Sesión 12. EDOS Lineales de Orden Superior

Dr. J. Juan Rosales García
Departamento de Ingeniería Eléctrica, DICIS-UGTO.

Competencias:

- Conoce las ED lineales de orden superior.
- Resuelve ED lineales homogéneas con coeficientes constantes.

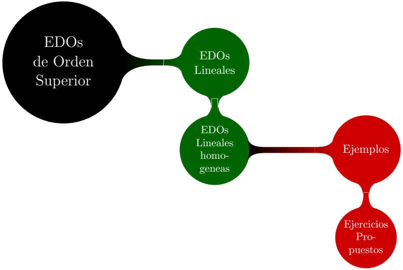
Contenido de la Sesión 12:

Dr. J. Juan Rosales García
Departamento de Ingeniería Eléctrica, DICIS-UGTO.

- ED lineales homogéneas con coeficientes constantes.
- Raíces reales y distintas.
- Raíces reales e iguales.
- Raíces complejas conjugadas.

Mapa Mental

Dr. J. Juan Rosales García
Departamento de Ingeniería Eléctrica, DICIS-UGTO.



EDOs Lineales Homogéneas de Orden Superior

Dr. J. Juan Rosales García
Departamento de Ingeniería Eléctrica, DICIS-UGTO.

Ecuaciones lineales homogéneas con coeficientes constantes

Dr. J. Juan Rosales García
Departamento de Ingeniería Eléctrica, DICIS-UGTO.

Una ED lineal homogénea con coeficientes constantes de orden n tiene la forma

$$\boxed{a_n y^{(n)}(x) + a_{n-1} y^{(n-1)}(x) + \cdots + a_1 y'(x) + a_0 y(x) = 0} \tag{1}$$

Obviamente, la ecuación (1) siempre tiene la solución $y = 0$, pero esta solución es la trivial y no es de importancia (ya que no nos da ninguna información sobre el comportamiento del sistema). Entonces, nos interesan las soluciones no triviales de la ecuación (1).

Supongamos que la solución no trivial de la ED (**??**) tiene la forma

$$\boxed{y = e^{mx}} \tag{2}$$

donde m es un parámetro arbitrario que será determinado según la forma de la ecuación diferencial. Sustituyendo (2) en la ecuación diferencial (1), tenemos

$$e^{mx}(a_n m^n + a_{n-1} m^{n-1} + \cdots + a_1 m + a_0) = 0 \tag{3}$$

Debido a que $e^{mx} \neq 0, \forall x \in \mathrm{R}$, entonces lo que debe ser cero es la expresión que está dentro de los paréntesis, esto es

$$\boxed{a_n m^n + a_{n-1} m^{n-1} + \cdots + a_1 m + a_0 = 0} \tag{4}$$

A esta ecuación se le conoce como ecuación característica de la ecuación diferencial dada. Parece ser que resolver ecuaciones diferenciales lineales será más práctico, ya que el problema ahora se reduce a resolver una ecuación algebraica de orden n, esto es cierto para el caso en que $n = 2, 3, 4$. Sin embargo, para el caso $n \geq 5$ el problema puede ser complicado, ya que no existen métodos generales para obtener sus soluciones.

De la expresión general (1) resulta que una *ecuación diferencia lineal de primer orden con coeficientes constantes* tiene la forma

$$\boxed{ay' + by = 0} \tag{5}$$

Luego, suponemos la solución (2) y sustituyendo en la ecuación (5), obtenemos la ecuación característica

$$am + b = 0 \qquad \rightarrow \qquad m = -\frac{b}{a} \tag{6}$$

Sustituyendo el resultado obtenido para m en la solución propuesta (2), entonces, la solución general es

$$y = ce^{-\frac{b}{a}x} \tag{7}$$

donde c es una constante, la cual juega el papel de constante de integración y depende de las condiciones iniciales del problema.

La ecuación (5) se puede resolver también separando las variables, esto es

$$\frac{\mathrm{d}y}{y} + \frac{b}{a}\mathrm{d}x = 0 \quad \rightarrow \quad \ln\left(\frac{y}{c}\right) = -\frac{b}{a}x \rightarrow y = ce^{-\frac{b}{a}x} \tag{8}$$

La última expresión de (8) es la solución general de la ecuación (5), la cual coincide con la solución ya obtenida en (7). En general, toda ecuación diferencial lineal homogénea de primer orden se puede resolver separando las variables o suponiendo la solución (2).

Analicemos las ecuaciones lineales de segundo orden con coeficientes constantes, es decir, ecuaciones de la forma

$$\boxed{ay'' + by' + cy = 0} \tag{9}$$

Luego, supongamos que la solución es de la forma

$$\boxed{y = e^{mx}} \tag{10}$$

Sustituyendo en (9) tenemos que la expresión que debe ser cero es

$$\boxed{am^2 + bm + c = 0} \tag{11}$$

ésta es una ecuación cuadrática. Existen tres casos posibles de raíces:

Primer Caso: raíces reales y distintas

Dr. J. Juan Rosales García Departamento de Ingeniería Eléctrica, DICIS-UGTO.

Supongamos que las raíces m_1 y m_2 son reales y diferentes. En tal caso, tenemos dos diferentes soluciones $y_1 = e^{m_1 x}$ y $y_2 = e^{m_2 x}$. Entonces, la solución general de la ecuación (9) es la combinación lineal de y_1 y y_2

$$\boxed{y = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x) = c_1 e^{m_1 x} + c_2 e^{m_2 x}} \tag{12}$$

Ejemplo 1:

Dr. J. Juan Rosales García
Departamento de Ingeniería Eléctrica, DICIS-UGTO.

Resolver la ecuación diferencial homogénea de segundo orden

$$y'' + 4y' + 3y = 0 \tag{13}$$

Solución:

La solución es de la forma $y = e^{mx}$, sustituyendo en la ecuación, tenemos

$$m^2 + 4m + 3 = 0 \qquad \to \qquad (m+1)(m+3) = 0 \tag{14}$$

Las soluciones son

$$m_1 = -1, \qquad m_2 = -3. \tag{15}$$

Entonces, la solución general de la ecuación (13) tiene la forma

$$y(x) = c_1 e^{-x} + c_2 e^{-3x} \tag{16}$$

donde c_1 y c_2 son constantes arbitrarias que dependen de las condiciones iniciales del problema.

Las funciones $y_1(x)$ y $y_2(x)$ son linealmente independientes, ya que el wronskiano formado por estas funciones nos da

$$W = \det \begin{pmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} e^{-x} & e^{-3x} \\ -e^{-x} & -3e^{-3x} \end{pmatrix} = -2e^{-4x} \neq 0 \quad (17)$$

El wronskiano es diferente de cero, entonces, $y_1(x)$ y $y_2(x)$ son linealmente independientes.

Segundo Caso: raíces reales e iguales

Dr. J. Juan Rosales García
Departamento de Ingeniería Eléctrica, DICIS-UGTO.

Ahora, supongamos que las raíces son reales e iguales. Es decir, $m_1 = m_2 = m$. En tal caso, tenemos la solución

$$\boxed{y_1 = ce^{mx}} \tag{18}$$

Para encontrar una segunda solución linealmente independiente haremos uso de la fórmula

$$y_2 = y_1(x) \int \frac{e^{-\int P(x)\mathrm{d}x}}{y_1^2(x)} \mathrm{d}x \tag{19}$$

donde $y_1(x)$ es conocida.

De la fórmula cuadrática (11) tenemos que $m_1 = -\frac{b}{2a}$, ya que para que se cumpla $m_1 = m_2$ es necesario que $b^2 - 4ac = 0$. Sustituyendo esto en la fórmula anterior, encontramos

$$y_2 = e^{m_1 x} \int \frac{e^{2m_1 x}}{e^{2m_1 x}} \mathrm{d}x = e^{m_1 x} \int \mathrm{d}x = x e^{m_1 x} \qquad (20)$$

Así, la solución general de (9) para el caso en que $m_1 = m_2$, es

$$\boxed{y(x) = c_1 e^{mx} + c_2 x e^{mx}} \tag{21}$$

Como conclusión tenemos que, en realidad, no es necesario calcular una segunda solución cada vez que resulte una raíz doble, ya que el resultado sugiere que, en general, podemos hacer la siguiente afirmación:

Dr. J. Juan Rosales García Departamento de Ingeniería Eléctrica, DICIS-UGTO.

Si m es una raíz doble de la ecuación característica (11) *entonces, junto con la solución*

$$y_1 = e^{mx}$$

se tiene también la segunda solución

$$y_2 = xe^{mx}$$

y la combinación lineal de estas soluciones será la solución general dada por (21) *multiplicadas por* sus correspondientes constantes arbitrarias.

En general, es decir, el caso en que la ecuación característica (4) tenga una raíz real $m = a$ de multiplicidad r, que corresponde a un factor $(m - a)^r$, entonces las r funciones

$$y = e^{ax}, \quad y = xe^{ax}, \quad y = x^2 e^{ax}, \dots, y = x^{m-1} e^{ax} \tag{22}$$

son soluciones de la ecuación diferencial (1), y por lo tanto la combinación lineal de estas será la solución general de (1), la cual tiene la forma

$$\boxed{y(x) = c_0 e^{ax} + c_1 x e^{ax} + c_2 x^2 e^{ax} + \cdots + c_{m-1} x^{m-1} e^{ax}} \tag{23}$$

Ejemplo 2:

Resolver la ecuación diferencial

$$y'' + 6y' + 9y = 0 \tag{24}$$

Solución: La solución tiene la forma $y = e^{mx}$ y sustituyendo en la ecuación (24) tenemos la ecuación característica

$$m^2 + 6m + 9 = 0 \tag{25}$$

Haciendo uso de la fórmula para resolver ecuaciones cuadráticas, tenemos

$$m_{1,2} = -\frac{6}{2} \pm \frac{\sqrt{36 - 36}}{2} = -3 \tag{26}$$

Esto significa que existe solamente una solución $y_1 = e^{-3x}$.

Luego, de (22) tenemos que la segunda solución estará dada por la expresión

$$y_2 = xe^{-3x} \tag{27}$$

Entonces la solución general tiene la forma

$$y(x) = c_1 e^{-3x} + c_2 x e^{-3x} = (c_1 + c_2 x)e^{-3x} \tag{28}$$

Ejemplo 3:

Resolver la ecuación diferencial

$$y^{(n)} = 0 \tag{29}$$

Solución: La ecuación característica correspondiente es

$$m^n = 0 \tag{30}$$

y tiene solamente la raíz $m = 0$, de multiplicidad n. Entonces, las funciones correspondientes serán

$$y = e^{0x} = 1, \quad y = xe^{0x} = x, \quad \ldots \quad y = x^{n-1}e^{0x} = x^{n-1},$$

que son claramente soluciones de la ecuación dada. Entonces, la solución general es

$$y(x) = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + \cdots + c_{n-1}x^{n-1} \tag{31}$$

Tercer Caso: raíces complejas conjugadas

Dr. J. Juan Rosales García
Departamento de Ingeniería Eléctrica, DICIS-UGTO.

Por último, supongamos que las raíces en (11) son complejas conjugadas, esto es, suponemos que tienen la forma

$$m_1 = \alpha + i\beta, \qquad m_2 = \alpha - i\beta \tag{32}$$

donde α y β son números reales, e $i = \sqrt{-1}$ es la identidad imaginaria. En tal caso, la solución general será

$$y = c_1 e^{(\alpha + i\beta)x} + c_2 e^{(\alpha - i\beta)x} \tag{33}$$

Este resultado lo podemos transformar usando la *fórmula de Euler* $e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$, tenemos

$$e^{i\beta x} = \cos\beta x + i\sin\beta x, \qquad e^{-i\beta x} = \cos\beta x - i\sin\beta x \tag{34}$$

donde, hemos usado las propiedades de $\cos(-\beta x) = \cos\beta x$ y $\sin(-\beta x) = -\sin\beta x$.
Sustituyendo en la ecuación (33), resulta

$$\begin{aligned} y &= c_1 e^{\alpha x} e^{i\beta x} + c_2 e^{\alpha x} e^{-i\beta x} = e^{\alpha x}\left(c_1 e^{i\beta x} - c_2 e^{-\beta x}\right) = \\ &= e^{\alpha x}\left[c_1(\cos\beta x + i\sin\beta x) + c_2(\cos\beta x - i\sin\beta x)\right] \\ &= e^{\alpha x}\left[(c_1 + c_2)\cos\beta x + i(c_1 - c_2)\sin\beta x\right] \end{aligned} \tag{35}$$

Luego, las funciones $e^{\alpha x}\cos\beta x$, y $e^{\alpha x}\sin\beta x$ son soluciones linealmente independientes de la ecuación diferencial (9) en $-\infty < x < \infty$. Podemos definir a $C_1 = c_1 + c_2$, y a $C_2 = (ic_1 - ic_2)$. Como C_1 y C_2 son constantes arbitrarias, podemos escribir la solución de la siguiente manera:

$$\boxed{y = e^{\alpha x}\left(C_1\cos\beta x + C_2\sin\beta x\right)} \tag{36}$$

Esta representación es más útil, ya que la solución está dada por funciones reales.

Ejemplo 4:

Dr. J. Juan Rosales García Departamento de Ingeniería Eléctrica, DICIS-UGTO.

Resolver la ecuación

$$y'' - 4y' + 5y = 0 \tag{37}$$

Solución: Suponiendo que la solución de la ecuación tiene la forma $y = e^{mx}$, sustituyendo en la ecuación (37) tenemos que la ecuación característica es

$$m^2 - 4m + 5 = 0 \tag{38}$$

Haciendo uso de la fórmula para resolver ecuaciones cuadráticas, tenemos que las raíces son

$$m_{1,2} = \frac{4}{2} \pm \frac{\sqrt{16-20}}{2} = 2 \pm i \tag{39}$$

De aquí, identificamos a $\alpha = 2$ y a $\beta = 1$. Entonces, la solución general de la ecuación (37) es

$$y(x) = e^{2x}\left(c_1 \cos x + c_2 \sin x\right) \tag{40}$$

Ejemplo 5:

Hallar la solución general de la ecuación diferencial

$$y^{IV} + 2y'' + y = 0 \tag{41}$$

Solución: Su ecuación característica es

$$m^4 + 2m^2 + 1 = 0, \quad (m^2 + 1)^2 = 0 \tag{42}$$

Las raíces

$$m = \pm i \tag{43}$$

tienen multiplicidad 2. Entonces, las cuatro soluciones complejas las podemos escribir como

$$y_1 = e^{ix}, \quad y_2 = e^{-ix}, \quad y_3 = xe^{ix}, \quad y_4 = xe^{-ix} \tag{44}$$

Dr. J. Juan Rosales García
Departamento de Ingeniería Eléctrica, DICIS-UGTO.

De las dos primeras soluciones podemos escribir

$$c_1 \cos x + c_2 \sin x \tag{45}$$

y de las dos últimas, tenemos

$$c_3 x \cos x + c_4 x \sin x \tag{46}$$

De tal manera, que la solución general estará dada por la expresión

$$y(x) = c_1 \cos x + c_2 \sin x + c_3 x \cos x + c_4 x \sin x \tag{47}$$

la cual podemos escribir de la siguiente manera:

$$y(x) = (c_1 + c_3 x) \cos x + (c_2 + c_4 x) \sin x \tag{48}$$

Ejercicios Propuestos

Dr. J. Juan Rosales García
Departamento de Ingeniería Eléctrica, DICIS-UGTO.

1. $y'' + 3y' + 5y = 0$
2. $2y'' - y' + 8y = 0$
3. $y'' - 2y' = 0$
4. $y''' = x$
5. $y'' + y' - 2y = 0$
6. $4y'' - 8y' + 5y = 0$
7. $2y''' + y = 0$
8. $y'' - 2y' = 0$
9. $y'' - 8y' + 16y = 0$
10. $y^{X} = 0$