia de calor a distancias más grandes de la superficie.

La razón de la transferencia de calor por convección en cualquier parte a lo largo de la superficie está relacionada directamente con el gradiente de temperatura en ese lugar. Por lo tanto, la forma del perfil de temperaturas en la capa límite térmica impone la transferencia de calor por convección entre la super-

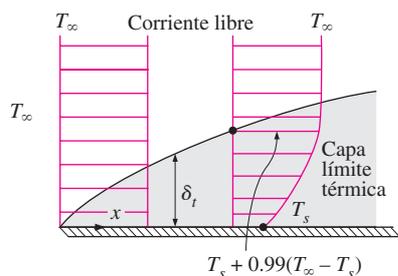


FIGURA 6-15

Capa límite térmica sobre una placa plana (el fluido está más caliente que la superficie de la placa).

ficie sólida y el fluido que fluye sobre ella. En el flujo sobre una superficie calentada (o enfriada), tanto la capa límite de la velocidad como la térmica se desarrollan en forma simultánea. Dado que la velocidad del fluido tendrá una fuerte influencia sobre el perfil de temperaturas, el desarrollo de la capa límite de la velocidad en relación con la térmica tendrá un fuerte efecto sobre la transferencia de calor por convección.

Número de Prandtl

La mejor manera de describir el espesor relativo de las capas límite de velocidad y térmica es por medio del parámetro **número de Prandtl** adimensional, definido como

$$Pr = \frac{\text{Difusividad molecular de la cantidad de movimiento}}{\text{Difusividad molecular del calor}} = \frac{\nu}{\alpha} = \frac{\mu c_p}{k} \quad (6-12)$$

Su nombre se debe a Ludwig Prandtl, quien introdujo el concepto de capa límite en 1904, y realizó colaboraciones significativas a la teoría de la capa límite. Los números de Prandtl de los fluidos van desde menos de 0.01 para los metales líquidos, hasta más de 100 000 para los aceites pesados (tabla 6-2). Nótese que el número de Prandtl es del orden de 10 para el agua.

Los números de Prandtl para los gases son de alrededor de 1, lo cual indica que tanto la cantidad de movimiento como el calor se disipan a través del fluido a más o menos la misma velocidad. El calor se difunde con mucha rapidez en los metales líquidos ($Pr \ll 1$) y con mucha lentitud en los aceites ($Pr \gg 1$) en relación con la cantidad de movimiento. Como consecuencia, la capa límite térmica es mucho más gruesa para los metales líquidos y mucho más delgada para los aceites, en relación con la capa límite de la velocidad.

6-5 ■ FLUJOS LAMINAR Y TURBULENTO

Si el lector ha estado cerca de fumadores, es probable que haya advertido que el humo de los cigarrillos se eleva en una columna suave mientras recorre los primeros centímetros y, a continuación, empieza a fluctuar al azar en todas direcciones mientras sigue elevándose. Otras columnas de humo se comportan de manera semejante (figura 6-16). Del mismo modo, una inspección cuidadosa del flujo en un tubo revela que el flujo del fluido sigue líneas de corriente suaves a velocidades bajas, pero se vuelve caótico conforme se incrementa la velocidad por encima de un valor crítico, como se muestra en la figura 6-17. En el primer caso, se dice que el régimen de flujo es **laminar**, caracterizado por *líneas suaves de corriente* y un *movimiento altamente ordenado*; en el segundo caso es **turbulento** y se caracteriza por *fluctuaciones en la velocidad* y un *movimiento altamente desordenado*. La **transición** de flujo laminar al turbulento no ocurre en forma repentina; por el contrario, tiene lugar sobre cierta región en la que el flujo fluctúa entre laminar y turbulento, antes de volverse por completo turbulento. La mayor parte de los flujos que se encuentran en la práctica son turbulentos. Existe flujo laminar cuando fluidos fuertemente viscosos, como los aceites, fluyen en tubos pequeños o ductos estrechos.

Se puede verificar la existencia de estos regímenes de flujo laminar, de transición y turbulento al inyectar una vena de tintura en el flujo en un tubo de vidrio, como lo hizo el científico británico Osborn Reynolds (1842-1912) hace más de un siglo. Se observa que la vena de tintura formará una *línea recta* y *suave* a bajas velocidades, cuando el flujo es laminar (es posible que se vea un tanto borrosa debido a la difusión molecular) tiene *ráfagas de fluctuaciones* en el régimen de transición y *zigzagueará con rapidez* y *de manera aleatoria* cuando el flujo se vuelve por completo turbulento. Estas trayectorias en zigzag y la dispersión de la tintura son indicativas de las fluctuaciones en el flujo principal y el mezclado rápido de las partículas de fluido de capas adyacentes.

TABLA 6-2

Rangos típicos de los números de Prandtl para fluidos comunes

Fluido	Pr
Metales líquidos	0.004-0.030
Gases	0.7-1.0
Agua	1.7-13.7
Fluidos orgánicos ligeros	5-50
Aceites	50-100 000
Glicerina	2 000-100 000

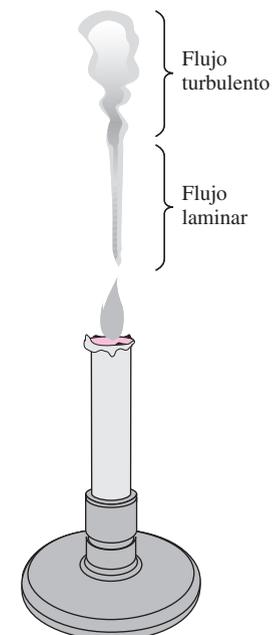


FIGURA 6-16

Regímenes de flujo laminar y turbulento del humo de una vela.

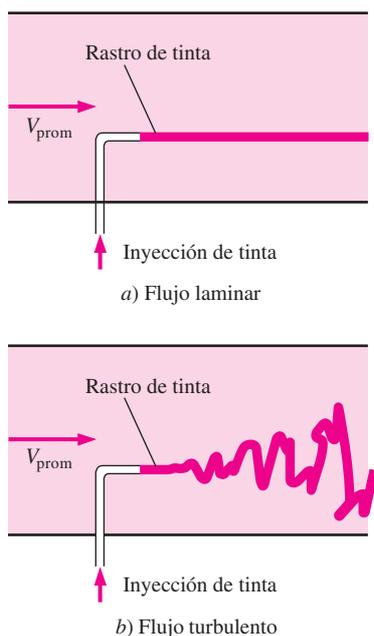


FIGURA 6-17

Comportamiento del fluido coloreado inyectado en el flujo, en los flujos laminar y turbulento, en un tubo.

En la figura 6-12, también se dan perfiles típicos de velocidad promedio en flujo laminar y turbulento. Nótese que, en el turbulento, el perfil de velocidad está mucho más lleno que en el laminar, con una caída brusca cerca de la superficie. Se puede considerar que la capa límite turbulenta consta de cuatro regiones, caracterizadas por la distancia que hay hasta la pared. La capa muy delgada cercana a la pared, en donde los efectos viscosos son dominantes, es la **subcapa viscosa**. En ésta, el perfil de velocidad es muy cercano al *lineal* y el flujo se presenta en líneas de corriente suaves. A continuación está la **capa intermedia**, en la cual los efectos turbulentos se vuelven más significativos, pero el flujo todavía es dominado por los efectos viscosos. Arriba de la capa intermedia está la **capa de traslape**, en la cual los efectos turbulentos son mucho más significativos, pero todavía no dominantes. Arriba de ésta se encuentra la **capa turbulenta**, en la cual los efectos turbulentos dominan sobre los viscosos.

El *mezclado intenso* del fluido en el flujo turbulento, como resultado de las fluctuaciones rápidas, mejora la transferencia del calor y de la cantidad de movimiento entre las partículas de ese fluido, lo cual incrementa la fuerza de fricción sobre la superficie y la velocidad de la transferencia de calor por convección. También causa que se agrande la capa límite. Tanto el coeficiente de fricción como el de transferencia de calor alcanzan sus valores máximos cuando el flujo se vuelve *por completo turbulento*. De modo que no causará sorpresa que se realice un esfuerzo especial en el diseño de los coeficientes de transferencia de calor asociados con el flujo turbulento. Sin embargo, el mejoramiento de la transferencia de calor en el flujo turbulento no es libre. Es posible que sea necesario usar una bomba más grande para vencer las fuerzas de fricción más grandes que vienen acompañando a la velocidad más alta de la transferencia de calor.

Número de Reynolds

La transición de flujo laminar a turbulento depende de la *configuración geométrica de la superficie*, de la *aspereza superficial*, de la *velocidad del flujo*, de la *temperatura de la superficie* y del *tipo de fluido*, entre otras cosas. Después de experimentos exhaustivos, en la década de 1880, Osborn Reynolds descubrió que el régimen de flujo depende principalmente de la razón de las *fuerzas de inercia* a las *fuerzas viscosas* en el fluido. Esta razón se conoce como **número de Reynolds**, el cual es una cantidad *adimensional* y se expresa para el flujo externo como (figura 6-18):

$$\text{Re} = \frac{\text{Fuerzas de inercia}}{\text{Fuerzas viscosas}} = \frac{VL_c}{\nu} = \frac{\rho VL_c}{\mu} \quad (6-13)$$

donde V es la velocidad corriente superior (equivalente a la velocidad de la corriente libre para una placa plana), L_c es la longitud característica de la configuración geométrica y $\nu = \mu/\rho$ es la viscosidad cinemática del fluido. Para una placa plana, la longitud característica es la distancia x desde el borde de ataque. Nótese que la viscosidad cinemática tiene la unidad de m^2/s , que es idéntica a la de la difusividad térmica, y se puede concebir como la *difusividad viscosa* o la *difusividad para la cantidad de movimiento*.

A números de Reynolds *grandes*, las fuerzas de inercia, que son proporcionales a la densidad y a la velocidad del fluido, son grandes en relación con las fuerzas viscosas y, como consecuencia, estas últimas no pueden impedir las fluctuaciones aleatorias y rápidas del fluido. Sin embargo, a números de Reynolds *pequeños* o *moderados*, las fuerzas viscosas son suficientemente grandes como para suprimir estas fluctuaciones y mantener “alineado” el fluido. Por lo tanto, en el primer caso el flujo es *turbulento* y en el segundo, *laminar*.

El número de Reynolds en el cual el flujo se vuelve turbulento se llama **número crítico de Reynolds**. El valor de este número crítico es diferente para configuraciones geométricas diferentes. Para el flujo sobre una placa plana, el

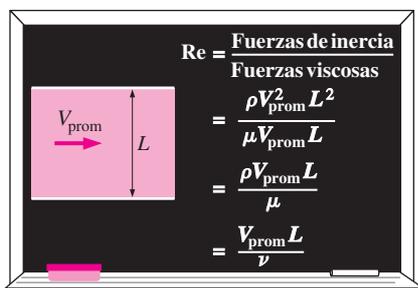


FIGURA 6-18

El número de Reynolds se puede concebir como la razón entre las fuerzas de inercia y las fuerzas viscosas que actúan sobre el elemento de un fluido.

valor aceptado en general del número crítico de Reynolds es $Re_{cr} = Vx_{cr}/\nu = 5 \times 10^5$, donde x_{cr} es la distancia desde el borde de ataque de la placa a la cual ocurre la transición de flujo laminar a turbulento. No obstante, el valor de Re_{cr} puede cambiar de manera sustancial dependiendo del nivel de turbulencia en la corriente libre.

6-6 ■ TRANSFERENCIA DE CALOR Y DE CANTIDAD DE MOVIMIENTO EN EL FLUJO TURBULENTO

La mayor parte de los flujos que se encuentran en la práctica de ingeniería son turbulentos y, como consecuencia, es importante comprender de qué manera la turbulencia afecta el esfuerzo cortante en la superficie y la transferencia de calor. Sin embargo, el flujo turbulento es un mecanismo complejo dominado por fluctuaciones y, a pesar de las grandes cantidades de trabajo realizadas en esta área por los investigadores, la teoría del flujo turbulento permanece esencialmente no desarrollada aún. Por lo tanto, debe encontrarse apoyo en los experimentos y en las relaciones empíricas o semiempíricas desarrolladas para varias situaciones.

El flujo turbulento se caracteriza por fluctuaciones aleatorias y rápidas de regiones arremolinadas del fluido, llamadas **remolinos**, que se encuentran en toda su extensión. Estas fluctuaciones proporcionan un mecanismo adicional para la transferencia de la cantidad de movimiento y de la energía. En el flujo laminar, las partículas del fluido se desplazan de una manera ordenada a lo largo de trayectorias, y la cantidad de movimiento y la energía se transfieren de uno a otro lado de las líneas de corriente mediante difusión molecular. En el flujo turbulento, los remolinos transportan masa, cantidad de movimiento y energía hacia otras regiones del flujo, con una rapidez mucho mayor que la de la difusión molecular, mejorando esencialmente la transferencia de masa, de cantidad de movimiento y de calor. Como resultado, el flujo turbulento se asocia con valores considerablemente más altos de los coeficientes de fricción, de transferencia de calor y de transferencia de masa (figura 6-19).

Incluso cuando el flujo promedio es estacionario, el movimiento de los remolinos en el flujo turbulento causa fluctuaciones significativas en los valores de la velocidad, la temperatura y la presión, y hasta de la densidad (en el flujo compresible). En la figura 6-20, se muestra la variación de la componente u de la velocidad instantánea con el tiempo, en un lugar especificado, que se puede medir con un anemómetro de hilo caliente o cualquier otro instrumento de medición suficientemente sensible. Se observa que los valores instantáneos de la velocidad fluctúan en torno de un valor promedio, lo cual sugiere que la velocidad se puede expresar como la suma de un *valor promedio* \bar{u} y una *componente fluctuante* u' ,

$$u = \bar{u} + u' \quad (6-14)$$

Éste también es el caso para otras propiedades, como la componente v de la velocidad, en la dirección y , de donde $v = \bar{v} + v'$, $P = \bar{P} + P'$, y $T = \bar{T} + T'$. El valor promedio de una propiedad en algún lugar se determina al promediarlo sobre un intervalo de tiempo que sea suficientemente grande, de modo que el promedio respecto al tiempo resulta ser una constante. Por lo tanto, el promedio respecto al tiempo de las componentes fluctuantes es cero; por ejemplo, $\bar{u}' = 0$. La magnitud de u' suele ser sólo un porcentaje muy pequeño de \bar{u} , pero la alta frecuencia de los remolinos (en el orden de un millar por segundo) los hace muy eficaces para el transporte de la cantidad de movimiento, la energía térmica y la masa. En el flujo turbulento *estacionario* promediado respecto al tiempo, los valores promedios de las propiedades (indicadas por medio de un guión arriba) son independientes del tiempo. Las

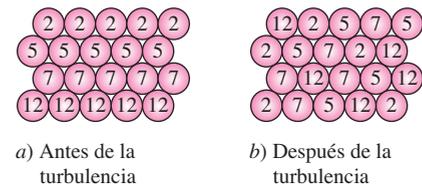


FIGURA 6-19

El intenso mezclado en el flujo turbulento hace que las partículas de fluido a temperaturas diferentes entren en íntimo contacto y, de este modo, mejora la transferencia de calor.

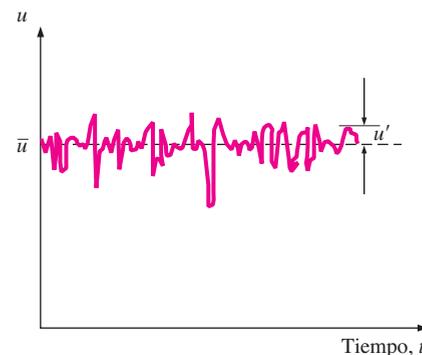


FIGURA 6-20

Fluctuaciones de la componente de la velocidad u con el tiempo, en un lugar específico en el flujo turbulento.

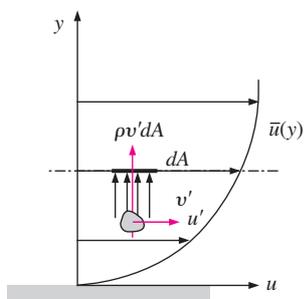


FIGURA 6-21

Partícula de fluido en movimiento hacia arriba a través de un área diferencial, dA , como resultado de la fluctuación v' de la velocidad.

fluctuaciones caóticas de las partículas de fluido desempeñan un papel dominante en la caída de presión, y estos movimientos aleatorios deben considerarse en el análisis junto con la velocidad promedio.

Quizá el primer pensamiento que viene a la mente es determinar el esfuerzo cortante de manera análoga al flujo laminar, a partir de $\tau = -\mu \, d\bar{u}/dr$, donde $\bar{u}(r)$ es el perfil de velocidad promedio para el flujo turbulento. Pero los estudios experimentales muestran que éste no es el caso y que el esfuerzo cortante es mucho más grande debido a las fluctuaciones turbulentas. Por lo tanto, resulta conveniente pensar en el esfuerzo cortante turbulento como formado por dos partes: la *componente laminar*, que explica la fricción entre las capas en la dirección del flujo (expresada como $\tau_{\text{lamm}} = -\mu \, d\bar{u}/dr$), y la *componente turbulenta*, que explica la fricción entre las partículas fluctuantes del fluido y el resto de volumen de éste (denotada como τ_{turb} y que está relacionada con las componentes fluctuantes de la velocidad).

Considérese un flujo turbulento en un tubo horizontal y el movimiento arremolinado hacia arriba de las partículas del fluido de una capa de velocidad más baja hacia otra capa de velocidad más alta, a través de un área diferencial, dA , como resultado de la fluctuación v' en la velocidad, como se muestra en la figura 6-21. El gasto de masa de las partículas de fluido que se elevan a través de dA es $\rho v' dA$, y su efecto neto sobre la capa que se encuentra arriba de dA es una reducción en su velocidad promedio debido a la transferencia de la cantidad de movimiento a las partículas de flujo de una velocidad promedio menor. Esta transferencia de cantidad de movimiento hace que la velocidad horizontal de las partículas de fluido elevándose se incremente en u' y, de este modo, que su cantidad de movimiento en la dirección horizontal se incremente a razón de $(\rho v' dA)u'$, lo cual debe ser igual a la disminución en la cantidad de movimiento de la capa superior de fluido.

Al notar que la fuerza en una dirección dada es igual a la razón de cambio de la cantidad de movimiento en esa dirección, la fuerza horizontal que actúa sobre un elemento de fluido que esté arriba de dA , debido al paso de partículas de fluido a través de ésta, es $\delta F = (\rho v' dA)(-u') = -\rho u' v' dA$. Por lo tanto, la fuerza cortante por unidad de área, debida al movimiento arremolinado de las partículas de fluido $\delta F/dA = -\rho u' v'$ se puede concebir como el esfuerzo cortante turbulento instantáneo. Entonces, el **esfuerzo cortante turbulento** se puede expresar como $\tau_{\text{turb}} = -\rho \overline{u'v'}$ donde $\overline{u'v'}$ es el promedio respecto al tiempo del producto de las componentes fluctuantes, u' y v' , de la velocidad. De manera análoga, si se considera que $h = c_p T$ representa la energía del fluido y T' es la temperatura de los remolinos en relación con el valor medio, la razón del transporte de energía térmica por los remolinos turbulentos es $\dot{q}_{\text{turb}} = \rho c_p \overline{v'T'}$. Nótese que $\overline{u'v'} \neq 0$ aun cuando $\overline{u'} = 0$ y $\overline{v'} = 0$ (de donde, $\overline{u'v'} = 0$), y los resultados experimentales muestran que $\overline{u'v'}$ suele ser una cantidad negativa. Los términos como $-\rho \overline{u'v'}$ o $-\rho \overline{u'^2}$ se llaman **esfuerzos de Reynolds** o **esfuerzos turbulentos**.

El movimiento arremolinado aleatorio de los grupos de partículas se semeja al movimiento aleatorio de las moléculas en un gas, que chocan entre sí después de recorrer una cierta distancia e intercambian cantidad de movimiento y calor en el proceso. Por lo tanto, el transporte de cantidad de movimiento y de calor por los remolinos en las capas límite turbulentas es análogo a la difusión molecular de cantidad de movimiento y de calor. Entonces, el esfuerzo cortante turbulento en la superficie y la transferencia turbulenta de calor se pueden expresar de manera análoga como

$$\tau_{\text{turb}} = -\rho \overline{u'v'} = \mu_t \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} \quad \text{y} \quad \dot{q}_{\text{turb}} = \rho c_p \overline{v'T'} = -k_t \frac{\partial T}{\partial y} \quad (6-15)$$

donde μ_t se llama **viscosidad turbulenta** (o de los **remolinos**), la cual explica el transporte de cantidad de movimiento por parte de los remolinos del flujo

turbulento, y k_t se conoce como **conductividad térmica turbulenta** (o de los **remolinos**), la cual explica el transporte de energía térmica por los remolinos del flujo turbulento. Entonces el esfuerzo cortante total y el flujo total de calor se pueden expresar en forma conveniente como

$$\tau_{\text{total}} = (\mu + \mu_t) \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} = \rho(\nu + \nu_t) \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} \quad (6-16)$$

y

$$\dot{q}_{\text{total}} = -(k + k_t) \frac{\partial \bar{T}}{\partial y} = -\rho c_p (\alpha + \alpha_t) \frac{\partial \bar{T}}{\partial y} \quad (6-17)$$

en donde $\nu_t = \mu_t/\rho$ es la **viscosidad cinemática de los remolinos** (o **difusividad de la cantidad de movimiento de los remolinos**) y $\alpha_t = k_t/\rho c_p$ es la **difusividad térmica de los remolinos** (o **difusividad del calor de los remolinos**).

El movimiento de los remolinos y, por consiguiente, sus difusividades son mucho más grandes que sus contrapartes moleculares en la región central de una capa límite turbulenta. El movimiento de los remolinos pierde su intensidad cerca de la superficie y disminuye en ésta debido a la condición de no deslizamiento. Por lo tanto, los perfiles de velocidad y de temperatura están cambiando con mucha lentitud en la región central de una capa límite turbulenta, pero de manera muy pronunciada en la delgada capa adyacente a la superficie, lo que da como resultado gradientes grandes de velocidad y de temperatura en la superficie. De modo que no es sorprendente que el esfuerzo cortante en la superficie y el flujo de calor en ésta sean mucho más grandes en el flujo turbulento de como son en el flujo laminar (figura 6-22).

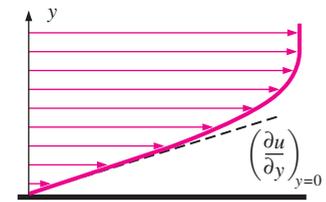
Nótese que las difusividades moleculares ν y α (así como μ y k) son propiedades del fluido y sus valores se pueden hallar listados en los manuales sobre fluidos. No obstante, las difusividades de remolinos ν_t y α_t (así como μ_t y k_t) no son propiedades del fluido y sus valores dependen de las condiciones del flujo. Las difusividades de remolinos ν_t y α_t decrecen en la dirección hacia la superficie, volviéndose cero en ésta. Sus valores van desde cero en la superficie hasta varios miles de veces los valores de las difusividades moleculares en la región central.

6-7 ■ DEDUCCIÓN DE LAS ECUACIONES DIFERENCIALES DE LA CONVECCIÓN*

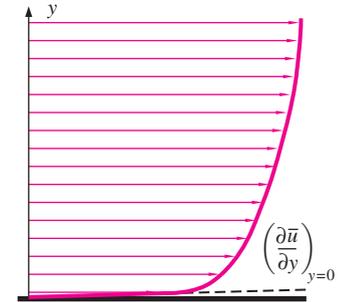
En esta sección se deducen las ecuaciones del flujo de fluidos que rigen en las capas límite. Con el fin de mantener el análisis en un nivel que pueda manejarse, se supondrá que el flujo es estacionario y bidimensional, y que el fluido es newtoniano con propiedades constantes (densidad, viscosidad, conductividad térmica, etcétera).

Considere el flujo paralelo de un fluido sobre una superficie. Tome la dirección del flujo a lo largo de la superficie como la x y la dirección perpendicular a la superficie como la y , y, para el análisis, elija un elemento diferencial de volumen de longitud dx , altura dy y profundidad unitaria en la dirección z (perpendicular al papel) (figura 6-23). El fluido fluye sobre la superficie con una velocidad uniforme de la corriente libre V , pero la velocidad dentro de la capa límite es bidimensional: la componente x de la velocidad es u y la componente y es v . Nótese que, en el flujo estacionario bidimensional, $u = u(x, y)$ y $v = v(x, y)$.

A continuación aplique tres leyes fundamentales a este elemento de fluido: conservación de la masa, conservación de la cantidad de movimiento y conservación de la energía, para obtener las ecuaciones de continuidad, de la cantidad de movimiento y de la energía para el flujo laminar en las capas límite.



Flujo laminar



Flujo turbulento

FIGURA 6-22

Los gradientes de velocidad en la superficie y, por lo tanto, el esfuerzo cortante en ella son mucho más grandes para el flujo turbulento de como son para el flujo laminar, aunque la capa límite turbulenta es más gruesa que la laminar para el mismo valor de la velocidad de flujo libre.

*La presente sección y las que siguen en este capítulo tratan de aspectos teóricos de la convección y se pueden pasar por alto y usarse como referencia, si se desea, sin pérdida de continuidad.

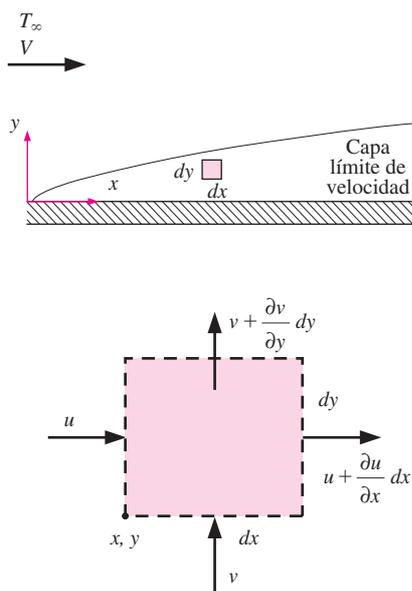


FIGURA 6-23

Volumen diferencial de control usado en la deducción del balance de masa en la capa límite de la velocidad en el flujo bidimensional sobre una superficie.

Ecuación de la conservación de la masa

El principio de la conservación de la masa es simplemente un enunciado de que la masa no se puede crear ni destruir durante un proceso y que, durante un análisis, debe tomarse en cuenta en su totalidad. En el flujo estacionario, la cantidad de masa dentro del volumen de control permanece constante y, como consecuencia, la conservación de la masa se puede expresar como

$$\left(\begin{array}{c} \text{Razón del flujo de masa} \\ \text{(que entra al volumen de control)} \end{array} \right) = \left(\begin{array}{c} \text{Razón del flujo de masa} \\ \text{(que sale del volumen de control)} \end{array} \right) \quad (6-18)$$

Puesto que la razón del flujo de masa es igual al producto de la densidad, la velocidad media y el área de la sección transversal perpendicular al flujo, la razón a la cual el fluido entra en el volumen de control desde la superficie izquierda es $\rho u(dy \cdot 1)$. La razón a la cual el fluido sale del volumen de control desde la superficie derecha se puede expresar como

$$\rho \left(u + \frac{\partial u}{\partial x} dx \right) (dy \cdot 1) \quad (6-19)$$

Al repetir esto para la dirección y y sustituir los resultados en la ecuación 6-18, se obtiene

$$\rho u(dy \cdot 1) + \rho v(dx \cdot 1) = \rho \left(u + \frac{\partial u}{\partial x} dx \right) (dy \cdot 1) + \rho \left(v + \frac{\partial v}{\partial y} dy \right) (dx \cdot 1) \quad (6-20)$$

Al simplificar y dividir entre $dx \cdot dy \cdot 1$ da

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad (6-21)$$

Ésta es la relación de *conservación de la masa* en forma diferente, la cual también se conoce como **ecuación de continuidad** o **balance de masa** para el flujo bidimensional estacionario de un fluido con densidad constante.

Las ecuaciones de la cantidad de movimiento

Las formas diferenciales de las ecuaciones del movimiento en la capa límite de velocidad se obtienen al aplicar la segunda ley de Newton del movimiento a un elemento diferencial del volumen de control en la capa límite. Esta ley es una expresión para el balance de la cantidad de movimiento y se puede enunciar como: *la fuerza neta que actúa sobre el volumen de control es igual a la masa multiplicada por la aceleración del elemento de fluido dentro de ese volumen de control, lo cual también es igual a la razón neta de la transferencia de la cantidad de movimiento de flujo hacia fuera del volumen de control.*

Las fuerzas que actúan sobre el volumen de control constan de las *fuerzas del cuerpo*, que actúan sobre todo el cuerpo del volumen de control (como las fuerzas de gravedad, eléctricas y magnéticas) y son proporcionales al volumen del cuerpo, y las *fuerzas superficiales*, que actúan sobre la superficie de control (como las fuerzas de presión debidas a la presión hidrostática y los esfuerzos cortantes debidos a los efectos viscosos) y son proporcionales al área superficial. Las fuerzas superficiales aparecen cuando se aísla el volumen de control de sus alrededores para el análisis y el efecto del cuerpo separado se reemplaza por una fuerza en ese lugar. Nótese que la presión representa la fuerza de compresión aplicada sobre el elemento de fluido por el fluido circundante y siempre está dirigida hacia la superficie.

Se expresa la segunda ley de Newton del movimiento para el volumen de control como

$$(\text{Masa}) \left(\begin{array}{c} \text{Aceleración en una} \\ \text{dirección específica} \end{array} \right) = \left(\begin{array}{c} \text{Fuerza neta (del cuerpo y superficial)} \\ \text{que actúa en esa dirección} \end{array} \right) \quad (6-22)$$

o bien,

$$\delta m \cdot a_x = F_{\text{superficial}, x} + F_{\text{del cuerpo}, x} \quad (6-23)$$

donde la masa del elemento de fluido que se encuentra dentro del volumen de control es

$$\delta m = \rho(dx \cdot dy \cdot 1) \quad (6-24)$$

Dado que el flujo es estacionario y bidimensional y, por tanto, $u = u(x, y)$, la diferencial total de u es

$$du = \frac{\partial u}{\partial x} dx + \frac{\partial u}{\partial y} dy \quad (6-25)$$

Entonces la aceleración del elemento de fluido en la dirección x queda

$$a_x = \frac{du}{dt} = \frac{\partial u}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial u}{\partial y} \frac{dy}{dt} = u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} \quad (6-26)$$

Puede ser que el lector se sienta tentado a pensar que la aceleración es cero en el flujo estacionario, ya que la aceleración es la razón de cambio de la velocidad con respecto al tiempo y, en este tipo de flujo, no hay cambio con el tiempo. Bien, la boquilla de una manguera para jardín hará ver que esta manera de pensar no es correcta. Incluso en el flujo estacionario y, por consiguiente, con gasto de masa constante, el agua se acelerará a través de la boquilla (figura 6-24). *Estacionario* simplemente significa que no hay cambio con el tiempo en un lugar específico (y, por tanto, $\partial u/\partial t = 0$), pero el valor de una cantidad puede cambiar de un lugar a otro (y, por consiguiente, $\partial u/\partial x$ y $\partial u/\partial y$ pueden ser diferentes de cero). En el caso de una boquilla, la velocidad del agua permanece constante en un punto específico, pero cambia de la entrada a la salida (el agua se acelera a lo largo de la boquilla, lo cual, en primer lugar, es la razón para colocar una boquilla en la manguera para jardín).

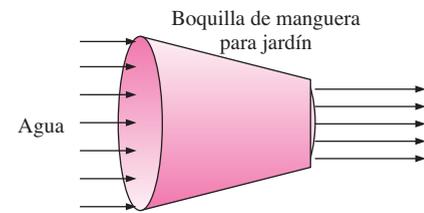


FIGURA 6-24

Durante el flujo estacionario un fluido no puede acelerarse en el tiempo en un punto fijo, pero puede acelerarse en el espacio.

Las fuerzas que actúan sobre una superficie se deben a los efectos de presión y viscosos. En el flujo bidimensional el *esfuerzo viscoso* en cualquier punto sobre una superficie imaginaria dentro del fluido se puede resolver en dos componentes perpendiculares: una perpendicular a la superficie, llamada *esfuerzo normal* (la cual no debe confundirse con la presión) y la otra a lo largo de esa superficie, llamada *esfuerzo cortante*. El esfuerzo normal está relacionado con los gradientes de velocidad $\partial u/\partial x$ y $\partial v/\partial y$, que son mucho menores que $\partial u/\partial y$, al cual está relacionado el esfuerzo cortante. Si se desprecian, por simplicidad, los esfuerzos normales, las fuerzas superficiales que actúan sobre el volumen de control en la dirección x serán como se muestran en la figura 6-25. Entonces la fuerza superficial neta que actúa en la dirección x queda

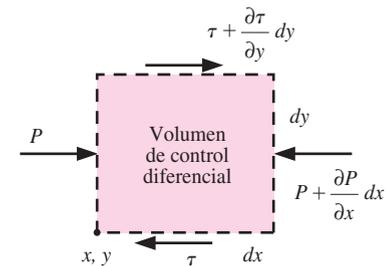


FIGURA 6-25

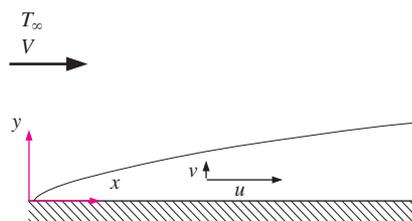
Volumen de control diferencial usado en la deducción de la ecuación de la cantidad de movimiento en la dirección x , en la capa límite de la velocidad, en el flujo bidimensional sobre una superficie.

$$\begin{aligned} F_{\text{superficial}, x} &= \left(\frac{\partial \tau}{\partial y} dy\right)(dx \cdot 1) - \left(\frac{\partial P}{\partial x} dx\right)(dy \cdot 1) = \left(\frac{\partial \tau}{\partial y} - \frac{\partial P}{\partial x}\right)(dx \cdot dy \cdot 1) \\ &= \left(\mu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - \frac{\partial P}{\partial x}\right)(dx \cdot dy \cdot 1) \end{aligned} \quad (6-27)$$

ya que $\tau = \mu(\partial u/\partial y)$. Al sustituir las ecuaciones 6-21, 6-23 y 6-24 en la ecuación 6-20 y dividir entre $dx \cdot dy \cdot 1$ da

$$\rho \left(u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} \right) = \mu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - \frac{\partial P}{\partial x} \quad (6-28)$$

La anterior es la relación para la **conservación de la cantidad de movimiento** en la dirección x y se conoce como **ecuación de la cantidad de movimiento en la dirección x** . Nótese que se obtendría el mismo resultado si usaran relaciones de cantidad de movimiento para el primer miembro de esta ecuación en lugar de masa multiplicada por la aceleración. Si existe una fuer-



- | | |
|----|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| 1) | Componentes de la velocidad:
$v \ll u$ |
| 2) | Gradientes de velocidad:
$\frac{\partial v}{\partial x} \approx 0, \frac{\partial v}{\partial y} \approx 0$
$\frac{\partial u}{\partial x} \ll \frac{\partial u}{\partial y}$ |
| 3) | Gradientes de temperatura:
$\frac{\partial T}{\partial x} \ll \frac{\partial T}{\partial y}$ |

FIGURA 6-26

Aproximaciones de la capa límite.

za del cuerpo que actúe en la dirección x se puede agregar al segundo miembro de la ecuación, siempre que se exprese por unidad de volumen del fluido.

En una capa límite, la componente de la velocidad en la dirección del flujo es mucho mayor que la que se encuentra en la dirección perpendicular y , como consecuencia, $u \gg v$, y $\partial v/\partial x$ y $\partial v/\partial y$ son despreciables. Asimismo, u varía mucho con y en la dirección perpendicular, desde cero en la superficie de la pared hasta casi el valor de la corriente libre de uno a otro lado de la capa límite relativamente delgada, en tanto que la variación de u con x , a lo largo del flujo, por lo común es pequeña. Por lo tanto, $\partial u/\partial y \gg \partial u/\partial x$. Del mismo modo, si el fluido y la pared están a temperaturas diferentes y aquél se calienta o se enfría durante el flujo, se tendrá conducción de calor principalmente en la dirección perpendicular a la superficie y , por tanto, $\partial T/\partial y \gg \partial T/\partial x$. Es decir, los gradientes de velocidad y de temperatura perpendiculares a la superficie son mucho mayores que aquellos a lo largo de esta última. Estas simplificaciones se conocen como **aproximaciones de la capa límite**. Estas aproximaciones simplifican mucho el análisis, por lo común con poca pérdida en la precisión y hacen posible la obtención de soluciones analíticas para ciertos tipos de problemas de flujo (figura 6-26).

Cuando los efectos de la gravedad y otras fuerzas del cuerpo son despreciables y las aproximaciones de la capa límite son válidas, la aplicación de la segunda ley de Newton del movimiento sobre el elemento de volumen en la dirección y da que la *ecuación de la cantidad de movimiento en la dirección y* sea

$$\frac{\partial P}{\partial y} = 0 \quad (6-29)$$

Es decir, *la variación de la presión en la dirección perpendicular a la superficie es despreciable* y, como consecuencia, $P = P(x)$ y $\partial P/\partial x = dP/dx$. Entonces se concluye que, para una x dada, la presión en la capa límite es igual a la presión en la corriente libre, y la presión determinada por un análisis separado del flujo del fluido en la corriente libre (lo cual por lo común es más fácil debido a la ausencia de los efectos viscosos) se puede usar con facilidad en el análisis de la capa límite.

Las componentes de la velocidad en la región de la corriente libre de una placa plana son $u = V = \text{constante}$ y $v = 0$. Al sustituir estos valores en la ecuación de la cantidad del movimiento en la dirección x (ecuación 6-28) da $\partial P/\partial x = 0$. Por lo tanto, para el flujo sobre una placa plana, la presión permanece constante sobre toda ella (tanto dentro como fuera de la capa frontera).

Ecuación de la conservación de la energía

El balance de energía para cualquier sistema que pasa por cualquier proceso se expresa como $E_{\text{ent}} - E_{\text{sal}} = \Delta E_{\text{sistema}}$, lo cual indica que el cambio en el contenido de energía de un sistema durante un proceso es igual a la diferencia entre la entrada y la salida de energía. Durante un *proceso de flujo estacionario*, el contenido total de energía de un volumen de control permanece constante (y, por lo tanto, $\Delta E_{\text{sistema}} = 0$) y la cantidad de energía que entra a un volumen de control en todas las formas debe ser igual a la cantidad de energía que sale de ese volumen. Entonces, para un proceso de flujo estacionario, la forma de balance de la ecuación general de la energía se reduce a $\dot{E}_{\text{ent}} - \dot{E}_{\text{sal}} = 0$.

Dado que la energía se puede transferir sólo por el calor, el trabajo y la masa, el balance de energía para un volumen de control de un flujo estacionario se puede escribir en forma explícita como

$$(\dot{E}_{\text{ent}} - \dot{E}_{\text{sal}})_{\text{por calor}} + (\dot{E}_{\text{ent}} - \dot{E}_{\text{sal}})_{\text{por trabajo}} + (\dot{E}_{\text{ent}} - \dot{E}_{\text{sal}})_{\text{por masa}} = 0 \quad (6-30)$$

La energía total de una corriente de un fluido en movimiento, por unidad de masa, es $e_{\text{corriente}} = h + ec + ep$, donde h es la entalpía (la cual es la suma de

la energía interna y la energía del flujo), $ep = gz$ es la energía potencial y $ec = V^2/2 = (u^2 + v^2)/2$ es la energía cinética del fluido por unidad de masa. Las energías cinética y potencial suelen ser muy pequeñas en relación con la entalpía y, por lo tanto, es práctica común despreciarlas (además, se puede demostrar que, si se incluye la energía cinética en el análisis que se da a continuación, todos los términos debidos a esta inclusión se cancelan entre sí). Se supondrá que la densidad ρ , el calor específico c_p , la viscosidad μ y la conductividad térmica k del fluido son constantes. Entonces la energía del fluido por unidad de masa se puede expresar como $e_{\text{corriente}} = h = c_p T$.

La energía es una cantidad escalar y, por tanto, las interacciones relativas a la energía en todas direcciones se pueden combinar en una ecuación. Puesto que el gasto de masa del fluido que entra en el volumen de control desde la izquierda es $\rho u(dy \cdot 1)$, la razón de la transferencia de energía hacia el volumen de control por la masa en la dirección x es, con base en la figura 6-27,

$$\begin{aligned} (\dot{E}_{\text{ent}} - \dot{E}_{\text{sal}})_{\text{por masa}, x} &= (\dot{m}e_{\text{corriente}})_x - \left[(\dot{m}e_{\text{corriente}})_x + \frac{\partial(\dot{m}e_{\text{corriente}})_x}{\partial x} dx \right] \\ &= -\frac{\partial[\rho u(dy \cdot 1)c_p T]}{\partial x} dx = -\rho c_p \left(u \frac{\partial T}{\partial x} + T \frac{\partial u}{\partial x} \right) dx dy \end{aligned} \quad (6-31)$$

Si se repite esto para la dirección y y se suman los resultados se determina que la razón neta de la transferencia de energía hacia el volumen de control por la masa es

$$\begin{aligned} (\dot{E}_{\text{ent}} - \dot{E}_{\text{sal}})_{\text{por masa}} &= -\rho c_p \left(u \frac{\partial T}{\partial x} + T \frac{\partial u}{\partial x} \right) dx dy - \rho c_p \left(v \frac{\partial T}{\partial y} + T \frac{\partial v}{\partial y} \right) dx dy \\ &= -\rho c_p \left(u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} \right) dx dy \end{aligned} \quad (6-32)$$

ya que $\partial u/\partial x + \partial v/\partial y = 0$, con base en la ecuación de continuidad.

La razón neta de la conducción de calor hacia el elemento de volumen en la dirección x es

$$\begin{aligned} (\dot{E}_{\text{ent}} - \dot{E}_{\text{sal}})_{\text{por calor}, x} &= \dot{Q}_x - \left(\dot{Q}_x + \frac{\partial \dot{Q}_x}{\partial x} dx \right) \\ &= -\frac{\partial}{\partial x} \left(-k(dy \cdot 1) \frac{\partial T}{\partial x} \right) dx = k \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} dx dy \end{aligned} \quad (6-33)$$

Si repite esto para la dirección y y suma los resultados, la razón neta de la transferencia de energía hacia el volumen de control por la conducción de calor queda

$$(\dot{E}_{\text{ent}} - \dot{E}_{\text{sal}})_{\text{por calor}} = k \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} dx dy + k \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} dx dy = k \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \right) dx dy \quad (6-34)$$

Otro mecanismo de transferencia de energía hacia el fluido y desde éste en el volumen de control es el trabajo realizado por las fuerzas del cuerpo y superficiales. El trabajo efectuado por una fuerza del cuerpo se determina al multiplicar esta fuerza por la velocidad en la dirección de ella y el volumen del elemento de fluido, y este trabajo sólo necesita considerarse en presencia de efectos gravitacionales, eléctricos o magnéticos significativos. Las fuerzas superficiales constan de aquellas fuerzas debidas a la presión del fluido y a los esfuerzos cortantes viscosos. El trabajo realizado por la presión (el trabajo del flujo) ya se tomó en cuenta en el análisis antes dado, por medio de la entalpía para la energía microscópica del fluido en lugar de la energía interna. Los esfuerzos cortantes que resultan de los efectos viscosos suelen ser muy pequeños y, en muchos casos, se pueden despreciar. En especial, éste es el caso para las aplicaciones relacionadas con velocidades bajas o moderadas.

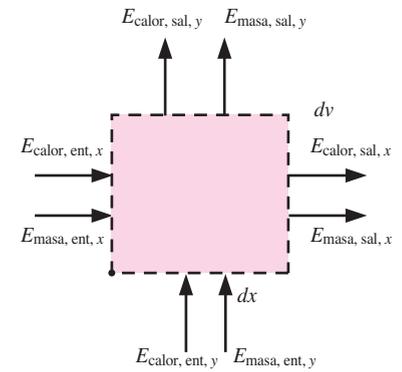


FIGURA 6-27

Transferencias de energía por flujo de masa y de calor asociadas con un volumen diferencial de control en la capa límite térmica, en el flujo bidimensional estacionario.

Entonces, la ecuación de la energía para el flujo bidimensional estacionario de un fluido con propiedades constantes y esfuerzos cortantes despreciables se obtiene por la sustitución de las ecuaciones 6-32 y 6-34 en la 6-30 para dar

$$\rho c_p \left(u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} \right) = k \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \right) \quad (6-35)$$

la cual expresa que *la energía neta transferida por convección por el fluido hacia afuera del volumen de control es igual a la energía neta transferida hacia este volumen por la conducción de calor*.

Cuando los esfuerzos cortantes viscosos no son despreciables, su efecto se toma en cuenta al expresar la ecuación de la energía como

$$\rho c_p \left(u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} \right) = k \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \right) + \mu \Phi \quad (6-36)$$

donde la *función de disipación viscosa* Φ se obtiene después de un largo análisis (para obtener los detalles, véase un libro avanzado como el de *Schlichting* [Ref. 9]) como

$$\Phi = 2 \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial y} \right)^2 \right] + \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 \quad (6-37)$$

La disipación viscosa puede desempeñar un papel dominante en los flujos a alta velocidad, en especial cuando la viscosidad del fluido es elevada (como el flujo del aceite en las chumaceras). Esto se manifiesta como una elevación significativa en la temperatura del fluido debida a la conversión de la energía cinética de este último en energía térmica. La disipación viscosa también es significativa para los vuelos a alta velocidad de los aviones.

Para el caso especial de un fluido estancado, $u = v = 0$ y la ecuación de la energía se reduce, como es de esperar, a la ecuación bidimensional de conducción de calor en estado estacionario,

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} = 0 \quad (6-38)$$

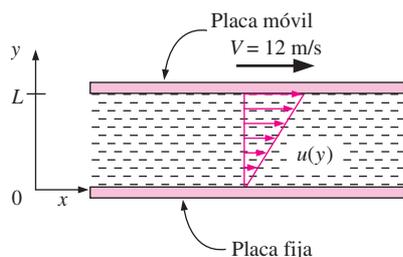


FIGURA 6-28

Esquema para el ejemplo 6-1.

EJEMPLO 6-1 Elevación de la temperatura del aceite en una chumacera

El flujo de aceite en una chumacera se puede considerar como flujo paralelo entre dos placas grandes, moviéndose una de ellas y la otra permaneciendo estacionaria. Los flujos de este tipo se conocen como flujos de Couette.

Considere dos placas grandes isotérmicas separadas por una película de aceite de 2 mm de espesor. La placa superior se mueve a una velocidad constante de 12 m/s, en tanto que la inferior permanece estacionaria. Las dos placas se mantienen a 20°C. a) Obtenga relaciones para las distribuciones de velocidad y de temperatura en el aceite. b) Determine la temperatura máxima en el aceite y el flujo de calor de éste hacia cada placa (figura 6-28).

SOLUCIÓN Se considera el flujo paralelo de aceite entre dos placas. Se deben determinar las distribuciones de velocidad y temperatura, la temperatura máxima y la razón total de transferencia de calor.

Suposiciones 1 Existen condiciones estacionarias de operación. 2 El aceite es una sustancia incompresible con propiedades constantes. 3 Las fuerzas del cuerpo, como la de la gravedad, son despreciables. 4 Las placas son grandes, de modo que no se tiene variación en la dirección z .

Propiedades Las propiedades del aceite a 20°C son (tabla A-13):

$$k = 0.145 \text{ W/m} \cdot \text{K} \quad \text{y} \quad \mu = 0.8374 \text{ kg/m} \cdot \text{s} = 0.8374 \text{ N} \cdot \text{s/m}^2$$

Análisis a) Se toma la dirección del flujo como la dirección x y la perpendicular como la y . Se trata de un flujo paralelo entre dos placas y, como consecuencia, $v = 0$. Entonces, la ecuación de continuidad (ecuación 6-21) se reduce a

Continuidad: $\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \rightarrow \frac{\partial u}{\partial x} = 0 \rightarrow u = u(y)$

Por lo tanto, la componente x de la velocidad no cambia en la dirección del flujo (es decir, el perfil de velocidades permanece inalterado). Puesto que $u = u(y)$, $v = 0$ y $\partial P/\partial x = 0$ (el flujo se mantiene por el movimiento de la placa superior más que por el gradiente de presión), la ecuación de la cantidad de movimiento en la dirección x (ecuación 6-28) se reduce a

Cantidad de movimiento en la dirección x : $\rho \left(u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} \right) = \mu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - \frac{\partial P}{\partial x} \rightarrow \frac{d^2 u}{dy^2} = 0$

La anterior es una ecuación diferencial ordinaria de segundo orden, y al integrarla dos veces da

$$u(y) = C_1 y + C_2$$

Las velocidades del fluido en las superficies de las placas deben ser iguales a las de las propias placas debido a la condición de no resbalamiento. Por lo tanto, las condiciones de frontera son $u(0) = 0$ y $u(L) = V$, y al aplicarlas se obtiene que la distribución de velocidad es

$$u(y) = \frac{y}{L} V$$

En este caso, el calentamiento por fricción debido a la disipación viscosa es significativo en virtud de la alta viscosidad del aceite y la velocidad grande de la placa. Las placas son isotérmicas y no hay cambio en la dirección del flujo y , por tanto, la temperatura sólo depende de y , $T = T(y)$. Asimismo, $u = u(y)$ y $v = 0$. Entonces, la ecuación de la energía con disipación (ecuaciones 6-36 y 6-37) se reduce a

Energía: $0 = k \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \mu \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 \rightarrow k \frac{d^2 T}{dy^2} = -\mu \left(\frac{V}{L} \right)^2$

ya que $\partial u/\partial y = V/L$. Al dividir ambos miembros entre k e integrar dos veces da

$$T(y) = \pm \frac{\mu}{2k} \left(\frac{y}{L} V \right)^2 + C_3 y + C_4$$

Al aplicar las condiciones de frontera $T(0) = T_0$ y $T(L) = T_0$ se obtiene que la distribución de temperatura es

$$T(y) = T_0 + \frac{\mu V^2}{2k} \left(\frac{y}{L} - \frac{y^2}{L^2} \right)$$

b) El gradiente de temperatura se determina al derivar $T(y)$ con respecto a y ,

$$\frac{dT}{dy} = \frac{\mu V^2}{2kL} \left(1 - 2 \frac{y}{L} \right)$$

La ubicación de la temperatura máxima se determina al hacer $dT/dy = 0$ y despejar y ,

$$\frac{dT}{dy} = \frac{\mu V^2}{2kL} \left(1 - 2 \frac{y}{L} \right) = 0 \rightarrow y = \frac{L}{2}$$

Por lo tanto, se tiene la temperatura máxima a la mitad del plano, lo cual no es sorprendente, ya que las dos placas se mantienen a la misma temperatura. La temperatura máxima es el valor de la temperatura en $y = L/2$,

$$\begin{aligned} T_{\text{máx}} &= T\left(\frac{L}{2}\right) = T_0 + \frac{\mu V^2}{2k} \left(\frac{L/2}{L} - \frac{(L/2)^2}{L^2} \right) = T_0 + \frac{\mu V^2}{8k} \\ &= 20 + \frac{(0.8374 \text{ N} \cdot \text{s/m}^2)(12 \text{ m/s})^2}{8(0.145 \text{ W/m} \cdot \text{°C})} \left(\frac{1 \text{ W}}{1 \text{ N} \cdot \text{m/s}} \right) = 124\text{°C} \end{aligned}$$

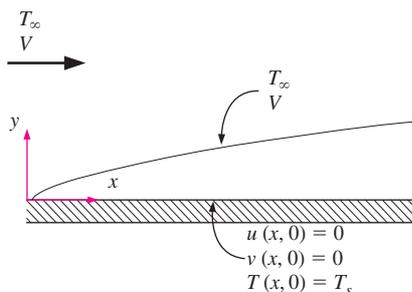


FIGURA 6-29

Condiciones de frontera para el flujo sobre una placa plana.

El flujo de calor en las placas se determina a partir de la definición del mismo,

$$\begin{aligned}\dot{q}_0 &= -k \left. \frac{dT}{dy} \right|_{y=0} = -k \frac{\mu V^2}{2kL} (1-0) = -\frac{\mu V^2}{2L} \\ &= -\frac{(0.8374 \text{ N} \cdot \text{s/m}^2)(12 \text{ m/s})^2}{2(0.002 \text{ m})} \left(\frac{1 \text{ kW}}{1000 \text{ N} \cdot \text{m/s}} \right) = -30.1 \text{ kW/m}^2 \\ \dot{q}_L &= -k \left. \frac{dT}{dy} \right|_{y=L} = -k \frac{\mu V^2}{2kL} (1-2) = \frac{\mu V^2}{2L} = -\dot{q}_0 = 30.1 \text{ kW/m}^2\end{aligned}$$

Por lo tanto, los flujos de calor en las dos placas son de magnitudes iguales pero de signos opuestos.

Discusión Una elevación en la temperatura de 104°C confirma nuestra sospecha de que la disipación viscosa es muy significativa. Asimismo, el flujo de calor es equivalente a la velocidad de disipación de la energía mecánica. Por lo tanto, la energía mecánica se convierte en energía térmica a razón de 57.2 kW/m² de área de la placa, para vencer la fricción en el aceite. Por último, los cálculos se han realizado mediante las propiedades del aceite a 20°C, pero la temperatura del mismo resultó ser mucho más elevada. Por lo tanto, al conocer la fuerte dependencia de la viscosidad con respecto a la temperatura, deben repetirse los cálculos mediante las propiedades a la temperatura promedio de 70°C, para mejorar la precisión.

6-8 ■ SOLUCIONES DE LAS ECUACIONES DE CONVECCIÓN PARA UNA PLACA PLANA

Considere el flujo laminar de un fluido sobre una *placa plana*, como se muestra en la figura 6-29. Las superficies que están ligeramente contorneadas, como los álabes de las turbinas, también se pueden considerar como placas planas con exactitud razonable. La coordenada x se mide a lo largo de la superficie de la placa, desde el borde de ataque de ésta, en la dirección del flujo, y la y se mide desde la superficie en la dirección perpendicular. El fluido se aproxima a la placa en la dirección x con una velocidad uniforme corriente arriba, la cual es equivalente a la velocidad V de la corriente libre.

Cuando la disipación viscosa es despreciable, las ecuaciones de continuidad, de la cantidad de movimiento y de la energía (6-21, 6-28 y 6-35) se reducen, para el flujo laminar, incompresible y estacionario de un fluido con propiedades constantes sobre una placa plana, a

$$\text{Continuidad:} \quad \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad (6-39)$$

$$\text{Cantidad de movimiento:} \quad u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \quad (6-40)$$

$$\text{Energía:} \quad u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} = \alpha \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \quad (6-41)$$

con las condiciones de frontera (figura 6-26)

$$\begin{aligned}\text{En } x = 0: & \quad u(0, y) = V, \quad T(0, y) = T_\infty \\ \text{En } y = 0: & \quad u(x, 0) = 0, \quad v(x, 0) = 0, \quad T(x, 0) = T_s \\ \text{Cuando } y \rightarrow \infty: & \quad u(x, \infty) = V, \quad T(x, \infty) = T_\infty\end{aligned} \quad (6-42)$$

Cuando se supone que las propiedades del fluido son constantes y, por consiguiente, independientes de la temperatura, las dos primeras ecuaciones se pueden resolver por separado para las componentes u y v de la velocidad. Una vez

que se dispone de la distribución de velocidad, se puede determinar el coeficiente de fricción y el espesor de la capa límite mediante sus definiciones. Asimismo, al conocer u y v , la temperatura se convierte en la única incógnita en la última ecuación y se puede resolver para la distribución de temperatura.

El ingeniero alemán H. Blasius, discípulo de L. Prandtl, resolvió, por primera vez, en 1908, las ecuaciones de continuidad y de la cantidad de movimiento. Esto se llevó a cabo por la transformación de las dos ecuaciones diferenciales parciales en una sola ecuación diferencial ordinaria al introducir una nueva variable independiente, llamada **variable de semejanza**. El hallazgo de una variable de ese tipo, si es que existe, tiene más de arte que de ciencia y requiere que se cuente con una buena percepción del problema.

Al notar que la forma general del perfil de velocidades permanece igual a lo largo de la placa, Blasius razonó que el perfil no dimensional de velocidades u/V debe permanecer inalterado cuando se traza su gráfica contra la distancia no dimensional y/δ , donde δ es el espesor de la capa límite local de la velocidad, en una x dada. Es decir, aun cuando δ y u en una y dada varían con x , la velocidad u en una y/δ fija permanece constante. Blasius también estaba consciente, por el trabajo de Stokes, de que δ es proporcional a $\sqrt{\nu x/V}$, y, de esta manera, definió una *variable adimensional de semejanza* como

$$\eta = y\sqrt{\frac{V}{\nu x}} \quad (6-43)$$

y, de este modo, $u/V = \text{función}(\eta)$. Entonces introdujo una *función de corriente* $\psi(x, y)$ como

$$u = \frac{\partial \psi}{\partial y} \quad y \quad v = -\frac{\partial \psi}{\partial x} \quad (6-44)$$

de modo que la función de continuidad (ecuación 6-3a) se satisface de manera automática y, en consecuencia, se elimina (esto se puede verificar con facilidad por sustitución directa). A continuación como la variable dependiente, definió una función $f(\eta)$

$$f(\eta) = \frac{\psi}{V\sqrt{\nu x/V}} \quad (6-45)$$

Entonces las componentes de la velocidad quedan

$$u = \frac{\partial \psi}{\partial y} = \frac{\partial \psi}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial y} = V\sqrt{\frac{\nu x}{V}} \frac{df}{d\eta} \sqrt{\frac{V}{\nu x}} = V \frac{df}{d\eta} \quad (6-46)$$

$$v = -\frac{\partial \psi}{\partial x} = -V\sqrt{\frac{\nu x}{V}} \frac{df}{d\eta} - \frac{V}{2}\sqrt{\frac{\nu}{Vx}} f = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{V\nu}{x}} \left(\eta \frac{df}{d\eta} - f \right) \quad (6-47)$$

Al derivar estas relaciones para u y v , se puede demostrar que las derivadas de las componentes de la velocidad son

$$\frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{V}{2x}\eta \frac{d^2 f}{d\eta^2}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = V\sqrt{\frac{V}{\nu x}} \frac{d^2 f}{d\eta^2}, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{V^2}{\nu x} \frac{d^3 f}{d\eta^3} \quad (6-48)$$

Al sustituir estas relaciones en la ecuación de la cantidad de movimiento y simplificar, se obtiene

$$2 \frac{d^3 f}{d\eta^3} + f \frac{d^2 f}{d\eta^2} = 0 \quad (6-49)$$

la cual es una ecuación diferencial no lineal de tercer orden. Por lo tanto, el sistema de dos ecuaciones diferenciales parciales se transforma en una sola ecuación diferencial ordinaria por el uso de una variable de semejanza. Me-

TABLA 6-3

Función de semejanza f y sus derivadas para la capa límite laminar a lo largo de una placa plana.

η	f	$\frac{df}{d\eta} = \frac{u}{V}$	$\frac{d^2f}{d\eta^2}$
0	0	0	0.332
0.5	0.042	0.166	0.331
1.0	0.166	0.330	0.323
1.5	0.370	0.487	0.303
2.0	0.650	0.630	0.267
2.5	0.996	0.751	0.217
3.0	1.397	0.846	0.161
3.5	1.838	0.913	0.108
4.0	2.306	0.956	0.064
4.5	2.790	0.980	0.034
5.0	3.283	0.992	0.016
5.5	3.781	0.997	0.007
6.0	4.280	0.999	0.002
∞	∞	1	0

dianter las definiciones de f y η , las condiciones de frontera en términos de esa variable de semejanza se pueden expresar como

$$f(0) = 0, \quad \left. \frac{df}{d\eta} \right|_{\eta=0} = 0, \quad \text{y} \quad \left. \frac{df}{d\eta} \right|_{\eta=\infty} = 1 \quad (6-50)$$

La ecuación transformada con sus condiciones de frontera asociadas no se puede resolver analíticamente y, como consecuencia, se necesita un método de solución alternativo. Blasius resolvió por primera vez el problema, en 1908, mediante un original enfoque de desarrollo en series de potencias que se conoce como *solución de Blasius*. Posteriormente el problema se resolvió con mayor precisión mediante diferentes procedimientos numéricos y en la tabla 6-3 se dan resultados de una solución de ese tipo. El perfil no dimensional de velocidades se puede obtener al trazar la gráfica de u/V contra η . Los resultados que se obtienen por medio de este análisis simplificado concuerdan de manera excelente con los resultados experimentales.

Recuerde que se definió el espesor de la capa límite como la distancia desde la superficie para la cual $u/V = 0.99$. En la tabla 6-3 se observa que el valor de η correspondiente a $u/V = 0.99$ es $\eta = 4.91$. Al sustituir $\eta = 4.91$ y $y = \delta$ en la definición de la variable de semejanza (ecuación 6-43) da $4.91 = \delta\sqrt{V/\nu x}$. Entonces el espesor de la capa límite de la velocidad queda

$$\delta = \frac{4.91}{\sqrt{Vx/\nu x}} = \frac{4.91x}{\sqrt{\text{Re}_x}} \quad (6-51)$$

ya que $\text{Re}_x = Vx/\nu$, donde x es la distancia desde el borde de ataque de la placa. Nótese que el espesor de la capa límite aumenta al incrementarse la viscosidad cinemática ν y con la disminución de la distancia al borde de ataque x , pero disminuye al incrementarse la velocidad V de la corriente libre. Por lo tanto, una velocidad grande de la corriente libre aplastará la capa límite y causará que sea más delgada.

Se puede determinar el esfuerzo cortante sobre la pared a partir de su definición y la relación de $\partial u/\partial y$ de la ecuación 6-48:

$$\tau_w = \mu \left. \frac{\partial u}{\partial y} \right|_{y=0} = \mu V \sqrt{\frac{V}{\nu x}} \left. \frac{d^2f}{d\eta^2} \right|_{\eta=0} \quad (6-52)$$

Al sustituir el valor de la segunda derivada de f en $\eta = 0$ de la tabla 6-3, da

$$\tau_w = 0.332V \sqrt{\frac{\rho\mu V}{x}} = \frac{0.332\rho V^2}{\sqrt{\text{Re}_x}} \quad (6-53)$$

Entonces el coeficiente local de fricción superficial queda

$$C_{f,x} = \frac{\tau_w}{\rho V^2/2} = 0.664 \text{Re}_x^{-1/2} \quad (6-54)$$

Nótese que a diferencia del espesor de la capa límite, el esfuerzo cortante en la pared y el coeficiente de fricción superficial decrecen a lo largo de la placa en términos de $x^{-1/2}$.

La ecuación de la energía

Al conocer el perfil de velocidades ahora se está listo para resolver la ecuación de la energía para la distribución de temperatura, para el caso de temperatura constante de la pared T_s . En principio, se introduce la temperatura adimensional θ como

$$\theta(x, y) = \frac{T(x, y) - T_s}{T_\infty - T_s} \quad (6-55)$$

Dado que tanto T_s como T_∞ son constantes, al sustituir en la ecuación de la energía (ecuación 6-41) da

$$u \frac{\partial \theta}{\partial x} + v \frac{\partial \theta}{\partial y} = \alpha \frac{\partial^2 \theta}{\partial y^2} \quad (6-56)$$

Los perfiles de temperaturas para el flujo sobre una placa isotérmica son semejantes, precisamente como los perfiles de velocidades y, por consiguiente, es de esperar que exista una solución semejante para la temperatura. Además, el espesor de la capa límite térmica es proporcional a $\sqrt{vx/V}$, precisamente como el espesor de la capa límite de velocidad, de donde la variable de semejanza también es η y $\theta = \theta(\eta)$. Al aplicar la regla de la cadena y sustituir las expresiones para u y v de las ecuaciones 6-46 y 6-47 en la ecuación de la energía, da

$$v \frac{df}{d\eta} \frac{d\theta}{d\eta} \frac{\partial \eta}{\partial x} + \frac{1}{2} \sqrt{\frac{V_y}{x}} \left(\eta \frac{df}{d\eta} \right) \frac{d\theta}{d\eta} \frac{\partial \eta}{\partial y} = \alpha \frac{d^2 \theta}{d\eta^2} \left(\frac{\partial \eta}{\partial y} \right)^2 \quad (6-57)$$

Al simplificar y notar que $Pr = \nu/\alpha$ da

$$2 \frac{d^2 \theta}{d\eta^2} + Pr f \frac{d\theta}{d\eta} = 0 \quad (6-58)$$

con las condiciones de frontera $\theta(0) = 0$ y $\theta(\infty) = 1$. La obtención de una ecuación para θ como función sólo de η confirma que los perfiles de temperatura son semejantes y, de este modo, existe una solución de semejanza. Una vez más, no se puede obtener una solución de forma cerrada para este problema con valores de frontera y se debe resolver numéricamente.

Resulta interesante notar que para $Pr = 1$ esta ecuación se reduce a la 6-49 cuando θ se reemplaza por $df/d\eta$, la cual es equivalente a u/V (véase la ecuación 6-46). Las condiciones de frontera para θ y $df/d\eta$ también son idénticas. Por tanto, se concluye que las capas límite de la velocidad y térmica coinciden y los perfiles de velocidades y temperatura adimensionales (u/V y θ) son idénticos para el flujo laminar, incompresible y estacionario de un fluido con propiedades constantes y $Pr = 1$ sobre una placa plana isotérmica (figura 6-30). En este caso, el valor del gradiente de temperatura en la superficie ($y = 0$ o $\eta = 0$) es, con base en la tabla 6-3, $d\theta/d\eta = d^2f/d\eta^2 = 0.332$.

La ecuación 6-58 está resuelta para numerosos valores de números de Prandtl. Para $Pr > 0.6$ se encuentra que el gradiente de temperatura adimensional en la superficie es proporcional a $Pr^{1/3}$ y se expresa como

$$\left. \frac{d\theta}{d\eta} \right|_{\eta=0} = 0.332 Pr^{1/3} \quad (6-59)$$

El gradiente de temperatura en la superficie es

$$\begin{aligned} \left. \frac{\partial T}{\partial y} \right|_{y=0} &= (T_\infty - T_s) \left. \frac{\partial \theta}{\partial y} \right|_{y=0} = (T_\infty - T_s) \left. \frac{d\theta}{d\eta} \right|_{\eta=0} \left. \frac{\partial \eta}{\partial y} \right|_{y=0} \\ &= 0.332 Pr^{1/3} (T_\infty - T_s) \sqrt{\frac{V}{\nu x}} \end{aligned} \quad (6-60)$$

Entonces, el coeficiente local de convección y el número de Nusselt quedan

$$h_x = \frac{\dot{q}_s}{T_s - T_\infty} = \frac{-k(\partial T/\partial y)|_{y=0}}{T_s - T_\infty} = 0.332 Pr^{1/3} k \sqrt{\frac{V}{\nu x}} \quad (6-61)$$

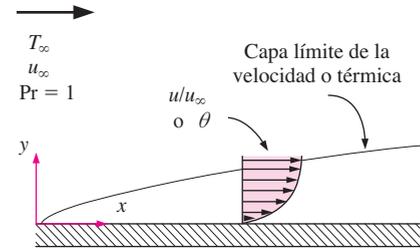


FIGURA 6-30

Cuando $Pr = 1$, las capas límite de la velocidad y térmica coinciden y los perfiles no dimensionales de velocidades y de temperatura son idénticos para el flujo laminar, incompresible y estacionario sobre una placa plana.

y

$$\text{Nu}_x = \frac{h_x x}{k} = 0.332 \text{Pr}^{1/3} \text{Re}_x^{1/2} \quad \text{Pr} > 0.6 \quad (6-62)$$

Los valores de Nu_x obtenidos a partir de esta relación concuerdan bien con los medidos.

Al resolver numéricamente la ecuación 6-58 para el perfil de temperatura, para diferentes números de Prandtl, y mediante la definición de la capa límite térmica, se determina que $\delta/\delta_t \cong \text{Pr}^{1/3}$. Entonces el espesor de esta capa límite queda

$$\delta_t = \frac{\delta}{\text{Pr}^{1/3}} = \frac{4.91x}{\text{Pr}^{1/3} \sqrt{\text{Re}_x}} \quad (6-63)$$

Nótese que estas relaciones sólo son válidas para el flujo laminar sobre una placa plana isotérmica. Asimismo, se puede tomar en cuenta el efecto de las propiedades variables al evaluarlas en la temperatura de película definida como $T_f = (T_s + T_\infty)/2$.

La solución de Blasius proporciona concepciones profundas importantes, pero su valor es en gran parte histórico debido a las limitaciones relacionadas con ella. Hoy día tanto los flujos laminares como turbulentos sobre superficies se analizan en forma rutinaria mediante métodos numéricos.

6-9 ■ ECUACIONES ADIMENSIONALES DE LA CONVECCIÓN Y SEMEJANZA

Cuando la disipación viscosa es despreciable, las ecuaciones de continuidad, de la cantidad de movimiento y de la energía para el flujo laminar, incompresible y estacionario de un fluido con propiedades constantes se dan por medio de las ecuaciones 6-21, 6-28 y 6-35.

A estas ecuaciones y a las condiciones de frontera se les puede eliminar las dimensiones al dividir todas las variables dependientes e independientes entre cantidades pertinentes y que tengan significado: todas las longitudes entre una longitud característica L (la cual es la longitud para una placa), todas las velocidades entre una velocidad de referencia, V (la cual es la velocidad de la corriente libre para una placa) y la temperatura entre una diferencia apropiada de temperaturas (la cual es $T_\infty - T_s$ para una placa). Se obtiene

$$x^* = \frac{x}{L}, \quad y^* = \frac{y}{L}, \quad u^* = \frac{u}{V}, \quad v^* = \frac{v}{V}, \quad P^* = \frac{P}{\rho V^2}, \quad \text{y} \quad T^* = \frac{T - T_s}{T_\infty - T_s}$$

donde se usan los asteriscos para denotar las variables no dimensionales. Al introducir estas variables en las ecuaciones 6-21, 6-28 y 6-35, y simplificar da

$$\text{Continuidad:} \quad \frac{\partial u^*}{\partial x^*} + \frac{\partial v^*}{\partial y^*} = 0 \quad (6-64)$$

$$\text{Cantidad de movimiento:} \quad u^* \frac{\partial u^*}{\partial x^*} + v^* \frac{\partial u^*}{\partial y^*} = \frac{1}{\text{Re}_L} \frac{\partial^2 u^*}{\partial y^{*2}} - \frac{dP^*}{dx^*} \quad (6-65)$$

$$\text{Energía:} \quad u^* \frac{\partial T^*}{\partial x^*} + v^* \frac{\partial T^*}{\partial y^*} = \frac{1}{\text{Re}_L \text{Pr}} \frac{\partial^2 T^*}{\partial y^{*2}} \quad (6-66)$$

con las condiciones de frontera

$$\begin{aligned} u^*(0, y^*) = 1, \quad u^*(x^*, 0) = 0, \quad u^*(x^*, \infty) = 1, \quad v^*(x^*, 0) = 0, \\ T^*(0, y^*) = 1, \quad T^*(x^*, 0) = 0, \quad T^*(x^*, \infty) = 1 \end{aligned} \quad (6-67)$$

donde $\text{Re}_L = VL/v$ es el número adimensional de Reynolds y $\text{Pr} = \nu/\alpha$ es el número de Prandtl. Para un tipo de configuración geométrica dado, las soluciones

de los problemas con los mismos números Re y Nu son semejantes y, por tanto, dichos números sirven como *parámetros de semejanza*. Dos fenómenos físicos son *semejantes* si tienen las mismas formas adimensionales de las ecuaciones diferenciales que las rigen y de condiciones de frontera (figura 6-31).

Una ventaja importante de la eliminación de las dimensiones es la reducción significativa en el número de parámetros. El problema original comprende seis parámetros ($L, V, T_\infty, T_s, \nu, \alpha$), pero el problema sin dimensiones sólo comprende dos parámetros (Re_L y Pr). Para una configuración geométrica dada los problemas que tienen los mismos valores para los parámetros de semejanza tienen soluciones idénticas. Por ejemplo, la determinación del coeficiente de transferencia de calor por convección para el flujo sobre una superficie dada requiere soluciones numéricas o investigaciones experimentales para varios fluidos, con varios conjuntos de velocidades, longitudes de superficies, temperaturas de pared y temperaturas de la corriente libre. Se puede obtener la misma información, con bastantes menos investigaciones, al agrupar los datos en los números adimensionales Re y Pr. Otra ventaja de los parámetros de semejanza es que permiten agrupar los resultados de un número grande de experimentos e informar acerca de ellos de manera conveniente en términos de esos parámetros (figura 6-32).

6-10 ■ FORMAS FUNCIONALES DE LOS COEFICIENTES DE FRICCIÓN Y DE CONVECCIÓN

Las tres ecuaciones con las dimensiones eliminadas de la capa límite (ecuaciones 6-64, 6-65 y 6-66) comprenden tres funciones desconocidas, u^* , v^* y T^* , dos variables independientes, x^* y y^* , y dos parámetros, Re_L y Pr . La presión $P^*(x^*)$ depende de la configuración geométrica que intervenga (es constante para una placa plana) y tiene el mismo valor dentro y fuera de la capa límite en una x^* específica. Por lo tanto, se puede determinar por separado a partir de las condiciones de corriente libre y dP^*/dx^* de la ecuación 6-65 se puede tratar como una función conocida de x^* . Nótese que las condiciones de frontera no introducen nuevos parámetros.

Para una configuración geométrica dada, la solución para u^* se puede expresar como

$$u^* = f_1(x^*, y^*, Re_L) \quad (6-68)$$

Entonces, el esfuerzo cortante en la superficie queda

$$\tau_s = \mu \left. \frac{\partial u}{\partial y} \right|_{y=0} = \frac{\mu V}{L} \left. \frac{\partial u^*}{\partial y^*} \right|_{y^*=0} = \frac{\mu V}{L} f_2(x^*, Re_L) \quad (6-69)$$

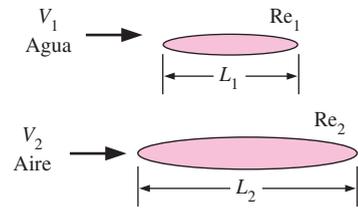
Al sustituir en su definición, da el coeficiente de fricción local,

$$C_{f,x} = \frac{\tau_s}{\rho V^2/2} = \frac{\mu V/L}{\rho V^2/2} f_2(x^*, Re_L) = \frac{2}{Re_L} f_2(x^*, Re_L) = f_3(x^*, Re_L) \quad (6-70)$$

Por tanto, se concluye que el coeficiente de fricción para una configuración geométrica dada se puede expresar en términos del número de Reynolds Re, y sólo de la variable espacial adimensional x^* (en lugar de expresarse en términos de x, L, V, ρ y μ). Éste es un hallazgo muy significativo y hace ver el valor de las ecuaciones adimensionales.

De manera semejante, la solución de la ecuación 6-66 para la temperatura adimensional T^* , para una configuración geométrica dada, se puede expresar como

$$T^* = g_1(x^*, y^*, Re_L, Pr) \quad (6-71)$$



Si $Re_1 = Re_2$, entonces $C_{f1} = C_{f2}$

FIGURA 6-31

Los cuerpos geoméricamente semejantes tienen el mismo valor de coeficiente de fricción en el mismo número de Reynolds.

Parámetros antes de eliminar las dimensiones:

$$L, V, T_\infty, T_s, \nu, \alpha$$

Parámetros después de eliminar las dimensiones:

$$Re, Pr$$

FIGURA 6-32

El número de parámetros se reduce mucho al eliminar las dimensiones en las ecuaciones de la convección.

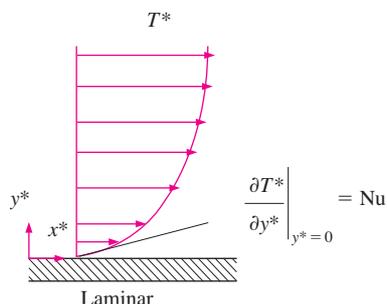


FIGURA 6-33

El número de Nusselt es equivalente al gradiente adimensional de temperatura en la superficie.

Mediante la definición de T^* , el coeficiente de transferencia de calor por convección se transforma en

$$h = \frac{-k(\partial T/\partial y)|_{y=0}}{T_s - T_\infty} = \frac{-k(T_\infty - T_s)}{L(T_s - T_\infty)} \frac{\partial T^*}{\partial y^*} \Big|_{y^*=0} = \frac{k}{L} \frac{\partial T^*}{\partial y^*} \Big|_{y^*=0} \quad (6-72)$$

Al sustituir esto en la relación del número de Nusselt da [o, de manera alternativa, se puede reacomodar la relación antes dada en la forma adimensional como $hL/k = (\partial T^*/\partial y^*)|_{y^*=0}$ y definir el grupo adimensional hL/k como el número de Nusselt]

$$\text{Nu}_x = \frac{hL}{k} = \frac{\partial T^*}{\partial y^*} \Big|_{y^*=0} = g_2(x^*, \text{Re}_L, \text{Pr}) \quad (6-73)$$

Nótese que el número de Nusselt es equivalente al *gradiente de temperatura adimensional en la superficie* y, como consecuencia, se menciona de manera más apropiada como el coeficiente de transferencia de calor adimensional (figura 6-33). Asimismo, el número de Nusselt para una configuración geométrica dada se puede expresar en términos del número de Reynolds Re , el número de Prandtl Pr , y la variable espacial x^* y se puede usar una relación de ese tipo para fluidos diferentes que fluyen a velocidades distintas sobre configuraciones geométricas semejantes de longitudes diferentes.

Los coeficientes promedio de fricción y de transferencia de calor se determinan por la integración de $C_{f,x}$ y Nu_x sobre la superficie del cuerpo dado con respecto a x^* , desde 0 hasta 1. La integración eliminará la dependencia con respecto a x^* y el coeficiente promedio de fricción y el número de Nusselt se pueden expresar como

$$C_f = f_4(\text{Re}_L) \quad \text{y} \quad \text{Nu} = g_3(\text{Re}_L, \text{Pr}) \quad (6-74)$$

Estas relaciones son en extremo valiosas porque expresan que, para una configuración geométrica dada, el coeficiente de fricción sólo se puede expresar en función del número de Reynolds y el número de Nusselt sólo en función de los números de Reynolds y Prandtl (figura 6-34). Por lo tanto, los experimentadores pueden estudiar un problema con un número mínimo de experimentos e informar de manera conveniente acerca de sus mediciones de los coeficientes de fricción y de transferencia de calor en términos de los números de Reynolds y de Prandtl. Por ejemplo, una relación del coeficiente de fricción obtenida con aire, para una superficie dada, también se puede usar para el agua con el mismo número de Reynolds. Pero se debe tener presente que la validez de estas relaciones queda restringida por las limitaciones sobre las ecuaciones de las capas límites usadas en el análisis.

A menudo, los datos experimentales para la transferencia de calor se representan con precisión razonable mediante una simple relación de la ley de las potencias de la forma

$$\text{Nu} = C \text{Re}_L^m \text{Pr}^n \quad (6-75)$$

donde m y n son exponentes constantes (por lo común entre 0 y 1) y el valor de la constante C depende de la configuración geométrica. Para obtener una mayor precisión, a veces se usan relaciones más complejas.

Número de Nusselt local:

$$\text{Nu}_x = \text{función}(x^*, \text{Re}_L, \text{Pr})$$

Número de Nusselt promedio:

$$\text{Nu} = \text{función}(\text{Re}_L, \text{Pr})$$

Una forma común del número de Nusselt:

$$\text{Nu} = C \text{Re}_L^m \text{Pr}^n$$

FIGURA 6-34

Para una configuración geométrica dada, el número promedio de Nusselt es función de los números de Reynolds y Prandtl.

6-11 ■ ANALOGÍAS ENTRE LA CANTIDAD DE MOVIMIENTO Y LA TRANSFERENCIA DE CALOR

En el análisis de la convección forzada, el interés principal se centra en la determinación de las cantidades C_f (para calcular el esfuerzo cortante en la pared) y Nu (para calcular las velocidades de la transferencia de calor). Por lo tanto, resulta muy conveniente contar con una relación entre C_f y Nu , de mo-

do que se pueda calcular uno de ellos cuando se dispone del otro. Las relaciones de este tipo se desarrollan con base en la semejanza entre las transferencias de la cantidad de movimiento y del calor en las capas límite y se conocen como *analogía de Reynolds* y *analogía de Chilton-Colburn*.

Vuelva a considerar las ecuaciones de la cantidad del movimiento de la energía con las dimensiones eliminadas para el flujo laminar, incompresible y estacionario de un fluido con propiedades constantes y disipación viscosa despreciable (ecuaciones 6-65 y 6-66). Cuando $Pr = 1$ (que es aproximadamente el caso para los gases) y $\partial P^*/\partial x^* = 0$ (que es el caso cuando $u = V = \text{constante}$ en la corriente libre, como en el flujo sobre una placa plana), estas ecuaciones se simplifican hasta

$$\text{Cantidad de movimiento: } u^* \frac{\partial u^*}{\partial x^*} + v^* \frac{\partial u^*}{\partial y^*} = \frac{1}{Re_L} \frac{\partial^2 u^*}{\partial y^{*2}} \quad (6-76)$$

$$\text{Energía: } u^* \frac{\partial T^*}{\partial x^*} + v^* \frac{\partial T^*}{\partial y^*} = \frac{1}{Re_L} \frac{\partial^2 T^*}{\partial y^{*2}} \quad (6-77)$$

las cuales tienen exactamente la misma forma para la velocidad u^* y la temperatura T^* adimensionales. Las condiciones de frontera para u^* y T^* también son idénticas. Por lo tanto, las funciones u^* y T^* deben ser idénticas y, de este modo, las primeras derivadas de u^* y T^* en la superficie deben ser iguales entre sí,

$$\left. \frac{\partial u^*}{\partial y^*} \right|_{y^*=0} = \left. \frac{\partial T^*}{\partial y^*} \right|_{y^*=0} \quad (6-78)$$

Entonces, por las ecuaciones 6-69, 6-70 y 6-73, se tiene

$$C_{f,x} \frac{Re_L}{2} = Nu_x \quad (Pr = 1) \quad (6-79)$$

la cual se conoce como **analogía de Reynolds** (figura 6-35). Ésta es importante ya que permite determinar el coeficiente de transferencia de calor para los fluidos con $Pr \approx 1$ a partir de un conocimiento del coeficiente de fricción, el cual es más fácil de medir. La analogía de Reynolds también se expresa de manera alternativa como

$$\frac{C_{f,x}}{2} = St_x \quad (Pr = 1) \quad (6-80)$$

donde

$$St = \frac{h}{\rho c_p V} = \frac{Nu}{Re_L Pr} \quad (6-81)$$

es el **número de Stanton**, el cual también es un coeficiente de transferencia de calor adimensional.

La analogía de Reynolds tiene un uso limitado en virtud de las restricciones $Pr = 1$ y $\partial P^*/\partial x^* = 0$ sobre ella y resulta conveniente contar con una analogía que sea aplicable en un amplio rango de Pr . Esto se logra al agregar una corrección del número de Prandtl.

En la sección 6-8 se determinó que el coeficiente de fricción y el número de Nusselt para una placa plana son

$$C_{f,x} = 0.664 Re_x^{-1/2} \quad \text{y} \quad Nu_x = 0.332 Pr^{1/3} Re_x^{1/2} \quad (6-82)$$

Al determinar la razón de uno con respecto al otro y reacomodar los términos se obtiene la relación deseada, conocida como la **analogía modificada de Reynolds** o **analogía de Chilton-Colburn**.

$$C_{f,x} \frac{Re_L}{2} = Nu_x Pr^{-1/3} \quad \text{o} \quad \frac{C_{f,x}}{2} = \frac{h_x}{\rho c_p V} Pr^{2/3} \equiv j_H \quad (6-83)$$

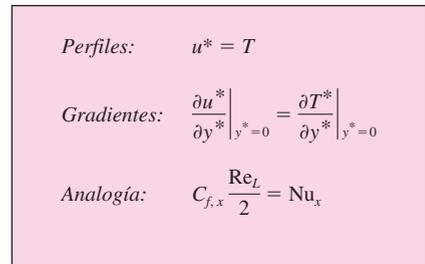


FIGURA 6-35

Cuando $Pr = 1$ y $\partial P^*/\partial x^* \approx 0$, la velocidad no dimensional y los perfiles de temperatura se vuelven idénticos y Nu se relaciona con C_f por la analogía de Reynolds.

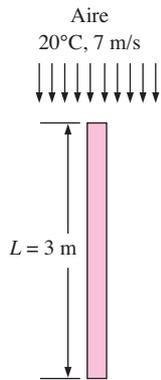


FIGURA 6-36

Esquema para el ejemplo 6-2.

para $0.6 < Pr < 60$. Aquí, j_H se llama *factor j de Colburn*. Aun cuando esta relación se desarrolla mediante relaciones para el flujo laminar sobre una placa plana (para la cual $\partial P^*/\partial x^* = 0$), los estudios experimentales muestran que también es aplicable aproximadamente para el flujo turbulento sobre una superficie, incluso en presencia de gradientes de presión. Sin embargo, para el flujo laminar la analogía no es aplicable a menos que $\partial P^*/\partial x^* \approx 0$. Por lo tanto, no se aplica el flujo laminar en un tubo. También se desarrollan analogías entre C_f y Nu que son más precisas, pero también más complejas y se encuentran más allá del alcance de este libro. Las analogías antes dadas se pueden usar tanto para las cantidades locales como para las promedio.

EJEMPLO 6-2 Modo de hallar el coeficiente de convección a partir de la medición de la resistencia al movimiento del fluido

Una placa plana de $2 \text{ m} \times 3 \text{ m}$ está suspendida en un cuarto y sujeta a flujo de aire paralelo a sus superficies a lo largo de su lado de 3 m . La temperatura y la velocidad de la corriente libre del aire son 20°C y 7 m/s . La fuerza total de resistencia que actúa sobre la placa es de 0.86 N . Determine el coeficiente promedio de transferencia de calor por convección para la placa (figura 6-36).

SOLUCIÓN Una placa plana está sujeta a flujo de aire y se mide la fuerza de resistencia que actúa sobre ella. Debe determinarse el coeficiente promedio de convección.

Suposiciones 1 Existen condiciones estacionarias de operación. 2 Los efectos de borde son despreciables. 3 La presión atmosférica local es de 1 atm .

Propiedades Las propiedades del aire a 20°C y 1 atm son (tabla A-15):

$$\rho = 1.204 \text{ kg/m}^3, \quad c_p = 1.007 \text{ kJ/kg} \cdot \text{K}, \quad Pr = 0.7309$$

Análisis El flujo es a lo largo del lado de 3 m de la placa y, por consiguiente, la longitud característica es $L = 3 \text{ m}$. Los dos lados de la placa están expuestos al flujo de aire, por lo tanto, el área superficial total es

$$A_s = 2WL = 2(2 \text{ m})(3 \text{ m}) = 12 \text{ m}^2$$

Para las placas planas la fuerza de resistencia es equivalente a la fuerza de fricción. Se puede determinar el coeficiente promedio de fricción C_f a partir de la ecuación 6-11,

$$F_f = C_f A_s \frac{\rho V^2}{2}$$

Al despejar C_f y sustituir

$$C_f = \frac{F_f}{\rho A_s V^2 / 2} = \frac{0.86 \text{ N}}{(1.204 \text{ kg/m}^3)(12 \text{ m}^2)(7 \text{ m/s})^2 / 2} \left(\frac{1 \text{ kg} \cdot \text{m/s}^2}{1 \text{ N}} \right) = 0.00243$$

Entonces se puede determinar el coeficiente promedio de transferencia de calor a partir de la analogía modificada de Reynolds (ecuación 6-83) como

$$h = \frac{C_f \rho V c_p}{2 Pr^{2/3}} = \frac{0.00243 (1.204 \text{ kg/m}^3)(7 \text{ m/s})(1007 \text{ J/kg} \cdot ^\circ\text{C})}{2 (0.7309)^{2/3}} = 12.7 \text{ W/m}^2 \cdot ^\circ\text{C}$$

Discusión Este ejemplo muestra la gran utilidad de las analogías de la cantidad de movimiento y la transferencia de calor en el sentido de que se puede determinar el coeficiente de transferencia de calor por convección a partir de un conocimiento del coeficiente de fricción, el cual es más fácil de determinar.

TEMA DE INTERÉS ESPECIAL

*Transferencia de calor a microescala**

Las consideraciones acerca de la transferencia de calor desempeñan un papel crucial en el diseño y la operación de muchos aparatos modernos. Se han desarrollado nuevos procedimientos y métodos de análisis para comprender y modular (mejorar o suprimir) esas interacciones energéticas. Comúnmente se modula mediante el control activo de los fenómenos superficiales, o por el enfoque de la energía volumétrica. En esta sección, se discute uno de esos ejemplos: la transferencia de calor a microescala.

Las invenciones recientes de sistemas a escalas micro ($\sim 10^{-6}$) y nano ($\sim 10^{-9}$) han mostrado inmensos beneficios en los procesos de flujo de fluidos y de transferencia de calor. Estos aparatos son extremadamente diminutos, sólo visibles a través de microscopios electrónicos. La comprensión detallada del mecanismo que rige estos sistemas se encontrará en el corazón de la realización de muchas tecnologías futuras. Los ejemplos incluyen los sensores químicos y biológicos, el almacenamiento de hidrógeno, los aparatos de exploración espacial y el cribado de medicamentos. Sin embargo, el desarrollo de dispositivos a microescala y nanoescala plantea también varios desafíos nuevos. Por ejemplo, el conocimiento clásico de la transferencia de calor se origina a partir del enfoque del equilibrio térmico, y las ecuaciones se deducen para un medio continuo. A medida en que la escala de dimensiones geométricas del sistema se vuelve minúscula, la transferencia de calor por medio de estas partículas, en sistemas a nanoescala, deja de ser un proceso de equilibrio y el enfoque basado en el equilibrio del medio continuo ya tampoco es válido. Por consiguiente, se vuelve esencial una comprensión más general del concepto de transferencia de calor.

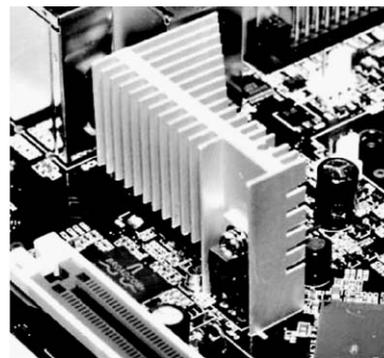
En la transferencia de calor a microescala y nanoescala resultan cruciales tanto la escala de longitud como la de tiempo. El significado de la escala de longitud se torna evidente a partir del hecho de que el área superficial por unidad de volumen de un objeto aumenta conforme se contrae la escala de longitud de ese objeto. Esto significa que la transferencia de calor a través de la superficie se vuelve más importante en algunos órdenes de magnitud en caso de los sistemas a microescala que en los grandes objetos cotidianos. A menudo, el transporte de energía térmica en los equipos electrónicos y termoeléctricos ocurre en un rango de escalas de longitud que va de milímetros a nanómetros. Por ejemplo, en un chip microelectrónico (digamos el MOSFET de la figura 6-37), el calor se genera en una región de drenaje de tamaño nanométrico y finalmente es conducido hacia los alrededores a través de sustratos cuyo espesor es del orden de un milímetro. Resulta claro que el transporte de energía y los mecanismos de conversión en estos sistemas comprenden un amplio rango de escalas de longitud y son bastante difíciles de modelar.

Las escalas pequeñas de tiempo también desempeñan un papel importante en los mecanismos de transporte de energía. Por ejemplo, láseres de pulsos ultracortos (del orden de picosegundos y femtosegundos) son en extremo útiles para la industria de procesamiento de materiales. En este caso, las diminutas escalas de tiempo permiten la interacción localizada láser-material, benéfica para el depósito y transporte de alta energía.

*Esta sección es una contribución de Subrata Roy, Computational Plasma Dynamics Laboratory, Mechanical Engineering, Kettering University, Flint, MI.

FIGURA 6-37

Transistor de efecto de campo de metal-óxido-semiconductor (MOSFET, *metal-oxide-semiconductor field-effect transistor*) usado en microelectrónica.



© Vol. 80/PhotoDisc/Getty Images

La aplicabilidad del modelo del medio continuo se determina por el valor local del número adimensional de Knudsen (Kn), el cual se define como la razón del recorrido libre medio (rlm , o *mfp*, por las primeras siglas en inglés *mean free path*) del medio portador del calor a la escala de longitud de referencia del sistema (por ejemplo, la longitud de difusión térmica). Los efectos a microescala se vuelven importantes cuando el rlm se hace comparable a la longitud de referencia del dispositivo, o mayor que ésta, digamos a $Kn > 0.001$. Como resultado, las propiedades termofísicas de los materiales se vuelven dependientes de la estructura y los procesos de conducción del calor ya no son fenómenos locales, sino que exhiben efectos de radiación de rango largo.

El modelo macroscópico convencional de conducción de Fourier viola esta característica no local de transferencia de calor a microescala y se necesitan enfoques alternativos para el análisis. El modelo más apropiado en la actualidad es el concepto de *fonón*. La energía térmica en un material sólido uniforme se puede interpretar como las vibraciones de una red regular de átomos espaciados muy cerca uno del otro en su interior. Estos átomos exhiben modos colectivos de ondas sonoras (fonones), las cuales transportan la energía en un material a la velocidad del sonido. Siguiendo los principios de la mecánica cuántica, los fonones exhiben propiedades semejantes a partículas de bosones con espín cero (dualidad onda-partícula). Los fonones desempeñan un papel importante en muchas de las propiedades físicas de los sólidos, como las conductividades térmica y eléctrica. En los sólidos aislantes, los fotones también constituyen el mecanismo primario por medio del cual tiene lugar la conducción del calor.

La variación de la temperatura en la cercanía de la superficie limitante sigue siendo un determinante importante de la transferencia de calor a través de la superficie. Sin embargo, cuando el medio continuo tiende a desbaratarse, necesita modificarse la ley de Newton del enfriamiento, en la que se usan la temperatura de la superficie y la temperatura promedio de fluido. Específicamente, a diferencia de los objetos a macroescala, en donde las temperaturas de la superficie (T_w) y del fluido adyacente (T_g) son iguales ($T_w = T_g$), en un microdispositivo se tiene un salto en la temperatura y los dos valores son diferentes. En 1898, Von Smoluchowski dedujo una relación muy conocida con el fin de calcular el salto en la temperatura en la superficie de una microconfiguración geométrica,

$$T_g - T_w = \frac{2 - \sigma_T}{\sigma_T} \left[\frac{2\gamma}{\gamma + 1} \right] \frac{\lambda}{Pr} \left(\frac{\partial T}{\partial y} \right)_w \quad (6-84)$$

donde T es la temperatura en K, σ_T es el coeficiente de acomodación térmica e indica la fracción molecular reflejada en forma difusiva desde la su-

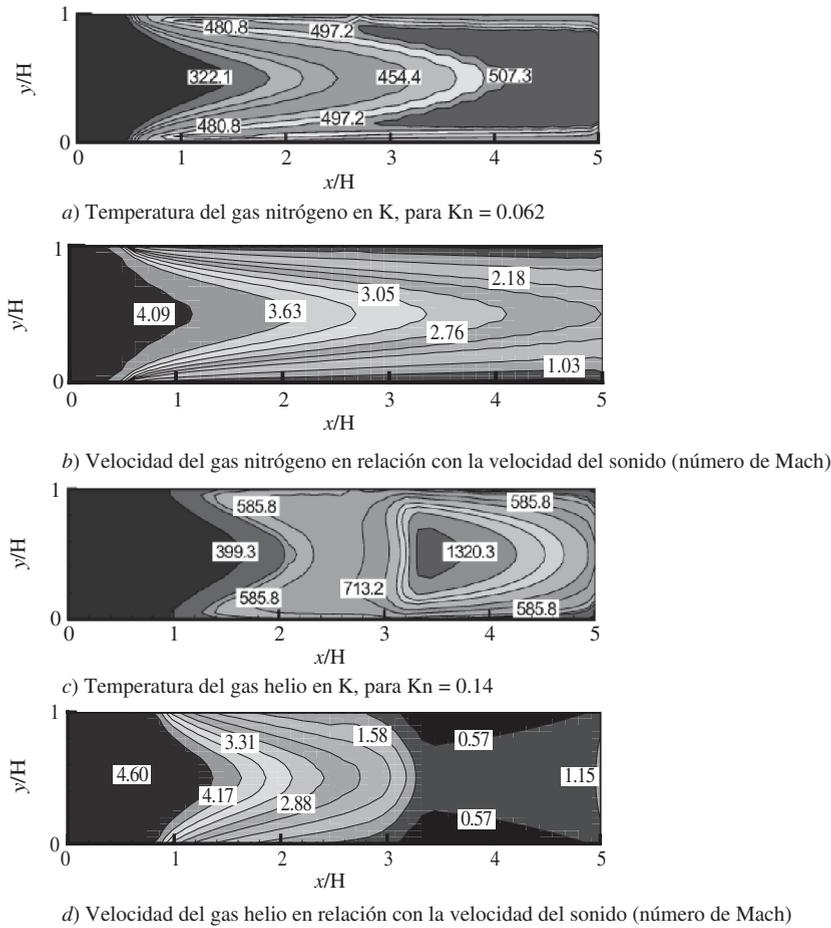


FIGURA 6-38

Características térmicas de fluidos en el interior de un microcanal.

(Tomado de Raju y Roy, 2005).

perficie, γ es la razón de calores específicos y Pr es el número de Prandtl. Una vez que se conoce este valor, se puede calcular la razón de la transferencia de calor a partir de:

$$-k \left(\frac{\partial T}{\partial y} \right)_w = \frac{\sigma_T \sqrt{2\pi RT}}{2 - \sigma_T} \left[\frac{\gamma + 1}{2\gamma} \right] \frac{5\rho c_p}{16} (T_w - T_g) \quad (6-85)$$

Como ejemplo, en la figura 6-38 se tiene las gráficas de la distribución de temperaturas y los contornos del número de Mach, en el interior de un microtubo de ancho $H = 1.2 \mu\text{m}$, para el flujo supersónico de nitrógeno y helio. Para el gas nitrógeno con un $Kn = 0.062$ a la entrada, la temperatura del gas (T_g) adyacente a la pared difiere de manera sustancial de la temperatura constante de la pared, como se muestra en la figura 6-38a, donde T_w es de 323 K y T_g es casi de 510 K. El efecto de esta transferencia de calor a la pared consiste en reducir el número de Mach, como se muestra en la figura 6-38b, si bien el flujo se mantiene supersónico. Para el gas helio con un $Kn = 0.14$ de entrada y una temperatura más baja de la pared de 298 K, la temperatura del gas inmediatamente adyacente a la pared es incluso más alta; hasta 586 K, como se muestra en la figura 6-38c. Esto crea un flujo de calor muy alto en la pared, que es inalcanzable en aplicaciones a macroescala. En este caso, mostrado en la figura 6-38d, la transferencia de calor es suficientemente grande como para bloquear el flujo.

1. D. G. Cahill, W. K. Ford, K. E. Goodson y otros, "Nanoscale Thermal Transport". *Journal of Applied Physics*, 93, 2 (2003), págs. 793-817.

2. R. Raju y S. Roy, "Hydrodynamic Study of High Speed Flow and Heat Transfer through a Microchannel". *Journal of Thermophysics and Heat Transfer*, 19, 1 (2005), págs. 106-113.
3. S. Roy, R. Raju, H. Chuang, B. Kruden y M. Meyyappan, "Modeling Gas Flow Through Microchannels and Nanopores". *Journal of Applied Physics*, 93, 8 (2003), págs. 4870-79.
4. M. von Smoluchowski, "Ueber Wärmeleitung in Verdünnten Gasen", *Annalen der Physik und Chemi.* 64 (1898), págs. 101-130.
5. C. L. Tien, A. Majumdar y F. Gerner. *Microscale Energy Transport*. Nueva York: Taylor & Francis Publishing, 1998.

RESUMEN

La transferencia de calor por convección se expresa por la *ley de Newton del enfriamiento* como

$$\dot{Q}_{\text{conv}} = hA_s(T_s - T_\infty)$$

donde h es el coeficiente de transferencia de calor por convección, T_s es la temperatura superficial y T_∞ es la temperatura de la corriente libre. El coeficiente de convección también se expresa como

$$h = \frac{-k_{\text{fluido}}(\partial T/\partial y)_{y=0}}{T_s - T_\infty}$$

El *número de Nusselt*, que es el coeficiente de transferencia de calor adimensional, se define como

$$\text{Nu} = \frac{hL_c}{k}$$

donde k es la conductividad térmica del fluido y L_c es la longitud característica.

El movimiento intensamente ordenado de los fluidos caracterizado por líneas suaves de corriente se llama *laminar*. El movimiento intensamente desordenado que por lo general se tiene a altas velocidades y se caracteriza por fluctuaciones de la velocidad se llama *turbulento*. Las fluctuaciones aleatorias y rápidas de los grupos de partículas del fluido, llamadas *remolinos*, proporcionan un mecanismo adicional para la transferencia de la cantidad de movimiento y del calor.

La región del flujo arriba de la placa, limitada por δ , en la cual se sienten los efectos de las fuerzas cortantes viscosas causadas por la viscosidad del fluido se llama *capa límite de la velocidad*. El *espesor de la capa límite* δ se define como la distancia desde la superficie a la cual $u = 0.99V$. La línea hipotética de $u = 0.99V$ divide el flujo sobre una placa en la *región de la capa límite*, en la cual los efectos viscosos y los cambios de la velocidad son significativos, y la *región del flujo no viscoso*, en la cual los efectos de la fricción son despreciables.

La fuerza de fricción por unidad de área se llama *esfuerzo cortante* y el esfuerzo cortante en la superficie de la pared se expresa como

$$\tau_s = \mu \left. \frac{\partial u}{\partial y} \right|_{y=0} \quad \text{o} \quad \tau_s = C_f \frac{\rho V^2}{2}$$

donde μ es la viscosidad dinámica, V es la velocidad corriente arriba y C_f es el *coeficiente de fricción* adimensional. La propiedad $\nu = \mu/\rho$ es la *viscosidad cinemática*. La fuerza de fricción sobre la superficie completa se determina a partir de

$$F_f = C_f A_s \frac{\rho V^2}{2}$$

La región de flujo sobre la superficie en la cual la variación de la temperatura en la dirección perpendicular a esa superficie es significativa es la *capa límite térmica*. El *espesor* de esta capa δ_t en cualquier lugar a lo largo de la superficie es la distancia desde ésta a la cual la diferencia de temperatura $T - T_s$ es igual a $0.99(T_\infty - T_s)$. El *espesor relativo* de las capas límite de la velocidad y térmica se describe de la mejor manera por medio del *número adimensional de Prandtl*, definido como

$$\text{Pr} = \frac{\text{Difusividad molecular de la cantidad de movimiento}}{\text{Difusividad molecular del calor}} = \frac{\nu}{\alpha} = \frac{\mu c_p}{k}$$

Para el flujo externo, el *número adimensional de Reynolds* se expresa como

$$\text{Re} = \frac{\text{Fuerzas de inercia}}{\text{Fuerzas viscosas}} = \frac{VL_c}{\nu} = \frac{\rho VL_c}{\mu}$$

Para una placa plana, la longitud característica es la distancia x desde el borde de ataque. El número de Reynolds en el cual el flujo se vuelve turbulento se llama *número crítico de Reynolds*. Para el flujo sobre una placa plana, su valor se toma como $\text{Re}_{\text{cr}} = Vx_{\text{cr}}/\nu = 5 \times 10^5$.

Las ecuaciones de continuidad, de la cantidad de movimiento y de la energía para el flujo incompresible, bidimensional y estacionario con propiedades constantes se determinan a partir de balances de la masa, la cantidad de movimiento y la energía, como

$$\text{Continuidad: } \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0$$

$$\text{Cantidad de movimiento en la dirección } x: \rho \left(u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} \right) = \mu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - \frac{\partial P}{\partial x}$$

$$\text{Energía: } \rho c_p \left[u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} \right] = k \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \right) + \mu \Phi$$

donde la función de disipación viscosa Φ es

$$\Phi = 2 \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial y} \right)^2 \right] + \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right)^2$$

Mediante las aproximaciones de las capas límite y una variable de semejanza, estas ecuaciones se pueden resolver para el flujo incompresible, estacionario y paralelo sobre una placa plana, con los resultados siguientes:

$$\text{Espesor de la capa límite de la velocidad: } \delta = \frac{4.91}{\sqrt{V/\nu x}} = \frac{4.91x}{\sqrt{\text{Re}_x}}$$

$$\text{Coeficiente local de fricción: } C_{f,x} = \frac{\tau_w}{\rho V^2/2} = 0.664 \text{Re}_x^{-1/2}$$

$$\text{Número local de Nusselt: } \text{Nu}_x = \frac{h_x x}{k} = 0.332 \text{Pr}^{1/3} \text{Re}_x^{1/2}$$

$$\text{Espesor de la capa límite térmica: } \delta_t = \frac{\delta}{\text{Pr}^{1/3}} = \frac{4.91x}{\text{Pr}^{1/3} \sqrt{\text{Re}_x}}$$

El coeficiente promedio de fricción y el número de Nusselt se expresan en forma funcional como

$$C_f = f(\text{Re}_L) \quad \text{y} \quad \text{Nu} = g(\text{Re}_L, \text{Pr})$$

El número de Nusselt se puede expresar por una simple relación de la ley de la potencia de la forma

$$\text{Nu} = C \text{Re}_L^m \text{Pr}^n$$

donde m y n son exponentes constantes y el valor de la constante C depende de la configuración geométrica. La *analogía de Reynolds* relaciona el coeficiente de convección con el de fricción, para fluidos con $\text{Pr} \approx 1$, y se expresa como

$$C_{f,x} \frac{\text{Re}_L}{2} = \text{Nu}_x \quad \text{o} \quad \frac{C_{f,x}}{2} = \text{St}_x$$

donde

$$\text{St} = \frac{h}{\rho c_p V} = \frac{\text{Nu}}{\text{Re}_L \text{Pr}}$$

es el *número de Stanton*. La analogía se extiende hacia otros números de Prandtl por la *analogía modificada de Reynolds* o *analogía de Chilton-Colburn*, expresada como

$$C_{f,x} \frac{\text{Re}_L}{2} = \text{Nu}_x \text{Pr}^{-1/3}$$

o bien,

$$\frac{C_{f,x}}{2} = \frac{h_x}{\rho c_p V} \text{Pr}^{2/3} \equiv j_H \quad (0.6 < \text{Pr} < 60)$$

Estas analogías también son aplicables aproximadamente para el flujo turbulento sobre una superficie, incluso en presencia de gradientes de presión.

BIBLIOGRAFÍA Y LECTURAS SUGERIDAS

1. H. Blasius, "The Boundary Layers in Fluids with Little Friction (en alemán)", en *Z. Math. Phys.*, 56, 1 (1908); págs. 1-37; traducción al inglés en el National Advisory Committee for Aeronautics Technical Memo No. 1256, febrero de 1950.
2. Y. A. Cengel y J. M. Cimbala, *Fluid Mechanics: Fundamentals and Applications*. Nueva York: McGraw-Hill, 2005
3. R. W. Fox y A. T. McDonald, *Introduction to Fluid Mechanics*, 5a. ed., Nueva York, Wiley, 1999.
4. W. M. Kays y M. E. Crawford, *Convective Heat and Mass Transfer*, 3a. ed., Nueva York: McGraw-Hill, 1993.
5. O. Reynolds, "On the Experimental Investigation of the Circumstances Which Determine Whether the Motion of Water Shall Be Direct or Sinous, and the Law of Resistance in Parallel Channels", en *Philosophical Transactions of the Royal Society of London* 174 (1883), págs. 935-82.
6. H. Schlichting, *Boundary Layer Theory*, 7a. ed., Nueva York: McGraw-Hill, 1979.
7. G. G. Stokes, "On the Effect of the Internal Friction of Fluids on the Motion of Pendulums", en *Cambridge Philosophical Transactions*, IX, 8, 1851.