Sesión 13. EDOs de Orden Superior

Dr. J. Juan Rosales García
Departamento de Ingeniería Eléctrica, DICIS-UGTO.

Competencias:

Dr. J. Juan Rosales García
Departamento de Ingeniería Eléctrica,
DICIS-UGTO.

- Resuelve las EDOs lineales con coeficientes constantes no homogéneas.
- Reconoce y resuelve EDOs con coeficientes variables: Cauchy-Euler
- Aplica los métodos: coeficientes indeterminados y variación de parámetros para resolver las ED lineales.

Contenido de la Sesión 13:

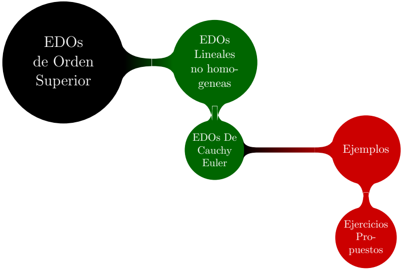
Dr. J. Juan Rosales García
Departamento de Ingeniería Eléctrica, DICIS-UGTO.

- ED lineales no homogéneas con coeficientes constantes.
- EDOs de Cauchy-Euler
- Método de los coeficientes indeterminados.
- Método de variación de los parámetros.

Mapa Mental

Sesión 13. EDOs de Orden Superior

Dr. J. Juan Rosales García
Departamento de Ingeniería Eléctrica, DICIS-UGTO.



Ecuaciones lineales no homogéneas de segundo orden

Toda ecuación diferencial lineal no homogénea de segundo orden con coeficientes constantes tiene la forma

$$\boxed{ay'' + by' + cy = f(x)} \tag{1}$$

donde a, b y c son ciertas constantes dadas.

El método para resolver este tipo de ecuaciones es el siguiente:
1) Hallar la solución correspondiente a la ecuación homogénea

$$\boxed{ay'' + by' + cy = 0} \tag{2}$$

obtenida de la ecuación original (1), (cuando $f(x) = 0$), la cual representaremos como y_h y tendrá la forma $y_h(x) = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x)$.

2) Encontrar una solución *particular* representada por y_p correspondiente a la parte no homogénea de la ecuación original (1).
3) La solución general de la ecuación original (1) será la suma de estas dos soluciones, es decir

$$\boxed{y(x) = y_h(x) + y_p(x) = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x) + y_p(x)} \tag{3}$$

Método de coeficientes indeterminados

Dr. J. Juan Rosales García Departamento de Ingeniería Eléctrica, DICIS-UGTO.

En esta subsección usaremos el método de coeficientes indeterminados para resolver las ecuaciones lineales no homogéneas. Debemos tener en cuenta que este método no está limitado a ecuaciones de segundo orden, pero sí se limita a ecuaciones lineales no homogéneas con las siguientes características:

- Que tengan coeficientes constantes.
- Que la función $f(x)$ sea una constante k, una función exponencial $e^{\alpha x}$, una función polinomial, funciones $\sin\beta x, \cos\beta x$ o sumas y productos de éstas.
- Este método no es aplicable a funciones que tengan la forma $f(x) = \ln x$, $f(x) = \frac{1}{x}$, $f(x) = \tan x$, etc,...

A continuación damos una tabla en la cual, para una función $f(x)$ dada, se tiene una función particular $y_p(x)$ (la razón es porque y_p se construye, básicamente, a partir de las funciones que forman a $f(x)$ y de todas sus derivadas. Si en $f(x)$ aparece un polinomio de grado n, entonces la solución particular y_p se plantea como un polinomio del mismo grado que $f(x)$. Si en $f(x)$ aparece una función seno o coseno, entonces también aparece en y_p). Esto ayudará al estudiante a tomar una solución particular adecuada. La solución particular propuesta deberá ser sustituída en la ecuación diferencial no homogénea dada, y así encontrar los coeficientes $A, B, C, D, E, F \ldots$

Dr. J. Juan Rosales García Departamento de Ingeniería Eléctrica, DICIS-UGTO.

$f(x)$	y_p
5	A
x	$Ax + B$
$3x^2 - 2$	$Ax^2 + Bx + C$
$x^3 - x - 1$	$Ax^3 + Bx^2 + Cx + D$
$\sin 2x$	$A\cos 2x + B\sin 2x$
$\cos 4x$	$A\cos 4x + B\sin 4x$
e^{4x}	Ae^{4x}
$(8x - 2)e^{4x}$	$(Ax + B)e^{4x}$
x^2e^{2x}	$(Ax^2 + Bx + C)e^{2x}$
$e^{2x}\sin 2x$	$e^{2x}(A\cos 2x + B\sin 2x)$
$2x^2\sin 3x$	$(Ax^2 + Bx + C)\cos 3x + (Dx^2 + Ex + F)\sin$
$xe^{2x}\cos 3x$	$(Ax + B)e^{2x}\cos 3x + +(Cx + D)e^{2x}\sin 3$

Ejemplo 1:

Hallar la solución general de la ecuación diferencial

$$y''' - y'' + y' - y = x^2 + x \tag{4}$$

Solución: Antes que nada, debemos resolver la ecuación homogénea correspondiente a la ecuación dada, esto es

$$y''' - y'' + y' - y = 0 \tag{5}$$

Sabemos que la solución es de la forma

$$y(x) = e^{mx} \tag{6}$$

donde m es un cierto parámetro a determinar.

Tomando la primera, segunda y tercera derivada de la función (6) y sustituyendo en la ecuación (5) tenemos la ecuación característica

$$m^3 - m^2 + m - 1 = 0 \tag{7}$$

Las raíces de la ecuación característica son

$$m = 1, \qquad m_2 = -i, \qquad m_3 = i \tag{8}$$

Por lo tanto, la solución general de la ecuación homogénea (5), es

$$y_h = c_1 e^x + c_2 \cos x + c_3 \sin x. \tag{9}$$

Nos queda por hallar una solución particular de la ecuación (4). Debido a la forma que tiene la función $f(x) = x^2 + x$, supongamos la solución particular (según la tabla anterior)

$$y_p(x) = Ax^2 + Bx + C \tag{10}$$

donde A, B y C son ciertos números que debemos encontrar. Una vez sustituída la solución propuesta (10) en (4), tenemos

$$-Ax^2 + (2A - B)x + (B - 2A - C) = x^2 + x \tag{11}$$

De aquí, obtenemos el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{aligned} A &= -1 \\ 2A - B &= 1 \\ B - 2A - C &= 0 \end{aligned} \tag{12}$$

Resolviendo este sistema, encontramos los valores para las constantes A, B y C, estos son

$$A = -1, \qquad B = -3, \qquad C = -1 \tag{13}$$

Entonces, sustituyendo los valores de las constantes A, B y C, en (10), obtenemos la solución particular

$$y_p(x) = -x^2 - 3x - 1 \tag{14}$$

Dr. J. Juan Rosales García
Departamento de Ingeniería Eléctrica, DICIS-UGTO.

La solución general de la ecuación (4) tiene la forma final

$$y(x) = y_h(x) + y_p(x) = c_1 e^x + c_2 \cos x + c_3 \sin x - x^2 - 3x - 1 \tag{15}$$

Ejemplo 2:

Resolver la ecuación

$$y'' + y' - 2y = 3xe^{x} \tag{16}$$

Solución: La ecuación homogénea correspondiente es

$$y'' + y' - 2y = 0. \tag{17}$$

Luego, suponemos la solución $y = e^{mx}$ y sustituyendo en (17), obtenemos su correspondiente ecuación característica

$$m^2 + m - 2 = 0 \qquad \rightarrow \qquad (m+2)(m-1) = 0 \tag{18}$$

la cual tiene como raíces

$$m_1 = -2, \qquad m_2 = 1 \tag{19}$$

Entonces, la solución de la ecuación (17) tiene la forma

$$y_h = c_1 e^{-2x} + c_2 e^{x} \tag{20}$$

Ahora debemos buscar una solución particular de la ecuación original (16). Para esto, según la tabla de soluciones propuestas, una solución particular sería

$$y_p = (Ax + B)e^{x} = Axe^{x} + Be^{x} \tag{21}$$

Dr. J. Juan Rosales García
Departamento de Ingeniería Eléctrica,
DICIS-UGTO.

Si proponemos esta solución particular, al sustituirla en (16) nos encontraremos con una inconsistencia. Esto se debe a que el segundo término de la solución particular (21) Be^x ya está incluido en la solución homogénea (20), c_2e^x, (estos dos términos son iguales, ya que c_2 y B son constantes arbitrarias). Para resolver esta inconsistencia se multiplica la solución particular propuesta en (21) por x. Entonces, la solución particular que debemos proponer será

$$y_p = x(Ax + B)e^x = Ax^2e^x + Bxe^x \tag{22}$$

Derivando dos veces esta solución, resulta

$$\begin{aligned} y_p' &= (2A+B)xe^x + Be^x + Ax^2e^x \\ y_p'' &= (2A+B)e^x + (4A+B)xe^x + Ax^2e^x \end{aligned} \qquad (23)$$

Sustituyendo en (16), obtenemos el sistema de ecuaciones

$$\begin{aligned} 2A+3B &= 0 \\ 6A &= 3 \end{aligned} \qquad (24)$$

Los valores para A y B, son

$$A = \frac{1}{2}, \qquad B = -\frac{1}{3} \qquad (25)$$

Dr. J. Juan Rosales García Departamento de Ingeniería Eléctrica, DICIS-UGTO.

Luego, poniendo estos valores en (22), tenemos que la solución particular es

$$y_p = \frac{1}{2}x^2e^x - \frac{1}{3}xe^x \tag{26}$$

Finalmente, la solución general de la ecuación (16) tiene la siguiente forma:

$$y(x) = c_1e^{-2x} + c_2e^x + \frac{1}{2}x^2e^x - \frac{1}{3}xe^x \tag{27}$$

Ejemplo 3:

Hallar la solución general de la ecuación

$$y'' - 3y' + 2y = x\cos x \tag{28}$$

Solución: La ecuación homogénea es

$$y'' - 3y' + 2y = 0. \tag{29}$$

Las raíces de esta ecuación son

$$m^2 - 3m + 2 = 0 \quad \rightarrow \quad (m-2)(m-1) = 0 \quad \rightarrow \quad m_1 = 2, \tag{30}$$

Entonces, la solución de la ecuación homogénea es

$$y_h = c_1 e^{2x} + c_2 e^{x} \tag{31}$$

Luego, de la tabla antes vista, podemos proponer la solución particular

$$y_p = (Ax + B)\cos x + (Cx + D)\sin x. \tag{32}$$

Sustituyendo en la ecuación (28), obtenemos el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{aligned} 3A + C &= 0 \\ 3B - 3C - 2A + D &= 0 \\ -3A + B + 2C - 3D &= 0 \\ A - 3C &= 1 \end{aligned} \tag{33}$$

Resolviendo el sistema, resulta

$$A = \frac{1}{10}, \quad B = -\frac{3}{25}, \quad C = -\frac{3}{10}, \quad D = -\frac{17}{50} \tag{34}$$

Poniendo los valores de A, B, C y D en (32), tenemos que la solución particular tiene la forma

$$y_p = \left(\frac{1}{10}x - \frac{3}{25}\right)\cos x + \left(-\frac{3}{10}x - \frac{17}{50}\right)\sin x \tag{35}$$

Dr. J. Juan Rosales García
Departamento de Ingeniería Eléctrica,
DICIS-UGTO.

Finalmente, tenemos que la solución general de (28), es

$$\begin{aligned} y(x) &= c_1 e^{2x} + c_2 e^{x} + \left(\frac{1}{10}x - \frac{3}{25}\right)\cos x + \\ &+ \left(-\frac{3}{10}x - \frac{17}{50}\right)\sin x \end{aligned} \tag{36}$$

Ejemplo 4:

Dr. J. Juan Rosales García
Departamento de Ingeniería Eléctrica, DICIS-UGTO.

Encontrar la solución general de la ecuación diferencial

$$y'' - 8y' + 16y = (1 - x)e^{4x} \tag{37}$$

Solución: La ecuación homogénea correspondiente es

$$y'' - 8y' + 16y = 0 \tag{38}$$

Suponiendo la solución $y = e^{mx}$, tenemos la ecuación característica y sus correspondientes raíces

$$m^2 - 8m + 16 = 0 \quad \rightarrow \quad (m-4)(m-4) = 0 \quad \rightarrow \quad m = 4 \tag{39}$$

Entonces, tenemos sólo una solución $y_1 = e^{4x}$. Sabemos que en tal caso, la segunda solución linealmente independiente tendrá la forma $y_2 = xe^{4x}$. Entonces, la solución general de la ecuación homogénea (38), es

$$y_h = c_1 e^{4x} + c_2 x e^{4x} \tag{40}$$

Dr. J. Juan Rosales García Departamento de Ingeniería Eléctrica, DICIS-UGTO.

El siguiente paso es proponer una solución particular y sustituirla en (37). Según la forma de la parte derecha de (37), podemos proponer la solución $y_p = (Ax + B)e^{4x}$. Sin embargo, estas dos soluciones están ya incluidas en la solución homogénea. Entonces, multiplicamos por x y obtenemos

$$y_p = x(Ax + B)e^{4x} \tag{41}$$

Si sustituimos esta solución en la ecuación (37) nos daremos cuenta de que no es suficiente, ya que obtendremos $A = 1/2$, y $xe^{4x} = 0$, lo cual es inconsistente, ya que suponemos que $x \neq 0$.

Dr. J. Juan Rosales García
Departamento de Ingeniería Eléctrica, DICIS-UGTO.

Entonces, multipliquemos la expresión (41) nuevamente por x, y obtenemos

$$y_p = x^2(Ax + B)e^{4x} \tag{42}$$

Derivando una y otra vez esta expresión, resulta

$$\begin{aligned} y_p' &= Ax^2e^{4x} + 2x(Ax + B)e^{4x} + 4x^2(Ax + B)e^{4x} \\ y'' &= 2(Ax + B)e^{4x} + 4Axe^{4x} + 16x(Ax + B)e^{4x} + \\ &+ 16x^2(Ax + B)e^{4x} \end{aligned} \tag{43}$$

Poniendo estos resultados en (37), obtenemos

$$(2B + 6Ax)e^{4x} = (1 - x)e^{4x} \tag{44}$$

Para que esta relación se cumpla, debemos tener

$$\begin{aligned} 2B &= 1 \\ 6A &= -1 \end{aligned} \tag{45}$$

De donde es fácil obtener los valores de A y B, estos son $A = -1/6$, y $B = 1/2$. Entonces, la solución particular tiene la forma

$$y_p = x^2 \left(\frac{1}{2} - \frac{x}{6} \right) e^{4x} \tag{46}$$

Concluimos que la solución general de (37), es

$$y(x) = c_1 e^{4x} + c_2 x e^{4x} + x^2 \left(\frac{1}{2} - \frac{x}{6} \right) e^{4x} \tag{47}$$

Observación: En general, si las funciones que componen a la solución particular propuesta y_p están incluidas en la solución homogénea (como es el caso del ejemplo anterior), entonces hay que multiplicar a y_p por la mínima potencia x^n que elimina la repetición, para $n = 1, 2, 3, \ldots$

Ejemplo 5:

Resolver la ecuación

$$y'' - 6y' + 13y = x^2 e^{3x} - 3\cos 2x \tag{48}$$

Solución: Tenemos que la parte homogénea es

$$y'' - 6y' + 13y = 0 \tag{49}$$

Luego, la ecuación característica de (49) está dada por

$$m^2 - 6m + 13 = 0 \quad \to \quad m_{1,2} = \frac{6}{2} \pm \frac{\sqrt{36 - 4(13)}}{2} = 3 \pm 2i \tag{50}$$

Entonces, la solución general de la ecuación homogénea (49) tiene la forma

$$y_h = e^{3x}(c_1 \cos 2x + c_2 \sin 2x) \tag{51}$$

Ahora, propongamos una solución particular de (48). La parte derecha de la ecuación (48) consta de dos términos, entonces, propongamos una solución particular y_{p_1} para $x^2 e^{3x}$, y y_{p_2} para $-3\cos 2x$. Obviamente, $y_p = y_{p_1} + y_{p_2}$. Es fácil ver que una solución particular podría ser

$$y_p = (Ax^2 + Bx + C)e^{3x} + D\cos 2x + E\sin 2x \tag{52}$$

Derivando una y otra vez, resulta

$$y_p' = (2Ax + B)e^{3x} + 3(Ax^2 + Bx + C)e^{3x} - 2D\sin 2x +$$

$$y'' = 2Ae^{3x} + 6(2Ax + B)e^{3x} +$$
$$+9(Ax^2 + Bx + C)e^{3x} - 4D\cos 2x - 4E\sin 2x$$

Poniendo estos resultados en la ecuación (48), obtenemos el sistema de ecuaciones

$$\begin{aligned} B &= 0 \\ A + 2C &= 0 \\ 4A &= 1 \\ 12D + 9E &= 0 \\ 9D - 12E &= -3 \end{aligned} \tag{54}$$

Al resolver este sistema hallamos los valores de los coeficientes, estos son:
$A = 1/4$, $B = 0$, $C = -1/8$, $D = -3/25$ y $E = 4/25$.
Sustituyendo estos valores en (52), tenemos que la solución particular de (48), es

$$y_p = \left(\frac{x^2}{4} - \frac{1}{8}\right) e^{3x} - \frac{3}{25}\cos 2x + \frac{4}{25}\sin 2x \tag{55}$$

Por último, construimos la solución general de (48) como la suma de la y_h y la y_p, esto nos da el resultado final

$$\begin{aligned} y(x) &= e^{3x}(c_1 \cos 2x + c_2 \sin 2x) + \left(\frac{x^2}{4} - \frac{1}{8}\right) e^{3x} - \\ &- \frac{3}{25}\cos 2x + \frac{4}{25}\sin 2x \end{aligned} \tag{56}$$

Variación de los parámetros

Dr. J. Juan Rosales García
Departamento de Ingeniería Eléctrica,
DICIS-UGTO.

Ahora analizaremos un caso más general que el anterior. Es decir, vamos a estudiar el método con el cual podremos resolver ecuaciones diferenciales lineales no homogéneas sin restringir a la función $f(x)$ (la única condición es que $f(x)$ sea continua en algún intervalo donde la ecuación está definida), a este nuevo método se le conoce como variación del parámetro.

Sea dada la ecuación diferencial lineal no homogénea en la forma estándar, es decir

$$\boxed{y'' + P(x)y' + Q(x)y = f(x)} \tag{57}$$

donde se supone que $P(x)$, $Q(x)$ y $f(x)$ son funciones continuas en el intervalo $[a, b]$. Sean y_1 y y_2 las dos soluciones linealmente independientes, correspondientes a la ecuación homogénea y_h, obtenida de (57)

$$y_1'' + P(x)y_1' + Q(x)y_1 = 0, \qquad y_2'' + P(x)y_2' + Q(x)y_2 = 0 \tag{58}$$

Ahora nos hacemos la pregunta: ¿Será posible hallar dos funciones u_1 y u_2 tales que la expresión

$$\boxed{y_p(x) = u_1(x)y_1(x) + u_2(x)y_2(x)} \tag{59}$$

sea una solución particular de (57)? La respuesta es sí.

Los pasos son los siguientes:

- Encontrar la solución general de la ecuación homogénea correspondiente a la ecuación (57), esto es

$$\boxed{y'' + P(x)y' + Q(x)y = 0} \tag{60}$$

De aquí, obtenemos la solución

$$\boxed{y_h(x) = c_1 y_1 + c_2 y_2} \tag{61}$$

- Identificamos y_1 y y_2 y formamos el wronskiano de estas funciones

$$\boxed{W = \det \begin{pmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{pmatrix}} \tag{62}$$

- Encontrar las funciones u_1 y u_2 según las fórmulas

$$\boxed{u_1' = \frac{W_1}{W}, \qquad u_2' = \frac{W_2}{W}} \tag{63}$$

donde W_1 y W_2 están dadas por las siguientes fórmulas:

$$\boxed{W_1 = \det\begin{pmatrix} 0 & y_2 \\ f(x) & y_2' \end{pmatrix}, \qquad W_2 = \det\begin{pmatrix} y_1 & 0 \\ y_1' & f(x) \end{pmatrix}} \tag{64}$$

- Formar la solución particular según la expresión (59)

$$\boxed{y_p(x) = u_1(x)y_1(x) + u_2(x)y_2(x)} \tag{65}$$

donde $u_1(x)$ y $u_2(x)$ son las funciones encontradas al integrar las expresiones (63).

- Finalmente, la solución general de la ecuación original (57) tiene la forma

$$\boxed{\begin{gathered} y(x) = c_1y_1(x) + c_2y_2(x) + u_1(x)y_1(x) + \\ + u_2(x)y_2(x) \end{gathered}}$$

Ejemplo 6:

Dr. J. Juan Rosales García
Departamento de Ingeniería Eléctrica, DICIS-UGTO.

Hallar la solución general de la ecuación

$$y'' + 2y' + y = \frac{e^{-x}}{x+1} \tag{66}$$

Solución:

La ecuación homogénea correspondiente es

$$y'' + 2y' + y = 0 \tag{67}$$

Su ecuación característica

$$m^2 + 2m + 1 = 0 \quad \rightarrow \quad (m+1)(m+1) = 0 \quad \rightarrow \quad m = -1 \tag{68}$$

La solución general de la ecuación (67) tiene la forma

$$y_h = c_1 e^{-x} + c_2 x e^{-x} \tag{69}$$

De esta ecuación identificamos las funciones $y_1 = e^{-x}$ y $y_2 = xe^{-x}$. Ahora, con estas funciones formamos el determinante (wronskiano),

$$\begin{aligned} W &= \det \begin{pmatrix} e^{-x} & xe^{-x} \\ -e^{-x} & e^{-x} - xe^{-x} \end{pmatrix} = \\ &= e^{-x}(e^{-x} - xe^{-x}) + xe^{-2x} = e^{-2x} \end{aligned} \tag{70}$$

Para W_1 y W_2, tenemos

$$\begin{aligned} W_1 &= \det\begin{pmatrix} 0 & xe^{-x} \\ \frac{e^{-x}}{x+1} & e^{-x} - xe^{-x} \end{pmatrix} = \\ &= -\frac{xe^{-2x}}{x+1}, \qquad (71) \\ W_2 &= \det\begin{pmatrix} e^{-x} & 0 \\ -e^{-x} & \frac{e^{-x}}{x+1} \end{pmatrix} = \frac{e^{-2x}}{x+1} \qquad (72) \end{aligned}$$

Dr. J. Juan Rosales García
Departamento de Ingeniería Eléctrica,
DICIS-UGTO.

Luego, de las fórmulas (63) encontramos las funciones u_1 y u_2. Para u_1, tenemos

$$
\begin{aligned}
u_1 &= \int \frac{W_1}{W} \mathrm{d}x = \int \left(-\frac{xe^{-2x}}{x+1}\right)\left(\frac{1}{e^{-2x}}\right)\mathrm{d}x = \\
&= -\int \left(\frac{x}{x+1}\right)\mathrm{d}x = \int \left(\frac{x+1-1}{x+1}\right)\mathrm{d}x = \\
&= -\int \left(1-\frac{1}{x+1}\right)\mathrm{d}x = -x + \ln|x+1| \qquad (73)
\end{aligned}
$$

y para u_2, resulta

$$\begin{aligned} u_2 &= \int \frac{W_2}{W}\mathrm{d}x = \int \left(\frac{e^{-2x}}{x+1}\right)\left(\frac{1}{e^{-2x}}\right)\mathrm{d}x = \\ &= \int \frac{\mathrm{d}x}{x+1} = \ln|x+1| \end{aligned} \tag{74}$$

Sustituyendo los valores de u_1, u_2, y_1 y y_2 en la fórmula (65) tenemos que la solución particular $y_p(x)$, es

$$y_p = (-x + \ln|x+1|)e^{-x} + xe^{-x}\ln|x+1| \tag{75}$$

Entonces, la solución general de la ecuación (66), es

$$y(x) = c_1 e^{-x} + c_2 xe^{-x} - xe^{-x} + e^{-x}(x+1)\ln|x+1| \tag{76}$$

Los términos $c_2xe^{-x} - xe^{-x} = (c_2 - 1)xe^{-x}$, los podemos escribir simplemente como c_2xe^{-x}, entonces la solución general (equivalente) es

$$y(x) = c_1 e^{-x} + c_2 xe^{-x} + e^{-x}(x+1)\ln|x+1| \tag{77}$$

Ejemplo 7:

Dr. J. Juan Rosales García Departamento de Ingeniería Eléctrica, DICIS-UGTO.

Resolver la ecuación

$$y'' + y = \frac{1}{\sin x} \tag{78}$$

Solución:

Antes que nada, debemos hallar la solución a la ecuación homogénea obtenida de (78). Tenemos

$$y'' + y = 0 \tag{79}$$

La ecuación característica asociada a esta ecuación tiene la forma

$$m^2 + 1 = 0 \tag{80}$$

Las raíces son complejas conjugadas, es decir, tienen la forma $m_1 = i$ y $m_2 = -i$. Entonces, la solución general de la ecuación (79) es

Ahora bien, identificamos las funciones $y_1 = \cos x$ y $y_2 = \sin x$, y calculamos el wronskiano

$$W = \det \begin{pmatrix} \cos x & \sin x \\ -\sin x & \cos x \end{pmatrix} = \cos^2 x + \sin^2 x = 1 \quad (82)$$

Ahora, debemos encontrar las funciones W_1 y W_2, según las fórmulas (64)

$$W_1 = \det \begin{pmatrix} 0 & \sin x \\ \frac{1}{\sin x} & \cos x \end{pmatrix} = -1 \quad (83)$$

$$W_2 = \det \begin{pmatrix} \cos x & 0 \\ -\sin x & \frac{1}{\sin x} \end{pmatrix} = \frac{\cos x}{\sin x} \quad (84)$$

Dr. J. Juan Rosales García
Departamento de Ingeniería Eléctrica,
DICIS-UGTO.

Para encontrar las funciones u_1 y u_2 tenemos que integrar

$$u_1(x) = \int \frac{W_1}{W}\mathrm{d}x = -\int \mathrm{d}x = -x \tag{85}$$

y

$$u_2(x) = \int \frac{W_2}{W}\mathrm{d}x = \int \frac{\cos x}{\sin x}\mathrm{d}x = \int \frac{\mathrm{d}(\sin x)}{\sin x} = \ln|\sin x| \tag{86}$$

Dr. J. Juan Rosales García
Departamento de Ingeniería Eléctrica,
DICIS-UGTO.

Entonces, la solución particular tiene la forma

$$y_p(x) = u_1(x)y_1(x)+u_2(x)y_2(x) = -x\cos x+\ln|\sin x|\sin x \tag{87}$$

Finalmente, tenemos la solución general de la ecuación (78), la cual tiene la forma $y(x) = y_h(x) + y_p(x)$, explícitamente

$$y(x) = c_1\cos x + c_2\sin x - x\cos x + \sin x\ln|\sin x| \tag{88}$$

Ecuaciones de Cauchy-Euler

Hasta el momento hemos considerado ecuaciones diferenciales lineales con coeficientes constantes, y fue relativamente fácil encontrar sus soluciones. Sin embargo, en el caso en que los coeficientes son variables no es tan fácil encontrar soluciones exactas. No obstante, existe un tipo de ecuaciones con coeficientes variables cuya solución general se puede expresar en términos de potencias de x, senos, $\mathrm{cosenos}$, funciones logarítmicas y exponenciales.

Dr. J. Juan Rosales García Departamento de Ingeniería Eléctrica, DICIS-UGTO.

Una ED de Cuachy-Euler tiene la forma

$$\boxed{a_n x^n \frac{\mathrm{d}^n y}{\mathrm{d}x^n} + a_{n-1} x^{n-1} \frac{\mathrm{d}^{n-1} y}{\mathrm{d}x^{n-1}} + \cdots + a_1 x \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} + a_0 y = g(x)} \tag{89}$$

donde a_i $(i = 0, 1, 2, \ldots, n)$ son constantes y $g(x)$ es una función continua en el dominio de definición de le ecuación diferencial. Podemos observar que la potencia de x coincide con el orden de la ecuación diferencial.

Analizaremos primero las ecuaciones de segundo orden homogéneas con coeficientes variables, es decir, las ecuaciones de la forma

$$\boxed{ax^2\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}+bx\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+cy=0} \tag{90}$$

Una vez conocida la solución de la ecuación homogénea es fácil encontrar la solución de la ecuación no homogénea usando el método de variación de parámetros antes visto.

Sea dada la ecuación diferencial de segundo orden

$$\boxed{ax^2y'' + bxy' + cy = 0} \tag{91}$$

Busquemos una solución de la forma

$$\boxed{y = x^m} \tag{92}$$

donde m es un número a determinar, tenemos

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = mx^{m-1}, \qquad \frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2} = m(m-1)x^{m-2} \tag{93}$$

Sustituyendo en la ecuación (91)

$$am(m-1)x^2x^{m-2} + bmxx^{m-1} + cx^m = 0. \tag{94}$$

Factorizando

$$[am(m-1) + bm + c]\, x^m = 0 \tag{95}$$

Debido a que $x^m \neq 0$, entonces para que la ecuación se cumpla deberá satisfacerse la relación

$$\boxed{am^2 + (b-a)m + c = 0} \tag{96}$$

que es la ecuación característica de la ecuación diferencial de Cauchy-Euler. Para ésta existen tres casos posibles:

Primer caso.

Raíces reales y distintas. Es decir, m_1 y m_2 diferentes, en tal caso, tenemos que la solución general es

$$\boxed{y(x) = c_1 x^{m_1} + c_2 x^{m_2}} \tag{97}$$

Ejemplo 8:

Dr. J. Juan Rosales García
Departamento de Ingeniería Eléctrica, DICIS-UGTO.

Hallar la solución general de la ecuación

$$x^2y'' - 4xy' + 6y = 0 \tag{98}$$

Solución:

Supongamos que la solución es del tipo

$$\boxed{y(x) = x^m} \tag{99}$$

Sustituyendo (99) en (98), tenemos

$$m^2 - 5m + 6 = 0 \tag{100}$$

Dr. J. Juan Rosales García
Departamento de Ingeniería Eléctrica, DICIS-UGTO.

Las raíces de esta ecuación son

$$m_1 = 3, \qquad m_2 = 2 \tag{101}$$

La solución general de la ecuación (98) es

$$y(x) = c_1 x^3 + c_2 x^2 \tag{102}$$

Segundo caso.

Raíces reales e iguales. Esto es, $m_1 = m_2 = m$. En tal caso sólo tendremos una solución que será $y_1 = x^m$. Para que esto suceda el discriminante de la ecuación cuadrática (96) deberá ser igual a cero, de donde encontramos que $m = -\frac{(b-a)}{2a}$. Entonces, podemos formar una segunda solución linealmente independiente. Para esto escribamos la ecuación de Cauchy-Euler en la forma estándar, esto es

$$\boxed{y'' + \frac{b}{ax}y' + \frac{c}{ax^2}y = 0} \tag{103}$$

Entonces, usamos la fórmula (**??**)

$$
\begin{aligned}
y_2 &= y_1 \int \frac{e^{-\int p(x)\mathrm{d}x}}{y_1^2}\mathrm{d}x = y_1 \int \frac{e^{-\frac{b}{a}\int \frac{\mathrm{d}x}{x}}}{x^{2m}}\mathrm{d}x = \\
&= y_1 \int \frac{e^{-\frac{b}{a}\ln x}}{x^{2m}}\mathrm{d}x = y_1 \int x^{-\frac{b}{a}} x^{-2m}\mathrm{d}x = \\
&= y_1 \int x^{-\frac{b}{a}} x^{\frac{b-a}{a}}\mathrm{d}x = y_1 \int \frac{\mathrm{d}x}{x} = y_1 \ln x \qquad (104)
\end{aligned}
$$

Dr. J. Juan Rosales García
Departamento de Ingeniería Eléctrica,
DICIS-UGTO.

La solución general será la suma de las dos soluciones, esto es

$$\boxed{y(x) = c_1 x^m + c_2 x^m \ln x} \tag{105}$$

En general, cuando aparece una raíz real $m = a$ en la ecuación característica con multiplicidad r, entonces la ecuación de Cauchy-Euler tiene como soluciones

$$y = x^a, \quad y = x^a \ln x, \quad y = x^a (\ln x)^2, \ldots \quad y = x^a (\ln x)^{r-1} \tag{106}$$

Ejemplo 9:

Resolver la ecuación de Cauchy-Euler

$$8x^3y''' + 12x^2y'' + 2xy' - y = 0 \tag{107}$$

Solución:
Según el método antes visto, debemos suponer la solución

$$y = x^m \tag{108}$$

Sustituyendo la solución propuesta en (107), tenemos la ecuación característica

$$8m(m-1)(m-2)+12m(m-1)+2m-1=0 \quad (109)$$

la cual podemos escribir de la siguiente manera:

$$(8m-4)m(m-1)+2m-1=0 \quad (110)$$

Factorizando, resulta

$$(2m-1)[4m(m-1)+1]=0 \quad (111)$$

Esta misma expresión la podemos escribir de la siguiente manera:

$$(2m-1)(4m^2-4m+1)=0 \quad (112)$$

Finalmente, tenemos

$$(2m-1)^3 = 0 \tag{113}$$

De donde es fácil ver que tenemos la raíz $m = 1/2$ de multiplicidad 3. Cada repetición de una raíz corresponde a un factor adicional $\ln x$ en la solución. De esta manera, obtenemos tres soluciones linealmente independientes que satisfacen la ecuación (107). Estas soluciones tienen la forma

$$y = \sqrt{x}, \quad y = \sqrt{x}\ln x, \quad y = \sqrt{x}(\ln x)^2 \tag{114}$$

La solución general de la ecuación (107) estará dada por la combinación lineal de estas tres funciones, es decir

$$y(x) = c_1\sqrt{x} + c_2\sqrt{x}\ln x + c_3\sqrt{x}(\ln x)^2 \tag{115}$$

Tercer caso.

Raíces complejas conjugadas. Es decir

$$m_1 = \alpha + i\beta, \qquad m_2 = \alpha - i\beta \tag{116}$$

donde α y β son ciertos números reales. La solución general de la ecuación (90), en tal caso es

$$\boxed{y(x) = c_1 x^{\alpha + i\beta} + c_2 x^{\alpha - i\beta}} \tag{117}$$

Dr. J. Juan Rosales García
Departamento de Ingeniería Eléctrica,
DICIS-UGTO.

Haciendo

$$x^{i\beta} = \left(e^{\ln x}\right)^{i\beta} = e^{i\beta \ln x} = \cos(\beta \ln x) + i \sin(\beta \ln x) \tag{118}$$

Podemos escribir la solución como:

$$\boxed{y(x) = x^{\alpha}\left[c_1 \cos(\beta \ln x) + c_2 \sin(\beta \ln x)\right]} \tag{119}$$

Ejemplo 10:

Dr. J. Juan Rosales García
Departamento de Ingeniería Eléctrica,
DICIS-UGTO.

Resolver la ecuación

$$x^2 y'' + xy' + 4y = 0 \tag{120}$$

Solución:
Suponemos la solución $y = x^m$, sustituyendo en la ecuación (120), obtenemos la ecuación característica

$$m^2 + 4 = 0 \quad \rightarrow \quad m_1 = 2i, \qquad m_2 = -2i. \tag{121}$$

En este caso tenemos que las raíces son complejas conjugadas. Identificamos a $\alpha = 0$ y $\beta = 2$. Entonces haciendo uso de la fórmula (119) tenemos que la solución general de la ecuación (120) tiene la forma

$$y_h(x) = c_1 \cos\left(2 \ln |x|\right) + c_2 \sin\left(2 \ln |x|\right) \tag{122}$$

ED de Cauchy-Euler no homogéneas

Dr. J. Juan Rosales García Departamento de Ingeniería Eléctrica, DICIS-UGTO.

Para estas ecuaciones son válidos los métodos antes vistos: coeficientes indeterminados y variación de parámetros.

Dr. J. Juan Rosales García
Departamento de Ingeniería Eléctrica,
DICIS-UGTO.

Ejemplo 11:

Hallar la solución general de la ecuación

$$x^2y'' - xy' + y = 8x^3 \tag{123}$$

Solución:

La ecuación homogénea correspondiente a (123) es

$$x^2y'' - xy' + y = 0 \tag{124}$$

Suponemos la solución

$$y(x) = x^m \tag{125}$$

Dr. J. Juan Rosales García
Departamento de Ingeniería Eléctrica, DICIS-UGTO.

Sustituyendo (125) en la ecuación homogénea (124), tenemos

$$m^2 - 2m + 1 = 0 \quad \rightarrow \quad (m-1)(m-1) = 0 \quad (126)$$

De (126) concluimos que sólo hay una solución $m = 1$ para la ecuación homogénea (124). Pero ya sabemos que dada una solución de una ecuación diferencial lineal, siempre podemos construir una segunda solución linealmente independiente.

De tal manera, que la solución general de la ecuación homogénea (124) tiene la forma

$$y_h(x) = c_1 x + c_2 x \ln|x| \tag{127}$$

Ahora debemos proponer una solución particular de la ecuación no homogénea (123). Debido a la estructura de la función $f(x) = 8x^3$, podemos usar el método de los coeficientes indeterminados. Supongamos que la solución particular de (123) tiene la forma

$$y_p(x) = Ax^3 + Bx^2 + Cx + D \tag{128}$$

Para sustituir en (123) calculamos las derivadas primera y segunda de (128)

$$y_p' = 3Ax^2 + 2Bx + C, \qquad y_p'' = 6Ax + 2B \tag{129}$$

Sustituyendo (129) en la ecuación (123)

$$x^2(6Ax+2B)-x(3Ax^2+2Bx+C)+Ax^3+Bx^2+Cx+D=8x^3 \tag{130}$$

Igualando los coeficientes de x, tenemos que los coeficientes indeterminados son $A=2$ y $B=0$, $C=0$, $D=0$. Poniendo el valor de los coeficientes en (128), tenemos la solución particular

$$y_p(x)=2x^3 \tag{131}$$

La solución general de la ecuación (123), es

$$y(x)=x(c_1+c_2\ln|x|)+2x^3 \tag{132}$$

Ejemplo 12:

Resolver la ecuación de Cauchy-Euler no homogénea

$$x^2y'' + 5xy' + 3y = 8x\ln x \tag{133}$$

Solución:
Primero resolvemos la ecuación homogénea correspondiente a (133). Tenemos

$$x^2y'' + 5xy' + 3y = 0 \tag{134}$$

Supongamos la solución

$$y = x^m \tag{135}$$

Derivando, resulta

$$y' = mx^{m-1}, \quad y'' = m(m-1)x^{m-2} \tag{136}$$

Sustituyendo en (134), tenemos la ecuación característica y sus raíces

$$\begin{aligned} m^2 + 4m + 3 &= 0 \to (m+3)(m+1) = 0 \to m_1 = -3, \\ m_2 &= -1 \end{aligned} \tag{137}$$

Dr. J. Juan Rosales García
Departamento de Ingeniería Eléctrica,
DICIS-UGTO.

La solución general de la ecuación homogénea es

$$y_h = c_1 x^{-3} + c_2 x^{-1} \tag{138}$$

Luego, con las funciones

$$y_1 = x^{-3}, \qquad y_2 = x^{-1} \tag{139}$$

formamos el wronskiano

$$W = \det\begin{pmatrix} x^{-3} & x^{-1} \\ -3x^{-4} & -x^{-2} \end{pmatrix} = -x^{-5} + 3x^{-5} = 2x^{-5} \tag{140}$$

Las funciones W_1 y W_2 se calculan según las fórmulas (140)

$$W_1 = \det \begin{pmatrix} 0 & x^{-1} \\ \frac{8\ln x}{x} & -x^{-2} \end{pmatrix} = -\frac{8\ln x}{x^2} \tag{141}$$

y

$$W_2 = \det \begin{pmatrix} x^{-3} & 0 \\ -3x^{-4} & \frac{8\ln x}{x} \end{pmatrix} = \frac{8\ln x}{x^4} \tag{142}$$

Integrando, encontamos las funciones u_1 y u_2:

$$
\begin{aligned}
u_1(x) &= \int \frac{W_1}{W}\mathrm{d}x = \int \left(-\frac{8\ln x}{x^2}\right)\left(\frac{1}{2x^{-5}}\right)\mathrm{d}x = \\
&= -4\int x^3 \ln x \mathrm{d}x \\
\rightarrow & \left[\mathrm{d}u = \frac{1}{x}\mathrm{d}x, \quad \mathrm{d}v = x^3\mathrm{d}x, \quad v = \frac{x^4}{4}\right] \\
&= -4\left[\frac{x^4}{4}\ln x - \frac{1}{4}\int \frac{x^4}{x}\mathrm{d}x\right] = \\
&= -x^4 \ln x + \frac{x^4}{4} \qquad (143)
\end{aligned}
$$

y

$$
\begin{aligned}
u_2(x) &= \int \frac{W_2}{W}\mathrm{d}x = \int \left(\frac{8\ln x}{x^4}\right)\left(\frac{1}{2x^{-5}}\right)\mathrm{d}x = \\
&= 4\int x\ln x\mathrm{d}x \\
&\rightarrow \left[\mathrm{d}u = \frac{1}{x}\mathrm{d}x, \quad \mathrm{d}v = x\mathrm{d}x, \quad v = \frac{x^2}{2}\right] \\
&= 4\left[\frac{x^2}{2}\ln x - \frac{1}{2}\int \frac{x^2}{x}\mathrm{d}x\right] = \\
&= 2x^2\ln x - x^2 \qquad (144)
\end{aligned}
$$

Entonces, la solución particular tiene la forma

$$\begin{aligned} y_p(x) &= u_1 y_1 + u_2 y_2 = \left(-x^4 \ln x + \frac{x^4}{4}\right) x^{-3} + \\ &+ \left(2x^2 \ln x - x^2\right) x^{-1} = x \ln x - \frac{3x}{4} \end{aligned} \tag{145}$$

Luego, la solución general de la ecuación (133) es

$$y(x) = c_1 x^{-3} + c_2 x^{-1} + x \ln x - \frac{3x}{4} \tag{146}$$

Ejercicios Propuestos

Dr. J. Juan Rosales García
Departamento de Ingeniería Eléctrica,
DICIS-UGTO.

1. $y'' + 2y' + 2y = \frac{1}{e^x \sin x}$
2. $y'' - y' = \frac{e^x}{e^x+1}$
3. $y'' - y' = e^{2x}(1 - e^{-2x})^{1/2}$
4. $y'' - y' = (e^x + 1)^{-1}$
5. $x^2y'' - 2y = \sin(\ln x)$
6. $y'' + 4y = \frac{1}{\cos 2x}$
7. $y'' + 4y' + 4y = 3e^{-x}, \quad y(0) = y'(0) = 0$
8. $y'' + 3y' + 2y = 6xe^{-x}(1 - e^{-x})$
9. $x^2y'' - 2y = \frac{3x^2}{x+1}$
10. $x^2y'' + 3xy' + y = \frac{1}{x}, \quad y(1) = 1, \quad y'(1) = 0$