# Sesión 1: ED

Dr. J. Juan Rosales García
Departamento de Ingeniería Eléctrica, DICIS-UGTO.

# Contenido de la Sesión 1:



Dr. J. Juan Rosales García
Departamento de Ingeniería Eléctrica, DICIS-UGTO.

- Presentación del Profesor.
- Contenido Sintético de la UDA: Ecuaciones Diferenciales (ED).
- Políticas de Evaluación de la UDA de ED.
- Literatura Recomendada.
- Caracterización de las EDs.
- Ejemplos.
- Ejercicios Propuestos.

# Presentación del Dr. Juan Rosales García



- Licenciatura y Maestría en Física Teórica: Universidad Estatal de Kharkov, República de Ucrania (Unión Soviética), 1992.
- Doctorado en Física Teórica: Instituto de Física y Universidad Autónoma Metropolitana-Iztapalapa, México 1997.
- Posdoctorado: Join Institute for Nuclear Research, Dubna, Moscú, Rusia, 1998-2000.
- Repatriación: Instituto de Física de la Universidad de Guanajuato, 2000-2002.
- Contratación: FIMEE-UG, 2003–

- Miembro del Sistema Nacional de Investigadores, 1997—
- Miembro de la Academia Mexicana de Ciencias, 2016–
- Profesor PRODEP
- Publicaciones en revistas científicas: 80
- 100 conferencias científicas y de divulgación, nacionales e internacionales.
- Libros: Ecuaciones Diferenciales Ordinarias, Ed. Universidad de Guanajuato 2009.

# Contenido Sintético de la UDA de Ecuaciones Diferenciales (EDs):



Dr. J. Juan Rosales García
Departamento de Ingeniería Eléctrica, DICIS-UGTO.

- Caracterización de las Ecuaciones Diferenciales (ED).
- EDs de primer orden, métodos de solución
- EDs de orden superior, métodos de solución.
- Solución de EDs usando series de potencias.
- Solución de EDs lineales usando la transformada de Laplace.
- Sistemas de EDs.
- Aplicaciones de las EDs a problemas de ingeniería.
- Introducción a las ecuaciones diferenciales parciales, EDP.

# Políticas de Evaluación:



Dr. J. Juan Rosales García Departamento de Ingeniería Eléctrica, DICIS-UGTO.

1. Cuatro exámenes parciales 20 por ciento cada uno.
2. Ocho tareas: total 10 por ciento
3. Un proyecto de investigación (por equipo): 10 por ciento

# Literatura Recomendada



Dr. J. Juan Rosales García
Departamento de Ingeniería Eléctrica, DICIS-UGTO.


- Rosales J., Guía M., (2009), Ecuaciones Diferenciales Ordinarias, Universidad de Guanajuato 1a ed.
- Aguilera-Cortés L.A., Torres-Cisneros M., González Palacios M.A., (2008), Ecuaciones Diferenciales Ordinarias: Notas de Clase. CSA. FIMEE-UG: N.CI.L(1) I 10-08.
- Zill G.D., (2009), Ecuaciones Diferenciales con aplicaciones de modelado, Cengage Learning Editorres, 9ª ed. México.
- Nagle R.K., Saff E.B. (2012), Fundamental of Differential Equations, Addison-Wesley third edition.
- Shampine L.F., Glandewell I., Thompson S., (2003), Solving ODEs with MATLAB.

Dr. J. Juan Rosales García
Departamento de Ingeniería Eléctrica, DICIS-UGTO.

# ECUACIONES DIFERENCIALES

Dr. J. Juan Rosales García
Departamento de Ingeniería Eléctrica, DICIS-UGTO.

# Motivación

- Imaginemos que conocemos una cierta población en un cierto tiempo, sabemos además, la frecuencia de reproducción y deseamos conocer qué población tendremos en 10 años.
- Suponga que desea poner un satélite en órbita, para esto deberá conocer que velocidad debe imprimirle para que alcance la altura necesaria.
- Si deseamos saber cómo cambia la temperatura de un cuerpo en un medio, qué debemos hacer?

Estos problemas se pueden modelar mediante una ecuación diferencial.

# Motivación



Dr. J. Juan Rosales García Departamento de Ingeniería Eléctrica, DICIS-UGTO.

En la naturaleza el reposo absoluto no existe, todo en el universo y el universo mismo está en constante movimiento, desde las galaxias y estrellas que se mueven unas respecto a otras, hasta las moléculas, átomos, electrones, protones, quarks, células, etc, están en constante movimiento. Nosotros diariamente nos desplazamos de un lugar a otro en un cierto intervalo de tiempo. ¿Cómo podemos modelar estos procesos que cambian? En el curso de cálculo diferencial aprendimos que una derivada se define como una razón de cambio, lo cual quiere decir que las derivadas nos pueden servir para modelar procesos que cambian.

# Motivación



Dr. J. Juan Rosales García
Departamento de Ingeniería Eléctrica, DICIS-UGTO.

Entonces, podemos definir a una ecuación diferencial como una relación que contiene variable(s) independiente(s), función dependiente y derivadas. Resolver una ecuación diferencial significaría encontrar la función dependiente, ésta nos dará el comportamiento del sistema, es decir, podremos predecir qué pasará con el sistema después de un tiempo dado. Las ecuaciones diferenciales se aplican a cualquier sistema en constante cambio, ya sea físico, químico, biológico, económico, etc. y a cualquier rama de la ingeniería, eléctrica, teoría de control, mecánica, civil, mecatrónica etc.

# Motivación



Dr. J. Juan Rosales García
Departamento de Ingeniería Eléctrica,
DICIS-UGTO.

Un proceso físico cualquiera se modela con un cierto tipo de ecuación diferencial, dependiendo del tipo de ecuación será el procedimiento usado para resolverla. Una vez resuelta la ecuación diferencial se hace un análisis de la solución.

# Competencias:

- Caracteriza los diferentes tipos de EDs.
- Verifica las soluciones de EDs.
- Construye una ED a partir de una familia de curvas.

Dr. J. Juan Rosales García
Departamento de Ingeniería Eléctrica, DICIS-UGTO.

# Mapa Mental

MAPA MENTAL — ECUACIONES DIFERENCIALES ORDINARIAS — AGOSTO-DICIEMBRE 2021

# Caracterización de EDs



Dr. J. Juan Rosales García Departamento de Ingeniería Eléctrica, DICIS-UGTO.

Definición: En general, una ecuación diferencial (ED) es una expresión que contiene variables independientes, función dependiente y sus derivadas.

Definición: Si la expresión contiene solo una variable independiente $x$, la función dependiente $y(x)$, y sus derivadas $y'(x), y''(x), y'''(x) \ldots$ se llama ecuación diferencial ordinaria (EDO) y se representa de la siguiente manera

$$F(x, y(x), y'(x), y''(x), \ldots, y^{(n)}(x)) = 0, \tag{1}$$

# Caracterización de EDs

**Definición:** Si la expresión contiene más de una variable independiente, por ejemplo: $x, t$, la función dependiente $y(x,t)$ y sus derivadas, $y'_x(x,t)$, $y'_t(x,t)\ldots$ se llama ecuación en derivadas parciales (EDP)

$$F(x, t, y(x,t), y'_x, y'_t, y''_{x,t}, y''_{t,t}, \ldots, y^{(n)}) = 0, \qquad (2)$$

donde $y'_x \equiv \frac{\partial y(x,t)}{\partial x}$, $y'_t \equiv \frac{\partial y(x,t)}{\partial t}$ son derivadas parciales.

# Caracterización de EDs



Dr. J. Juan Rosales García
Departamento de Ingeniería Eléctrica, DICIS-UGTO.

**Defínción:** El orden de una EDO es el de la derivada mayor
**Definición:** El grado de una EDO, es el exponente mayor que esta en la derivada mayor
**Definición:** Una ecuación diferenciale lineal de orden $n$ (EDL), no homogénea, es aquélla que se puede escribir como

$$a_n(x)y^{(n)} + a_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \ldots + a_1(x)y' + a_0(x)y = f(x) \tag{3}$$

Si $f(x) = 0$, la EDL es homogénea.

# Caracterización de EDs



Dr. J. Juan Rosales García
Departamento de Ingeniería Eléctrica, DICIS-UGTO.

**Definición:** La solución general de una ED de orden $n$ se escribe en forma explícita como

$$y = \phi(x, c_1, c_2, ..., c_n)$$

y en forma implícita

$$\phi(x, y, c_1, c_2, \ldots, c_n) = 0,$$

donde las $c_1, c_2, \ldots,$ son constantes de integración que dependen de las condiciones iniciales.

# Caracterización de EDs



Dr. J. Juan Rosales García
Departamento de Ingeniería Eléctrica,
DICIS-UGTO.

**Definición:** Una solución particular, explícita o implícita se escribe como

$$y = \phi(x, \tilde{c}_1, \tilde{c}_2, ..., \tilde{c}_n)$$

o

$$\phi(x, y, \tilde{c}_1, \tilde{c}_2, \ldots, \tilde{c}_n) = 0,$$

donde las $\tilde{c}_1, \tilde{c}_2, \ldots,$ no son arbitrarias, son números dados por las condiciones iniciales del problema.

# Ejemplos:



Dr. J. Juan Rosales García
Departamento de Ingeniería Eléctrica, DICIS-UGTO.

Caracterizar las siguientes ecuaciones diferenciales

1. $y' - xy = 0$
2. $y'' + 5y' + 3y = x^2 - 1$
3. $y\frac{\partial u}{\partial y} + x\frac{\partial u}{\partial x} = 0$
4. $t\frac{\partial u}{\partial t} + x\frac{\partial u}{\partial x} = u(x,t)$
5. $\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = x + y$
6. $(y')^2 = xy$
7. $yy'' - 4y' + y = x - 3$
8. $y''' + y^4 = 0$

# Respuestas:

- La ecuación 1: es una ED ordinaria de primer orden y grado uno; lineal y homogénea.
- La ecuación 2 es una ED ordinaria de segundo orden y grado uno; lineal y no homogénea.
- Las ecuaciones 3 y 4, son ecuaciones en derivadas parciales de orden uno, grado uno, homogénea y no homogénea, respectívamente.
- La ecuación 5, es una ecuación diferencial en derivadas parciales de orden dos y grado uno
- Las ecuaciones 6,7 y 8, son ecuaciones diferenciales ordinarias no lineales de primero, segundo y tercer orden, respectivamente. La ecuación (6) es de grado dos, las dos ecuaciones restantes son de grado uno.

# Ejemplo:

Queremos saber si la función

$$y(x) = ce^{-2x} + \frac{1}{3}e^{x} \tag{4}$$

es la solución de la ecuación diferencial

$$y' + 2y = e^{x} \tag{5}$$

Solución: La función (4) esta dada en forma explícita. Debemos sustituir (4) en (5). Para esto, derivamos (4)

$$y'(x) = -2ce^{-2x} + \frac{1}{3}e^{x} \tag{6}$$

Sustituyendo (6) y (4) en (5), obtenemos:

$$\cancel{-2ce^{-2x}} + \frac{1}{3}e^x + \cancel{2ce^{-2x}} + \frac{2}{3}e^x = \frac{3}{3}e^x = e^x \qquad (7)$$

El tener la identidad $e^x = e^x$ implica que la función (4) es la solución general de la ecuación diferencial (5).

# Ejemplo:



Verificar que la función

$$y(x) = 5e^{-3x} + 2 \tag{8}$$

es una solución particular de la ecuación diferencial

$$\frac{dy}{dx} + 3y = 6 \tag{9}$$

Solución: La función (8) esta dada en forma explícita. Así que derivando (8) respecto a $x$, resulta

$$\frac{dy}{dx} = -15e^{-3x} \tag{10}$$

Sustituyendo (8) y (10) en (9) resulta

Dr. J. Juan Rosales García Departamento de Ingeniería Eléctrica, DICIS-UGTO.

$$-15e^{-3x} + 3\left(5e^{-3x} + 2\right) = 6 \tag{11}$$

$$\cancel{-15e^{-3x} + 15e^{-3x}} + 6 = 6 \tag{12}$$

Esta igualdad $6 = 6$ demuestra que la función dada (8) es una solución particular de la ED (9).

# Ejemplo:

Dada la función

$$y(x) = \arctan(x + y) + c \tag{13}$$

Verificar que esta función es la solución de la ecuación diferencial

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{(x + y)^2} \tag{14}$$

Solución: Antes que nada, observe que no es posible escribir la función (13) en forma explícita, es decir, como $y = f(x)$, ya que aparece la función $y$ en el argumento de la función arcotangente. En tal caso, de la función (13) construiremos una ecuación diferencial de primer orden y vemos si podemos darle la misma forma que (14). Si esto es posible, entonces habremos demostrado que (13) es solución de (14).

# Verificando la solución



Dr. J. Juan Rosales García
Departamento de Ingeniería Eléctrica, DICIS-UGTO.

Recordando la fórmula trigonométrica: Si $y = \arctan u$, entonces su derivada se calcula como $y' = \frac{u'}{1+u^2}$.

$$\frac{dy}{dx} = \frac{(x+y)'}{1+(x+y)^2} = \frac{1+\frac{dy}{dx}}{1+(x+y)^2} \tag{15}$$

Sustituyendo en (14)

$$\frac{1+\frac{dy}{dx}}{1+(x+y)^2} = \frac{1}{(x+y)^2} \tag{16}$$

Esta expresión la podemos escribir como

$$\cancel{1} + \frac{dy}{dx} = \frac{1}{(x+y)^2}\left[1+(x+y)^2\right] = \frac{1}{(x+y)^2} + \cancel{1} \tag{17}$$

De esta manera, hemos obtenido la ED (14).

# Ejercicios Propuestos:



Dr. J. Juan Rosales García
Departamento de Ingeniería Eléctrica, DICIS-UGTO.

Caracterizar las siguientes ecuaciones diferenciales:

1. $x\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} + t = 1$
2. $y' - y = 2x - 3$
3. $\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2} + \frac{\alpha}{x^2} = 0$
4. $(1 - y^2)\mathrm{d}x + x\mathrm{d}y = 0$
5. $y' = \sqrt{1 + (y'')^2}$
6. $xy' + 1 = e^y$
7. $y' - \frac{y}{x} = x\cos x$
8. $xy' - 2y = 2x^3$