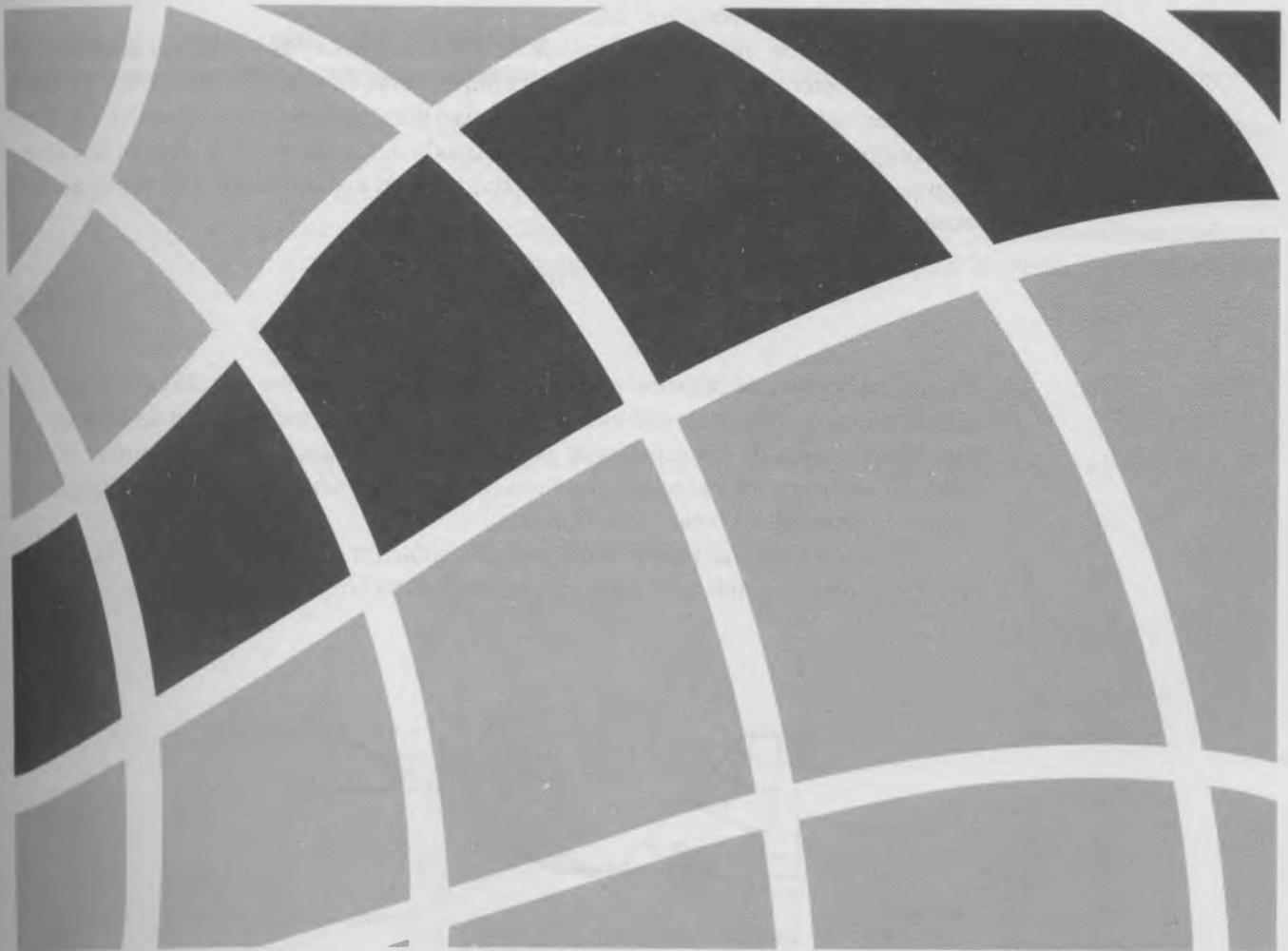


# CAPÍTULO 4

## *Conducción bidimensional en estado estable*

---



**H**asta aquí restringimos nuestra atención a problemas de conducción en los que el gradiente de temperatura es significativo sólo para una dirección coordenada. Sin embargo, en muchos casos estos problemas se simplifican enormemente cuando se utiliza un tratamiento unidimensional y es necesario explicar efectos multidimensionales. En este capítulo examinamos varias técnicas para tratar sistemas bidimensionales en condiciones de estado estable.

## 4.1 Enfoques alternativos

Considere un sólido prismático largo en el que los efectos de conducción en dos dimensiones son importantes (figura 4.1). Con dos superficies aisladas y las otras a diferentes temperaturas,  $T_1 > T_2$ , la transferencia de calor por conducción ocurrirá de la superficie 1 a la 2. De acuerdo con la ley de Fourier, ecuación 2.3 o 2.4, el flujo local de calor en el sólido es un vector que en todas partes es perpendicular a las líneas de temperatura constante (*isotermas*). Las direcciones del vector flujo de calor se representan mediante las *líneas de flujo de calor* de la figura 4.1, y el vector mismo resulta de los componentes del flujo de calor en las direcciones  $x$  y  $y$ . Estos componentes están determinados por la ecuación 2.6.

Recuerde que, en cualquier análisis de conducción, hay dos objetivos principales. El primero es determinar la distribución de temperaturas en el medio que, para el problema actual, necesita determinar  $T(x, y)$ . Este objetivo normalmente se logra resolviendo la forma apropiada de la ecuación de calor. Para condiciones de estado estable en dos dimensiones sin generación y con una conductividad térmica constante, esta forma es, de la ecuación 2.16,

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} = 0 \quad (4.1)$$

Si la ecuación 4.1 se resuelve para  $T(x, y)$ , es entonces asunto sencillo satisfacer el segundo objetivo principal, que es determinar las componentes de flujo de calor  $q_x''$  y  $q_y''$  con la aplicación de las ecuaciones de flujo (2.6). Los métodos para resolver la ecuación 4.1 incluyen los enfoques *analítico*, *gráfico* y *numérico* (*de diferencias finitas*, *de elemento finito* o *de elemento de frontera*).

El método analítico implica obtener una solución matemática exacta a la ecuación 4.1. El problema es más difícil que los planteados en el capítulo 3, pues ahora implica una

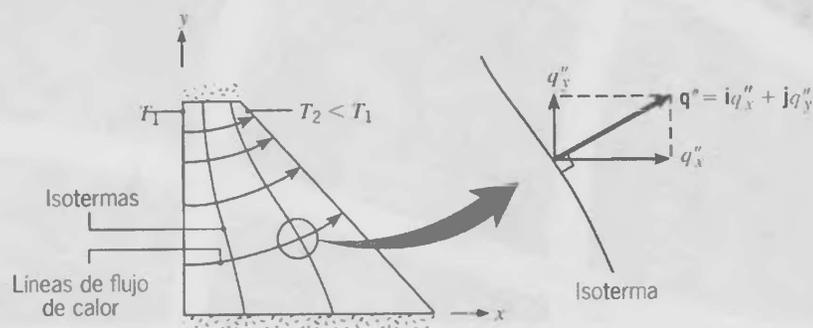


FIGURA 4.1 Conducción en dos dimensiones.

ecuación diferencial en derivadas parciales, en lugar de una ordinaria. Aunque se dispone de varias técnicas para resolver estas ecuaciones, las soluciones implican típicamente series y funciones matemáticas complicadas que es posible obtener sólo para un conjunto restringido de geometrías simples y condiciones de frontera [1-5]. No obstante, las soluciones son de valor considerable, pues la variable dependiente  $T$  se determina como una función continua de las variables independientes  $(x, y)$ . Por tanto, la solución es útil para calcular la temperatura en *cualquier* punto de interés en el medio. Para ilustrar la naturaleza e importancia de las técnicas analíticas, en la sección 4.2 se obtiene una solución exacta de la ecuación 4.1 mediante el método de *separación de variables*.

En contraste con los métodos analíticos, que proporcionan resultados *exactos* en *cualquier* punto, los métodos gráfico y numérico proporcionan sólo resultados *aproximados* en puntos *discretos*. Sin embargo, como los métodos se adaptan a geometrías complejas y condiciones de frontera, a menudo ofrecen los únicos medios para resolver problemas de conducción multidimensional. El método gráfico, o de trazo del flujo, (sección 4.3) sirve de estimación aproximada del campo de temperaturas, mientras que el método numérico (secciones 4.4 y 4.5) se utiliza para obtener resultados extremadamente precisos en cuanto a geometrías complejas.

## 4.2

### Método de separación de variables

A fin de apreciar cómo se aprovecha el método de separación de variables para resolver problemas de conducción en dos dimensiones, consideremos el sistema de la figura 4.2. Tres lados de la placa rectangular se mantienen a una temperatura constante  $T_1$ , mientras el cuarto lado se mantiene a una temperatura constante  $T_2 \neq T_1$ . Estamos interesados en la distribución de temperaturas  $T(x, y)$ , pero para simplificar la solución introducimos la transformación

$$\theta \equiv \frac{T - T_1}{T_2 - T_1} \quad (4.2)$$

Al sustituir la ecuación 4.2 en la ecuación 4.1, la ecuación diferencial transformada es

$$\frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \theta}{\partial y^2} = 0 \quad (4.3)$$

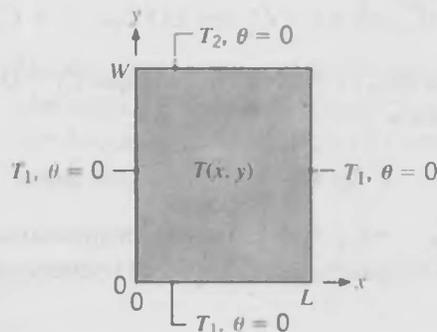


FIGURA 4.2

Conducción bidimensional en una placa rectangular.



Como la ecuación es de segundo orden en  $x$  y  $y$ , se necesitan dos condiciones de frontera para cada una de las coordenadas. Éstas son

$$\begin{aligned} \theta(0, y) = 0 & \quad y & \quad \theta(x, 0) = 0 \\ \theta(L, y) = 0 & \quad y & \quad \theta(x, W) = 1 \end{aligned}$$

Advierta que, a través de la transformación de la ecuación 4.2, tres de las cuatro condiciones de frontera son ahora homogéneas y el valor de  $\theta$  está restringido al intervalo entre 0 y 1.

Aplicamos ahora la técnica de separación de variables suponiendo que es posible expresar la solución deseada como el producto de dos funciones, una de las cuales depende sólo de  $x$  mientras que la otra depende sólo de  $y$ . Es decir, suponemos la existencia de una solución de la forma

$$\theta(x, y) = X(x) \cdot Y(y) \quad (4.4)$$

Al sustituir en la ecuación 4.3 y dividir entre  $XY$ , obtenemos

$$-\frac{1}{X} \frac{d^2 X}{dx^2} = \frac{1}{Y} \frac{d^2 Y}{dy^2} \quad (4.5)$$

y es evidente que la ecuación diferencial es, de hecho, separable. Es decir, el lado izquierdo de la ecuación depende sólo de  $x$  y el lado derecho sólo de  $y$ . Así la igualdad se aplica en general (para cualquier  $x$  o  $y$ ) sólo si ambos lados son iguales a la misma constante. Al identificar esta *constante de separación* — hasta ahora desconocida — como  $\lambda^2$ , tenemos

$$\frac{d^2 X}{dx^2} + \lambda^2 X = 0 \quad (4.6)$$

$$\frac{d^2 Y}{dy^2} - \lambda^2 Y = 0 \quad (4.7)$$

y la ecuación diferencial parcial se reduce a dos ecuaciones diferenciales ordinarias. Advierta que la designación de  $\lambda^2$  como una constante positiva no fue arbitraria. Si se seleccionara un valor negativo o se eligiera un valor  $\lambda^2 = 0$ , sería fácil demostrar (problema 4.1) que es imposible obtener una solución que satisfaga las condiciones de frontera que se establecen.

Las soluciones generales a las ecuaciones 4.6 y 4.7 son, respectivamente,

$$X = C_1 \cos \lambda x + C_2 \sin \lambda x$$

$$Y = C_3 e^{-\lambda y} + C_4 e^{\lambda y}$$

en cuyo caso la forma general de la solución en dos dimensiones es

$$\theta = (C_1 \cos \lambda x + C_2 \sin \lambda x)(C_3 e^{-\lambda y} + C_4 e^{\lambda y}) \quad (4.8)$$

Al aplicar la condición que  $\theta(0, y) = 0$ , es evidente que  $C_1 = 0$ . Además del requerimiento que  $\theta(x, 0) = 0$ , obtenemos

$$C_2 \sin \lambda x (C_3 + C_4) = 0$$

que sólo se satisface si  $C_3 = -C_4$ . Aunque el requerimiento también podría satisfacerse con  $C_2 = 0$ , esta igualdad eliminaría por completo la dependencia de  $x$  y por ello propo-

cionaría una solución inaceptable. Si recurrimos al requerimiento  $\theta(L, y) = 0$ , obtenemos

$$C_2 C_4 \operatorname{sen} \lambda L (e^{\lambda y} - e^{-\lambda y}) = 0$$

La única forma de satisfacer esta condición (y aun tener una solución aceptable) es hacer que  $\lambda$  tome valores discretos para los que  $\operatorname{sen} \lambda L = 0$ . Estos valores deben entonces, ser de la forma

$$\lambda = \frac{n\pi}{L} \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (4.9)$$

donde se excluye el entero  $n = 0$  pues proporciona una solución inaceptable. La solución que se desea se expresa como

$$\theta = C_2 C_4 \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{L} (e^{n\pi y/L} - e^{-n\pi y/L}) \quad (4.10)$$

Al combinar constantes y reconocer que la nueva constante depende de  $n$ , obtenemos

$$\theta(x, y) = C_n \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{L} \operatorname{senh} \frac{n\pi y}{L}$$

donde también hemos utilizado el hecho de que  $(e^{n\pi y/L} - e^{-n\pi y/L}) = 2 \operatorname{senh} (n\pi y/L)$ . En la forma anterior obtuvimos realmente un número infinito de soluciones que satisfacen la ecuación diferencial original y las condiciones de frontera. Sin embargo, como el problema es lineal, se obtiene una solución más general a partir de una superposición de la forma

$$\theta(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{L} \operatorname{senh} \frac{n\pi y}{L} \quad (4.11)$$

Para determinar  $C_n$  aplicamos ahora la condición de frontera restante, que es de la forma

$$\theta(x, W) = 1 = \sum_{n=1}^{\infty} C_n \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{L} \operatorname{senh} \frac{n\pi W}{L} \quad (4.12)$$

Aunque la ecuación 4.12 parecería ser una relación extremadamente complicada para evaluar  $C_n$ , se dispone de un método estándar. Éste implica escribir una expansión en serie infinita análoga en términos de *funciones ortogonales*. Un conjunto infinito de funciones  $g_1(x), g_2(x), \dots, g_n(x), \dots$  se dice que es ortogonal en el dominio  $a \leq x \leq b$  si

$$\int_a^b g_m(x) g_n(x) dx = 0 \quad m \neq n \quad (4.13)$$

Muchas funciones exhiben ortogonalidad, incluidas las funciones trigonométricas  $\operatorname{sen}(n\pi x/L)$  y  $\operatorname{cos}(n\pi x/L)$  para  $0 \leq x \leq L$ . Su utilidad en el problema actual radica en el hecho de que cualquier función  $f(x)$  se expresa en términos de una serie infinita de funciones ortogonales

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n g_n(x) \quad (4.14)$$



La forma de los coeficientes  $A_n$  en esta serie se determina multiplicando cada lado de la ecuación por  $g_n(x)$  e integrando entre los límites  $a$  y  $b$ .

$$\int_a^b f(x)g_n(x) dx = \int_a^b g_n(x) \sum_{n=1}^{\infty} A_n g_n(x) dx \quad (4.15)$$

Sin embargo, de la ecuación 4.13 es evidente que todos excepto uno de los términos en el lado derecho de la ecuación 4.15 deben ser cero, lo que nos deja con

$$\int_a^b f(x)g_n(x) dx = A_n \int_a^b g_n^2(x) dx$$

De aquí

$$A_n = \frac{\int_a^b f(x)g_n(x) dx}{\int_a^b g_n^2(x) dx} \quad (4.16)$$

Las propiedades de las funciones ortogonales sirven para resolver la ecuación 4.12 para  $C_n$  a través de una serie infinita *análoga* para la forma apropiada de  $f(x)$ . De la ecuación 4.12 se desprende que debemos elegir  $f(x) = 1$  y la función ortogonal  $g_n(x) = \sin(n\pi x/L)$ . Al sustituir en la ecuación 4.16 obtenemos

$$A_n = \frac{\int_0^L \sin \frac{n\pi x}{L} dx}{\int_0^L \sin^2 \frac{n\pi x}{L} dx} = \frac{2}{\pi} \frac{(-1)^{n+1} + 1}{n}$$

Por tanto, de la ecuación 4.14, tenemos

$$1 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{\pi} \frac{(-1)^{n+1} + 1}{n} \sin \frac{n\pi x}{L} \quad (4.17)$$

que es simplemente la expansión de la unidad en una serie de Fourier. Al comparar las ecuaciones 4.12 y 4.17 obtenemos

$$C_n = \frac{2[(-1)^{n+1} + 1]}{n\pi \sinh(n\pi W/L)} \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (4.18)$$

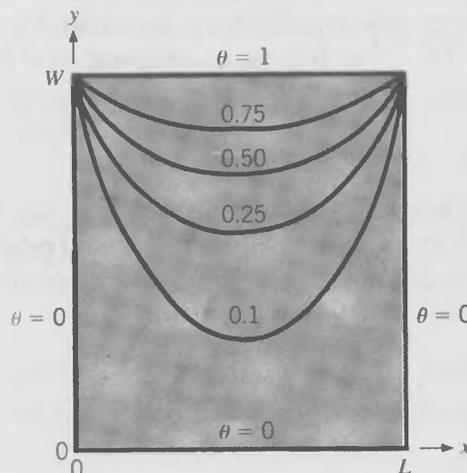


FIGURA 4.3

Isotermas para la conducción bidimensional en una placa rectangular.

Al sustituir la ecuación 4.18 en la ecuación 4.11, obtenemos entonces la solución final

$$\theta(x, y) = \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} + 1}{n} \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{L} \frac{\operatorname{senh}(n\pi y/L)}{\operatorname{senh}(n\pi W/L)} \quad (4.19)$$

La ecuación 4.19 es una serie convergente, de la que el valor de  $\theta$  se calcula para cualquier  $x$  y  $y$ . Los resultados representativos se muestran en forma de isotermas para un esquema de la placa rectangular (figura 4.3). La temperatura  $T$ , que corresponde a un valor de  $\theta$ , se puede obtener con la ecuación 4.2. En la bibliografía [1-5] se proporcionan soluciones exactas para otras geometrías y condiciones de frontera.

## 4.3

### Método gráfico

El método gráfico se emplea para problemas bidimensionales que incluyen fronteras adiabáticas e isotérmicas. El planteamiento demanda algo de paciencia y talento artístico (sin mencionar el uso de papel grueso y una buena goma de borrar) y ha sido reemplazado en gran medida por las soluciones de computadora que se basan en procedimientos numéricos. A pesar de sus limitaciones, el método permite obtener una primera estimación de la distribución de temperaturas y desarrollar una valoración física de la naturaleza del campo de temperaturas y del flujo de calor en un sistema.

#### 4.3.1 Metodología de la construcción de una gráfica de flujo

La base del método gráfico viene del hecho de que las líneas de temperatura constante deben ser perpendiculares a las líneas que indican la dirección del flujo de calor (figura 4.1). El objetivo del método gráfico es construir de manera sistemática dicha red de isotermas y líneas de flujo de calor. Esta red, normalmente denominada *gráfica de flujo*, se usa para inferir la distribución de temperaturas y el flujo de calor en el sistema.

Considere un canal bidimensional cuadrado cuyas superficies interior y exterior se mantienen a  $T_1$  y  $T_2$ , respectivamente. En la figura 4.4a se muestra una sección transversal del canal. Los pasos de un procedimiento para construir la gráfica de flujo, parte de la cual se muestra en la figura 4.4b, se enumeran a continuación.

1. El primer paso en cualquier gráfica de flujo debe ser la *identificación de todas las líneas de simetría relevantes*. Estas líneas se determinan por condiciones térmicas así como por condiciones geométricas. Para el canal cuadrado de la figura 4.4a, estas líneas incluyen las verticales, horizontales y diagonales que se designan. Por tanto, para este sistema es posible considerar sólo un octavo de la configuración, como se muestra en la figura 4.4b.
2. *Las líneas de simetría son adiabáticas* en el sentido de que quizá no haya transferencia de calor en una dirección perpendicular a las líneas. Por tanto, son líneas de flujo de calor y deben tratarse como tales. Como no hay flujo de calor en una dirección perpendicular a la línea de flujo de calor, esta línea se denomina *adiabática*.



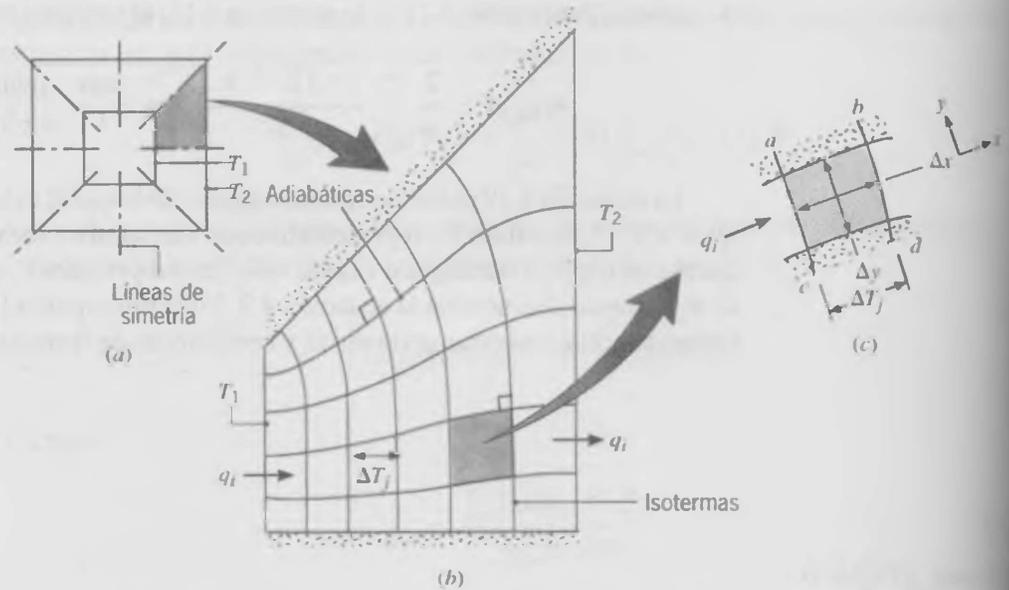


FIGURA 4.4 Conducción bidimensional en un canal cuadrado de longitud  $l$ . (a) Planos de simetría. (b) Gráfica de flujo. (c) Cuadrado curvilíneo típico.

- Después de que todas las líneas conocidas de temperatura constante asociadas con las fronteras del sistema hayan sido identificadas, debe hacerse un intento de dibujar líneas de temperatura constante dentro del sistema. Advierta que las *isotermas* siempre deben ser perpendiculares a las *adiabáticas*.
- Las líneas de flujo de calor deben entonces dibujarse con la finalidad de crear una red de *cuadrados curvilíneos*. Esto se logra haciendo que las *líneas de flujo de calor* y las *isotermas* se intersequen en ángulos rectos y que todos los lados de cada cuadrado sean de aproximadamente la misma longitud. A menudo es imposible satisfacer este segundo requerimiento con exactitud, y resulta más realista procurar la equivalencia entre las sumas de los lados opuestos de cada cuadrado, como se muestra en la figura 4.4c. Al asignar la coordenada  $x$  a la dirección del flujo de calor y la coordenada  $y$  a la dirección normal a este flujo, el requerimiento se expresa como

$$\Delta x \equiv \frac{ab + cd}{2} \approx \Delta y \equiv \frac{ac + bd}{2} \quad (4.3)$$

Es difícil crear una red satisfactoria de cuadrados curvilíneos al primer intento y a frecuencia deben realizarse numerosas iteraciones. Este proceso de ensayo y error implica ajustar las isotermas y adiabáticas hasta que se obtienen cuadrados curvilíneos satisfactorios para la mayor parte de la red.<sup>1</sup> Una vez que se logra la gráfica de flujo, se utiliza para inferir la distribución de temperaturas en el medio. A partir de un análisis seccional puede obtenerse la transferencia de calor.

<sup>1</sup> En ciertas regiones, como las esquinas, tal vez sea imposible aproximarse a los requerimientos del cuadrado curvilíneo. Sin embargo, estas dificultades por lo general tienen poco efecto sobre la precisión global de los resultados que se obtienen de la gráfica de flujo.

### 4.3.2 Determinación de la transferencia de calor

La rapidez a la que se conduce energía a través de una banda, que es la región entre adiabáticas contiguas, se designa como  $q_i$ . Si la gráfica de flujo se construye de forma apropiada, el valor de  $q_i$  será el mismo para todas las bandas y la transferencia de calor se expresa como

$$q = \sum_{i=1}^M q_i = Mq_i \quad (4.21)$$

donde  $M$  es el número de bandas asociado con la gráfica. A partir del cuadrado curvilíneo de la figura 4.4c y aplicando la ley de Fourier,  $q_i$  se expresa como

$$q_i \approx kA_i \frac{\Delta T_j}{\Delta x} \approx k(\Delta y \cdot l) \frac{\Delta T_j}{\Delta x} \quad (4.22)$$

donde  $\Delta T_j$  es la diferencia de temperaturas entre isotermas sucesivas,  $A_i$  es el área de transferencia de calor por conducción para la banda y  $l$  es la longitud del canal normal a la página. Sin embargo, si la gráfica de flujo está construida de forma apropiada, el incremento de temperatura es el mismo para todas las isotermas contiguas, y la diferencia global de temperaturas entre las fronteras,  $\Delta T_{1-2}$ , se expresa como

$$\Delta T_{1-2} = \sum_{j=1}^N \Delta T_j = N \Delta T_j \quad (4.23)$$

donde  $N$  es el número total de incrementos de temperatura. Al combinar las ecuaciones 4.21 a 4.23 y reconocer que  $\Delta x \approx \Delta y$  para cuadrados curvilíneos, obtenemos

$$q \approx \frac{Ml}{N} k \Delta T_{1-2} \quad (4.24)$$

La manera en que se aprovecha una gráfica de flujo para obtener la transferencia de calor en un sistema bidimensional es evidente según se muestra en la ecuación 4.24. La razón aritmética entre el número de bandas de flujo de calor y el número de incrementos de temperatura (el valor de  $M/N$ ) se obtiene de la gráfica. Recuerde que la especificación de  $N$  se basa en el paso 3 del procedimiento anterior, y el valor, que es un entero, se hará grande o pequeño dependiendo de la precisión que se desea. El valor de  $M$  es entonces una consecuencia de seguir el paso 4. Note que  $M$  no necesariamente es un entero, pues se necesitará una fracción de banda para llegar a una red satisfactoria de cuadrados curvilíneos. Para la red de la figura 4.4b,  $N = 6$  y  $M = 5$ . Por supuesto, conforme la red, o *malla*, de cuadrados curvilíneos se hace más fina,  $N$  y  $M$  aumentan y la estimación de  $M/N$  se hace más exacta.

### 4.3.3 Factor de forma de conducción

La ecuación 4.24 es útil para definir el *factor de forma*,  $S$ , de un sistema bidimensional. Es decir, la transferencia de calor puede expresarse como

$$q = Sk \Delta T_{1-2} \quad (4.25)$$



donde, para una gráfica de flujo,

$$S \equiv \frac{Ml}{N} \tag{4.26}$$

De la ecuación 4.25, también se sigue que una *resistencia de conducción bidimensional* se expresa como

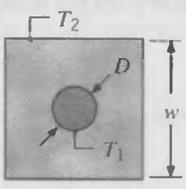
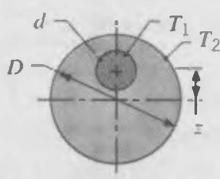
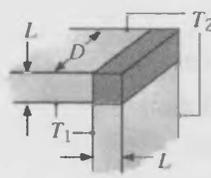
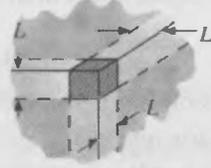
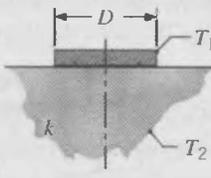
$$R_{r, \text{cond}(2D)} = \frac{1}{Sk} \tag{4.27}$$

Se han obtenido factores de forma para numerosos sistemas bidimensionales, y los resultados se resumen en la tabla 4.1 para algunas configuraciones comunes. En cada caso, se supone que la conducción bidimensional ocurre entre las fronteras que se mantienen a temperaturas uniformes, con  $\Delta T_{1-2} \equiv T_1 - T_2$ . También es posible definir factores de forma para geometrías unidimensionales y, de los resultados de la tabla 3.3, se sigue que para paredes planas cilíndricas y esféricas los factores de forma son, respectivamente,  $AL/2\pi L/\ln(r_2/r_1)$ , y  $4\pi r_1 r_2/(r_2 - r_1)$ . Se dispone de resultados para muchas otras configuraciones [6-9].

**TABLA 4.1** Factores de forma de conducción para sistemas bidimensionales seleccionados [ $q = Sk(T_1 - T_2)$ ]

Sistema	Esquema	Restricciones	Factor de forma
<b>Caso 1</b> Esfera isotérmica enterrada en un medio semiinfinito		$z > D/2$	$\frac{2\pi D}{1 - D/4z}$
<b>Caso 2</b> Cilindro isotérmico horizontal de longitud $L$ enterrado en un medio semiinfinito		$L \gg D$ $L \gg D$ $z > 3D/2$	$\frac{2\pi L}{\cosh^{-1}(2z/D)}$ $\frac{2\pi L}{\ln(4z/D)}$
<b>Caso 3</b> Cilindro vertical en un medio semiinfinito		$L \gg D$	$\frac{2\pi L}{\ln(4L/D)}$
<b>Caso 4</b> Conducción entre dos cilindros de longitud $L$ en un medio infinito		$L \gg D_1, D_2$ $L \gg w$	$\frac{2\pi L}{\cosh^{-1}\left(\frac{4w^2 - D_1^2 - D_2^2}{2D_1 D_2}\right)}$
<b>Caso 5</b> Cilindro circular horizontal de longitud $L$ en medio de planos paralelos de igual longitud y ancho infinito		$z \gg D/2$ $L \gg z$	$\frac{2\pi L}{\ln(8z/\pi D)}$

TABLA 4.1 Continuación

Sistema	Esquema	Restricciones	Factor de forma
<p>Caso 6</p> <p>Cilindro circular de longitud <math>L</math> centrado en un sólido cuadrado de igual longitud</p>		$w > D$ $L \gg w$	$\frac{2\pi L}{\ln(1.08 w/D)}$
<p>Caso 7</p> <p>Cilindro circular excéntrico de longitud <math>L</math> en un cilindro de igual longitud</p>		$D > d$ $L \gg D$	$\frac{2\pi L}{\cosh^{-1}\left(\frac{D^2 + d^2 - 4z^2}{2Dd}\right)}$
<p>Caso 8</p> <p>Conducción a través de la esquina de paredes contiguas</p>		$D > L/5$	$0.54D$
<p>Caso 9</p> <p>Conducción entre la esquina de tres paredes con diferencia de temperaturas <math>\Delta T_{1-2}</math> a través de las paredes</p>		$L \ll$ longitud y ancho de la pared	$0.15L$
<p>Caso 10</p> <p>Disco de diámetro <math>D</math> y <math>T_1</math> sobre un medio semiinfinito de conductividad térmica <math>k</math> y <math>T_2</math></p>		Ninguna	$2D$

**EJEMPLO 4.1**

Se hace un orificio de diámetro  $D = 0.25$  m a través del centro de un bloque sólido de sección transversal cuadrada con  $w = 1$  m por lado. El orificio se hace a lo largo de la longitud,  $l = 2$  m, del bloque, que tiene una conductividad térmica de  $k = 150$  W/m · K. Un fluido caliente que pasa por el orificio mantiene la superficie interna a una temperatura  $T_1 = 75^\circ\text{C}$ , mientras que la superficie externa del bloque se conserva a  $T_2 = 25^\circ\text{C}$ .

1. Con el método de la gráfica de flujo, determine el factor de forma para el sistema.
2. ¿Cuál es la transferencia de calor a través del bloque?

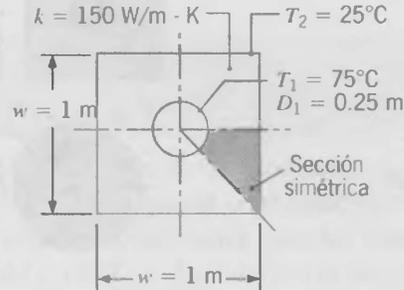
**SOLUCIÓN**

**Se conoce:** Dimensiones y conductividad térmica de un bloque con un orificio circular practicado a lo largo de su longitud.



**Encontrar:**

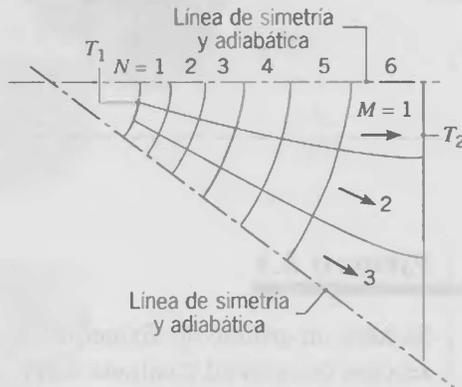
1. Factor de forma.
2. La transferencia de calor para las temperaturas superficiales que se establecen.

**Esquema:****Suposiciones:**

1. Condiciones de estado estable.
2. Conducción bidimensional.
3. Propiedades constantes.
4. Los extremos de los bloques están bien aislados.

**Análisis:**

1. La gráfica de flujo se simplifica identificando líneas de simetría y reduciendo el sistema al octavo de sección que se muestra en el esquema. La gráfica de flujo se generó con una red bastante burda que implica  $N = 6$  incrementos de temperatura. La red resultante de cuadrados curvilíneos es como sigue.



Con el número de bandas de flujo de calor para la sección que corresponde a  $M$  se sigue de la ecuación 4.26 que el factor de forma para el bloque entero es

$$S = 8 \frac{Ml}{N} = 8 \frac{3 \times 2 \text{ m}}{6} = 8 \text{ m}$$

donde el factor 8 resulta del número de secciones simétricas. La exactitud de este resultado se determina mediante la referencia a la tabla 4.1, en la cual, en cuanto al tema establecido, se desprende que

$$S = \frac{2\pi L}{\ln(1.08 w/D)} = \frac{2\pi \times 2 \text{ m}}{\ln(1.08 \times 1 \text{ m}/0.25 \text{ m})} = 8.59 \text{ m}$$

En consecuencia, el resultado de la gráfica de flujo predice aproximadamente 7% por debajo el factor de forma. Advierta que, aunque el requerimiento  $l \gg w$  no se satisface para este problema, el factor de forma que resulta de la tabla 4.1 es válido si hay una conducción axial insignificante en el bloque. Esta condición se satisface si los extremos están aislados.

2. Utilizando  $S = 8.59$  m con la ecuación 4.25, la transferencia de calor es

$$q = Sk(T_1 - T_2)$$

$$q = 8.59 \text{ m} \times 150 \text{ W/m} \cdot \text{K} (75 - 25)^\circ\text{C} = 64.4 \text{ kW} \quad \triangleleft$$

**Comentarios:** La precisión de la gráfica de flujo se mejorará usando una red más fina (aumentando el valor de  $N$ ). ¿Cómo cambiarían las líneas de simetría y de flujo de calor si los lados verticales se aislaran? ¿Si un lado vertical y uno horizontal estuvieran aislados? ¿Si ambos verticales y uno horizontal se aislaran?

## 4.4

### Ecuaciones de diferencias finitas

Como pudimos ver en las secciones 4.1 y 4.2, los métodos analíticos, en ciertos casos, sirven para obtener soluciones matemáticas exactas a problemas de conducción bidimensional en estado estable. Estas soluciones se generan para una variedad de geometrías simples y condiciones de frontera, y están bien documentadas en muchas publicaciones [1-5]. Sin embargo, con frecuencia los problemas bidimensionales implican geometrías y/o condiciones de frontera que excluyen este tipo de soluciones. En estos casos, la mejor alternativa es a menudo la que utiliza una técnica *numérica* como lo es el método de *diferencias finitas*, del *elemento finito* o del *elemento de frontera*. Debido a la facilidad de su aplicación, el método de diferencias finitas es adecuado para un tratamiento introductorio de las técnicas numéricas.

#### 4.4.1 Red nodal

En contraste con una solución analítica, que permite la determinación de la temperatura en *cualquier* punto de interés en un medio, una solución numérica permite determinar la temperatura sólo en puntos *discretos*. El primer paso en cualquier análisis numérico debe ser, por tanto, seleccionar estos puntos. Con referencia a la figura 4.5, esto se hace al subdividir el medio de interés en un número de pequeñas regiones y asignar a cada una un punto de referencia en su centro. El punto de referencia suele denominarse *punto nodal* (o simplemente *nodo*), y el agregado de puntos se conoce como *red nodal*, *malla* o *rejilla*. Los puntos nodales se designan por un esquema numérico que, para un sistema bidimensional, toman la forma que se muestra en la figura 4.5a. Las posiciones  $x$  y  $y$  se designan con los índices  $m$  y  $n$ , respectivamente.

Cada nodo representa cierta región, y su temperatura es una medida de la temperatura *promedio* de la región. Por ejemplo, la temperatura del nodo  $m, n$  de la figura 4.5a se ve

