Sesión 11. EDOs de Orden Superior

Dr. J. Juan Rosales García
Departamento de Ingeniería Eléctrica, DICIS-UGTO.

Competencias:

- Reconoce las EDs de orden superior.
- Reduce una ED de orden superior a una EDO de menor orden y encuentra la solución.

Contenido de la Sesión 11:

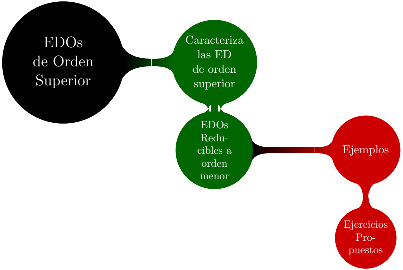
Dr. J. Juan Rosales García Departamento de Ingeniería Eléctrica, DICIS-UGTO.

- EDs de orden superior.
- Reducción de orden de una EDO de orden superior.

Dr. J. Juan Rosales García
Departamento de Ingeniería Eléctrica, DICIS-UGTO.

Mapa Mental

Ecuaciones Diferenciales Ordinarias   Agosto-Diciembre 2021



EDOs de orden superior

Dr. J. Juan Rosales García
Departamento de Ingeniería Eléctrica, DICIS-UGTO.

Simbólicamente, una ecuación diferencial de *n*-ésimo orden y grado uno se puede escribir de la siguiente manera:

$$\boxed{F(x, y, y', y'', ..., y^{(n)}) = 0} \tag{1}$$

Suponiendo que esta ecuación se puede resolver respecto a su derivada de más alto orden, entonces

$$\boxed{y^{(n)} = f(x, y, y', y'', ..., y^{(n-1)})} \tag{2}$$

Teorema de existencia y unicidad

Dr. J. Juan Rosales García
Departamento de Ingeniería Eléctrica, DICIS-UGTO.

Si en la ecuación (2), la función $f(x, y, y', y'', \ldots, y^{(n-1)})$ cumple las propiedades:

- Es continua respecto a sus argumentos
- Tiene derivadas parciales continuas con respecto a los argumentos $y, y', y'', \ldots, y^{(n-1)}$ en un dominio D, entonces, existe y es única la solución $y = \phi(x)$ de (2) que verifica las condiciones:

$$\boxed{y(x_0) = y_0, \quad y'(x_0) = y_0', \ldots, y^{(n-1)}(x_0) = y_0^{(n-1)}} \tag{3}$$

Dr. J. Juan Rosales García
Departamento de Ingeniería Eléctrica,
DICIS-UGTO.

donde los valores
$x = x_0, \quad y = y_0, \quad y' = y_0', \ldots, y^{(n-1)} = y_0^{(n-1)}$ están definidos en alguna región dentro del dominio D.
Las condiciones (3) se llaman condiciones iniciales. El problema que tiene por objetivo encontrar la solución $y = \phi(x)$ de la ecuación (2) que cumpla las condiciones (3), se llama problema de Cauchy.

Dr. J. Juan Rosales García
Departamento de Ingeniería Eléctrica, DICIS-UGTO.

Antes de empezar el análisis de estas ecuaciones daremos algunas definiciones importantes para el caso de las ecuaciones diferenciales de orden superior.
Se llama solución general de una ecuación diferencial de orden n (2), al conjunto de todas las soluciones determinadas por

$$\boxed{y = \phi(x,\, c_1,\, c_2, \ldots,\, c_n)} \tag{4}$$

que contiene n constantes arbitrarias $c_1,\, c_2, \ldots,\, c_n$, tales que cualquier solución de la ecuación diferencial se puede obtener al asignarles valores adecuados a las constantes.

Cualquier solución obtenida de la solución general (4), con las condiciones iniciales (3), se llama solución particular de la ecuación (2) y se representa como

$$\boxed{y = \phi(x, \tilde{c}_1, \tilde{c}_2, \ldots, \tilde{c}_n)} \tag{5}$$

donde $\tilde{c}_1, \tilde{c}_2, \ldots, \tilde{c}_n$ son números dados.

Una relación de la forma

$$\boxed{\Phi(x,\, y,\, c_1,\, c_2, \ldots,\, c_n) = 0} \tag{6}$$

que determina en forma implícita la solución general de la ecuación diferencial (2) se llama integral general de la misma. Asignando a las constantes c_1, c_2, ..., c_n valores numéricos concretos, obtenemos una integral particular de la ecuación diferencial.

Dr. J. Juan Rosales García
Departamento de Ingeniería Eléctrica, DICIS-UGTO.

La gráfica de una solución particular o de una integral particular se llama curva integral de la ecuación diferencial considerada.

Ejemplo 1:

La ecuación de la forma

$$\boxed{y^{(n)} = f(x)} \tag{7}$$

es la más simple de las ecuaciones de n-ésimo orden.

Para hallar su integral general es necesario integrar n veces respecto a x. Al integrar una vez, tenemos

$$y^{(n-1)} = \int f(x)\mathrm{d}x + c_1 \tag{8}$$

donde c_1 es una constante de integración. Integrando una vez más, tenemos

$$y^{(n-2)} = \int \left(\int f(x)\mathrm{d}x \right) \mathrm{d}x + c_1 x + c_2 \tag{9}$$

Después de n integraciones, resulta la integral general

$$y(x) = \int \left[\int \left(\dots \int f(x)\mathrm{d}x \right) \mathrm{d}x \right] \mathrm{d}x + \frac{c_1 x^{n-1}}{(n-1)!} + \\ + \frac{c_2 x^{n-2}}{(n-2)!} + \dots + c_{n-1}x + c_n \qquad (10)$$

donde $c_1,\ c_2, \dots,\ c_n$ son constantes arbitrarias. Observamos que la integración de la parte derecha de (10) se realiza n veces, además esta integral y sus derivadas de hasta $(n-1)$ orden en $x = x_0$ se anulan. Por eso las constantes arbitrarias se definen unívocamente por las condiciones iniciales

$$c_n = y_0, \quad c_{n-1} = y_0', \dots, c_2 = y_0^{(n-2)}, \quad c_1 = y_0^{(n-1)} \qquad (11)$$

Ejemplo 2:

Dr. J. Juan Rosales García Departamento de Ingeniería Eléctrica, DICIS-UGTO.

Resolver la ecuación diferencial

$$y''' = x \tag{12}$$

Solución: Integrando una vez, obtenemos

$$y''(x) = \int x\mathrm{d}x = \frac{x^2}{2} + c_1 \tag{13}$$

Integrando una vez más, resulta

$$y'(x) = \frac{1}{2}\int x^2\mathrm{d}x + cd_1\int \mathrm{d}x = \frac{x^3}{2\cdot 3} + c_1 x + c_2 \tag{14}$$

Por último, la solución general es

$$y(x) = \frac{x^4}{2 \cdot 3 \cdot 4} + \frac{c_1 x^2}{2} + c_2 x + c_3 \tag{15}$$

EDOs de orden superior reducible a primer orden

Dr. J. Juan Rosales García
Departamento de Ingeniería Eléctrica, DICIS-UGTO.

Existen algunas ecuaciones diferenciales de orden superior, las cuales pueden ser reducidas a ecuaciones de primer orden.

- Si la ecuación (1) no contiene explícitamente la función desconocida $y(x)$, entonces tiene la forma

$$\boxed{F(x, y^{(k)}, y^{(k+1)}, \ldots, y^{(n)}) = 0}$$

En tal caso, el orden de la ecuación se puede reducir escogiendo por función desconocida la derivada de menor orden que entra en la ecuación, es decir, haciendo el cambio $y^{(k)}(x) = p(x)$.

- Si (1) no contiene explícitamente la variable independiente x, entonces tenemos la ecuación

$$\boxed{F(y, y', y'', \ldots, y^{(n)}) = 0}$$

En este caso, el orden de la ecuación se puede reducir tomando como función dependiente a y y como la nueva función desconocida a $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = p(y)$.

Sin perder generalidad, analicemos los casos anteriores en ecuaciones diferenciales de segundo orden. Sea la ecuación

$$\boxed{y'' = f(x, y, y')} \tag{16}$$

Supongamos que esta ecuación no contiene explícitamente la función desconocida $y(x)$, entonces

$$\boxed{y'' = f(x,\, y')} \tag{17}$$

Para resolver este tipo de ecuaciones se introduce la siguiente definición:

$$p(x) = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} \tag{18}$$

Entonces

$$\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}x^2} \tag{19}$$

Sustituyendo en la ecuación (17), tenemos

$$\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x} = f(x,\, p) \tag{20}$$

donde, ahora p es la función desconocida de x. Esta ecuación es de primer orden. Integrando, tendremos

$$p(x) = p(x,\, c_1) \tag{21}$$

Recordando que
$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = p(x) \to dy = p(x)\mathrm{d}x \to \mathrm{d}y = p(x,\ c_1)\mathrm{d}x$ e integrando

$$y(x) = \int p(x, c_1)\mathrm{d}x + c_2 \qquad (22)$$

donde c_1 y c_2 son constantes de integración. La expresión (22) representa la solución general de la ecuación (17).

Ejemplo 3:

Resolver la ecuación

$$x^2 y'' = (y')^2 \tag{23}$$

Solución: Definiendo

$$p(x) = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} \quad \rightarrow \quad \frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}x^2} \tag{24}$$

Sustituyendo en (23) se obtiene la ecuación de primer orden

$$x^2 \frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x} = p^2 \tag{25}$$

la cual es una ecuación con variables separables

$$\int \frac{\mathrm{d}p}{p^2} = \int \frac{\mathrm{d}x}{x^2} \tag{26}$$

Dr. J. Juan Rosales García
Departamento de Ingeniería Eléctrica, DICIS-UGTO.

Integrando

$$-\frac{1}{p} = -\frac{1}{x} - c_1 \quad \rightarrow \quad \frac{1}{p} = \frac{1}{x} + c_1 \tag{27}$$

Usando la primera ecuación de (24), tenemos

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y} = \frac{1}{x} + c_1 \tag{28}$$

Separando las variables e integrando

$$\int \frac{x\mathrm{d}x}{c_1 x + 1} = \int \mathrm{d}y \tag{29}$$

Resolviendo la integral de la parte izquierda

$$\frac{1}{c_1}\int \frac{c_1x+1-1}{c_1x+1}\mathrm{d}x = \frac{1}{c_1}\int\left(1-\frac{1}{c_1x+1}\right)\mathrm{d}x = \frac{1}{c_1}x-\frac{1}{c_1}\int\frac{\mathrm{d}x}{c_1x+1} = \frac{1}{c_1}x-\frac{1}{c_1^2}\ln|c_1x+1| \tag{30}$$

Entonces, el resultado es

$$\frac{1}{c_1}x-\frac{1}{c_1^2}\ln|c_1x+1| = y+c_2 \tag{31}$$

Este mismo resultado lo podemos escribir de la siguiente manera

$$c_1x-c_1^2y=\ln|c_1x+1|+C_2 \tag{32}$$

donde $C_2=c_1^2c_2$.

Supongamos ahora que la variable independiente x no aparece explícitamente en la ecuación (16). Entonces, la ecuación tendrá la forma

$$\boxed{y'' = f(y,\, y')} \tag{33}$$

Para resolver esta ecuación hagamos el cambio de función, es decir

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = p(y) \tag{34}$$

Nada más que ahora debemos considerar a p como función de y. Entonces, haciendo uso de la regla de la cadena

$$\frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}x^2} = \frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}y}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = p(y)\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}y} \tag{35}$$

Sustituyendo en la ecuación (33), obtenemos

$$p(y)\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}y} = f(y,\, p) \tag{36}$$

Integrando, hallamos

$$p(y) = p(y,\, c_1) \tag{37}$$

Recordando que $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = p(y)$, obtenemos una ecuación diferencial de primer orden para la función y de x, es decir

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = p(y,\, c_1) \tag{38}$$

Separando variables, tenemos

$$\frac{\mathrm{d}y}{p(y,\, c_1)} = \mathrm{d}x \tag{39}$$

Integrando esta ecuación obtenemos la integral general de la ecuación (33), esta tiene la forma

$$x = \int \frac{\mathrm{d}y}{p(y,\, c_1)} + c_2 \tag{40}$$

Ejemplo 4:

Dr. J. Juan Rosales García Departamento de Ingeniería Eléctrica, DICIS-UGTO.

Hallar la solución general de la ecuación

$$y'' = 2yy'. \tag{41}$$

Solución:

Esta ecuación es del tipo (33). Así que, definiendo

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = p(y) \quad \rightarrow \quad \frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}x^2} = p(y)\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}y} \tag{42}$$

Sustituyendo en la ecuación (41), obtenemos

$$p\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}y} = 2yp \quad \rightarrow \quad \frac{dp}{dy} = 2y \tag{43}$$

Esta última expresión es una ecuación de primer orden con variables separables. Integrando se obtiene

$$\int \mathrm{d}p = 2\int y\mathrm{d}y \quad \rightarrow \quad p = y^2 + c_1^2 \tag{44}$$

donde hemos escogido la constante de integración como c_1^2, esto es por comodidad. Luego, sustituyendo $p(y) = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$, en la segunda ecuación de (44), tenemos

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = y^2 + c_1^2 \tag{45}$$

Esta ecuación es de primer orden y de variables separables. Integrando

$$\int \frac{\mathrm{d}y}{y^2 + c_1^2} = \int \mathrm{d}x \tag{46}$$

Dr. J. Juan Rosales García Departamento de Ingeniería Eléctrica, DICIS-UGTO.

Recordando la fórmula de integración $\int \frac{\mathrm{d}x}{x^2+a^2} = \frac{1}{a}\arctan(\frac{x}{a})$, donde a es una constante, queda claro la elección de c_1^2 como constante de integración. Usando esta fórmula tenemos que el resultado de la integración en (46) es

$$\frac{1}{c_1}\tan^{-1}\left(\frac{y}{c_1}\right) = x + c_2 \tag{47}$$

Este mismo resultado lo podemos escribir como

$$y(x) = c_1 \tan(c_1 x + \tilde{c}) \tag{48}$$

donde $\tilde{c} = c_1 c_2$, esto en realidad no afecta el resultado, ya que el producto de dos constantes es otra constante.

Por último, si x y y' no aparecen explícitamente en (16), entonces tenemos la ecuación

$$\boxed{y'' = f(y)} \tag{49}$$

Este tipo de ecuaciones son un caso particular de (33). Haciendo

$$\begin{aligned} p(y) &= \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} \quad \rightarrow \quad y'' = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}[p(y)] \\ &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y}p(y)\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = p(y)\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}y} \end{aligned} \tag{50}$$

Sustituyendo el resultado anterior en (49), obtenemos una ecuación de primer orden respecto a p, esto es

$$p(y)\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}y} = f(y). \tag{51}$$

Esta ecuación es de variables separables. Separando las variables

$$p\mathrm{d}p = f(y)\mathrm{d}y \quad \to \int p\mathrm{d}p = \int f(y)\mathrm{d}y \tag{52}$$

Integrando

$$\frac{p^2}{2} = \int f(y)\mathrm{d}y + \frac{c_1}{2} \tag{53}$$

donde hemos tomado a $c_1/2$ como constante de integración. Despejando p, tenemos

$$p = \pm\sqrt{2\int f(y)\mathrm{d}y + c_1} \tag{54}$$

Recordando que $p(y) = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$, resulta

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \pm\sqrt{2\int f(y)\mathrm{d}y + c_1} \tag{55}$$

Esta última ecuación es de variables separables.

Separando las variables e integrando, resulta

$$\int \frac{\mathrm{d}y}{\sqrt{2\int f(y)\mathrm{d}y + c_1}} = \pm(x + c_2) \tag{56}$$

La ecuación (56) representa la solución general en forma implícita de la ecuación (49).

Ejercicios Propuestos

Dr. J. Juan Rosales García
Departamento de Ingeniería Eléctrica, DICIS-UGTO.

1. $y'^2 + yy'' = yy'$
2. $xy''' - y'' + xy'' = 0$
3. $yy'' - y'^2 = y^2 \ln y$
4. $yy'' = y'^2;\ y(0) = 1,\ y'(0) = 2$
5. $y''' = \sqrt{1 + y''^2}$
6. $(2y + 3)y'' - 2y'^2 = 0$
7. $y'' + y'^2 = 2e^{-y}$
8. $(1 - x^2)y'' + xy' = 2$