Sesión 14. Aplicaciones de las EDOs de Orden Superior

Dr. J. Juan Rosales García
Departamento de Ingeniería Eléctrica, DICIS-UGTO.

Competencias:

Dr. J. Juan Rosales García Departamento de Ingeniería Eléctrica, DICIS-UGTO.

- Plantea y resuelve problemas físicos usando las EDOs de segndo orden.
- Analiza los resultados obtenidos.

Vibraciones mecánicas

Dr. J. Juan Rosales García
Departamento de Ingeniería Eléctrica, DICIS-UGTO.

El movimiento de un cuerpo de masa m sujeto a un resorte, sirve como ejemplo simple de las vibraciones que ocurren en los sistemas mecánicos más complejos. Muchos problemas de este tipo se pueden modelar con ecuaciones diferenciales lineales no homogéneas con coeficientes constantes y, desde luego, ser resueltos con los métodos antes vistos.

Dr. J. Juan Rosales García
Departamento de Ingeniería Eléctrica, DICIS-UGTO.

Supongamos que tenemos un cuerpo de masa m sujeto a un extremo de un resorte que resiste, tanto a la compresión como al estiramiento, el otro extremo del resorte está sujeto a un muro fijo, figura. Supongamos, además, que el cuerpo descansa en una superficie plana sin fricción, de modo que el cuerpo solamente puede moverse hacia atrás y hacia adelante cuando el resorte se estira o se comprime. Supongamos que x representa la distancia del cuerpo a la posición de equilibrio (reposo). Fijemos nuestro sistema de referencia de tal modo que $x > 0$, cuando el resorte está estirado y $x < 0$ cuando el resorte está comprimido.

Ahora, apliquemos las leyes de la física que han sido comprobadas experimentalmente. En este caso, la ley de Hooke: Esta ley nos dice que, la fuerza que el resorte ejerce sobre un cuerpo de masa m es proporcional a la distancia a la que el resorte se ha estirado o comprimido. A esta fuerza se le conoce como fuerza restauradora, ya que su función es llevar al cuerpo a su estado de equilibrio. Esta fuerza se representa como

$$F_r = -kx \tag{1}$$

donde $k > 0$, es la constante de proporcionalidad, la cual sólo depende del material del que está hecho el resorte. $F_r < 0$, cuando $x > 0$ y $F_r > 0$ cuando $x < 0$, figura

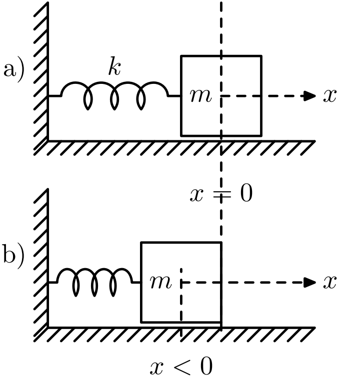

Figure: Comportamiento de un sistema masa-resorte.

Dr. J. Juan Rosales García
Departamento de Ingeniería Eléctrica, DICIS-UGTO.

Aplicando la segunda ley de Newton, tenemos

$$m\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2} = -kx \tag{2}$$

La ecuación (2) se puede escribir como una ecuación lineal homogénea de segundo orden, es decir, de la siguiente manera:

$$m\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2} + kx = 0 \tag{3}$$

Sabemos bien que el modelo anterior es bastante ideal, y que en el mundo real es difícil encontrar tales sistemas. En realidad, siempre existe una fuerza de amortiguamiento. Esta fuerza de amortiguamiento es muy aproximada a ser proporcional a la velocidad instantánea del cuerpo, es decir,

$$F_a = -\beta \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} \tag{4}$$

donde β es la constante de proporcionalidad, la cual depende del medio que sirve de amortiguador (puede ser la fricción de la superficie o del aire), figura.

Nótese que las fuerzas F_r y F_a tienen signo negativo, esto es debido a que actúan en sentido contrario al del movimiento del cuerpo.

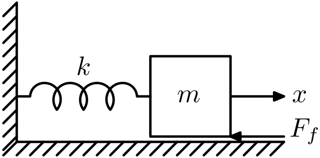

Figure: Sistema masa-resorte-fricción.

La ecuación que describe el comportamiento del sistema de la figura 2 tiene, entonces, la forma

$$m\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}+\beta\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}+kx=0 \tag{5}$$

Si, además de las fuerzas F_r y F_a, el cuerpo está sujeto a una fuerza externa dada por

$$F_e=F(t) \tag{6}$$

entonces, la fuerza total que actúa en el cuerpo está dada por la suma de estas fuerzas

$$F=F_r+F_a+F_e \tag{7}$$

En general, las fuerzas son vectoriales, pero aquí no es necesario representarlas como vectores, ya que por condiciones del problema se trata de un movimiento unidimensional.
Haciendo uso de la segunda ley de la dinámica de Newton, la cual nos dice que, la suma de todas las fuerzas que actúan en un cuerpo es igual al producto de su masa por la aceleración, es decir,

$$\sum_{i}^{N} F_{i=1} = m\frac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t^2} \tag{8}$$

Entonces, tenemos

$$m\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2} = -\beta\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} - kx + F(t) \tag{9}$$

Desde luego, esta ecuación la podemos escribir de la siguiente manera:

$$\boxed{m\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2} + \beta\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} + kx = F(t)} \tag{10}$$

Como podemos ver, la ecuación (10) es una ecuación diferencial lineal no homogénea de segundo orden con coeficientes constantes. Esta ecuación modela, en un alto grado de exactitud, el movimiento del cuerpo sujeto a una fuerza de amortiguamiento y a una fuerza externa. Si no hay amortiguamiento, entonces, ponemos $\beta = 0$ y decimos que el *movimiento es no amortiguado*. El *movimiento es amortiguado* si $\beta > 0$. Si no hay fuerzas externas, esto es, si $F(t) = 0$, entonces, decimos que el *movimiento es libre* y diremos que es *movimiento forzado* si $F(t) \neq 0$.

Así, la ecuación homogénea

$$\boxed{m\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}+\beta\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}+kx=0} \tag{11}$$

describe el movimiento *libre* de un cuerpo de masa m sujeto a un resorte con *amortiguamiento*, pero sin fuerzas externas.

Solución para el movimiento libre no amortiguado

Se llama movimiento libre no amortiguado a todo aquel que cumple la ecuación diferencial

$$\boxed{m\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2} + kx = 0} \tag{12}$$

Nótese que aquí hemos puesto $\beta = F(t) = 0$.

Escribamos la ecuación (12) de la siguiente manera:

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2} + \omega_0^2 x = 0} \tag{13}$$

Donde, por comodidad, se ha introducido el parámetro $\omega_0^2 = k/m$. La solución de esta ecuación la buscamos de la forma

$$x(t) = e^{\lambda t} \tag{14}$$

En esta expresión hemos escrito λ en lugar del parámetro m, esto es para no confundirse con la masa m del cuerpo. Sustituyendo en (13), tenemos

$$\lambda^2 + \omega_0^2 = 0 \quad \rightarrow \quad \lambda = \pm\sqrt{-\omega_0^2} = \pm i\omega_0 \tag{15}$$

De donde, la solución general de esta ecuación es

$$x(t) = c_1 \cos \omega_0 t + c_2 \sin \omega_0 t \tag{16}$$

Este resultado lo podemos escribir de otra forma equivalente. Definamos las constantes c_1 y c_2 como

$$c_1 = R\cos\phi \qquad c_2 = R\sin\phi \tag{17}$$

donde

$$R = \sqrt{c_1^2 + c_2^2}, \qquad \tan\phi = \frac{c_2}{c_1}, \qquad \phi = \tan^{-1}\left(\frac{c_2}{c_1}\right) \tag{18}$$

Sustituyendo (17) en (16), resulta

$$x(t) = R\cos\phi\cos\omega_0 t + R\sin\phi\sin\omega_0 t \tag{19}$$

Recordando la identidad trigonométrica

$$\cos\phi\cos\omega_0 t + \sin\phi\sin\omega_0 t = \cos(\omega_0 t - \phi) \tag{20}$$

obtenemos el resultado final

$$\boxed{x(t) = R\cos(\omega_0 t - \phi)} \tag{21}$$

Observe que existe una relación entre las constantes c_1, c_2 y las funciones $\sin\phi$ y $\cos\phi$. Esto es

$$\cos\phi = \frac{c_1}{\sqrt{c_1^2 + c_2^2}}, \qquad \sin\phi = \frac{c_2}{\sqrt{c_1^2 + c_2^2}} \tag{22}$$

Existe un número infinito de ángulos ϕ, que difieren en múltiplos enteros de 2π, que satisfacen las ecuaciones (22). Usualmente se escoge a ϕ tal que $-\pi \leq \phi < \pi$. El movimiento descrito por (16), o por (21) se llama *movimiento armónico simple*. La solución (21) es periódica de periodo

$$\boxed{T = \frac{2\pi}{\omega_0}} \tag{23}$$

Dr. J. Juan Rosales García Departamento de Ingeniería Eléctrica, DICIS-UGTO.

Este es el tiempo requerido para que el cuerpo complete un ciclo de ida y vuelta, u oscilación. Al parámetro R se le conoce como amplitud de la oscilación. Al ángulo ϕ se le da el nombre de ángulo de fase y se mide en radianes. Si t está en segundos, entonces, ω_0 está dada en radianes sobre segundo y se le llama frecuencia propia del movimiento.

Soluciones para las oscilaciones forzadas no amortiguadas

Dr. J. Juan Rosales García Departamento de Ingeniería Eléctrica, DICIS-UGTO.

En la naturaleza existen muchos fenómenos sometidos a fuerzas periódicas externas. Por ejemplo, los motores de hélice de un avión causan perturbaciones periódicas en sus alas. Las perturbaciones, aunque sean pequeñas en magnitud, pueden causar fracturas estructurales si tienen ciertas frecuencias críticas.

Dr. J. Juan Rosales García
Departamento de Ingeniería Eléctrica, DICIS-UGTO.

Consideremos un sistema masa-resorte sin amortiguamiento sometido a una fuerza externa

$$F(t) = F_0 \cos \gamma_0 t \tag{24}$$

donde F_0 es una amplitud constante y γ_0 es la frecuencia propia de la fuerza externa. La ecuación que gobierna el movimiento no amortiguado tiene la forma

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t^2} + \omega_0^2 x = F(t)} \tag{25}$$

Considerando la fuerza externa (24) tenemos

$$\frac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t^2} + \omega_0^2 x = \frac{F_0}{m} \cos \gamma_0 t \tag{26}$$

Donde hemos definido $\omega_0 = \sqrt{k/m}$. Para resolver la ecuación (26), primero debemos resolver su ecuación homogénea correspondiente

$$\frac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t^2} + \omega_0^2 x = 0. \tag{27}$$

Esta ecuación tiene la solución

$$x_h = c_1 \cos \omega_0 t + c_2 \sin \omega_0 t \tag{28}$$

Ahora busquemos una solución particular de la ecuación (26), sea

$$x_p = A \cos \gamma_0 t + B \sin \gamma_0 t \tag{29}$$

Sustituyendo esta solución en la ecuación (26), con el objetivo de encontrar las constantes A y B, tenemos como resultado

$$(\omega_0^2 - \gamma_0^2)(A \cos \gamma_0 t + B \sin \gamma_0 t) = \frac{F_0}{m} \cos \gamma_0 t \tag{30}$$

Esto se cumple, si y sólo si

$$A = \frac{F_0}{m(\omega_0^2 - \gamma_0^2)}, \qquad \text{y} \qquad B = 0 \tag{31}$$

Entonces, la solución particular tiene la forma

$$x_p(t) = \frac{F_0}{m(\omega_0^2 - \gamma_0^2)} \cos \gamma_0 t \tag{32}$$

Luego, la solución general está dada por la relación

$$x(t) = c_1 \cos \omega_0 t + c_2 \sin \omega_0 t + \frac{F_0}{m(\omega_0^2 - \gamma_0^2)} \cos \gamma_0 t \tag{33}$$

Ahora, supongamos que las condiciones iniciales son tales que

$$x(0) = 0, \qquad x'(0) = 0 \tag{34}$$

Entonces, tenemos

$$c_1 = -\frac{F_0}{m(\omega_0^2 - \gamma_0^2)}, \qquad y \qquad c_2 = 0 \tag{35}$$

Sustituyendo en (33), tenemos

$$x(t) = \frac{F_0}{m(\omega_0^2 - \gamma_0^2)}(\cos\gamma_0 t - \cos\omega_0 t) \tag{36}$$

Esta solución es válida para el caso $\omega_0 \neq \gamma_0$.

Dr. J. Juan Rosales García
Departamento de Ingeniería Eléctrica, DICIS-UGTO.

Por otro lado, si $\omega_0 \to \gamma_0$, entonces la expresión (36) tiene la indeterminación $x(t) \to \frac{0}{0}$. En tal caso debemos aplicar el teorema de L' Hospital en (36). Es decir, debemos derivar la expresión de la derecha de (36) respecto a ω_0 y tomar el límite cuando $\omega_0 \to \gamma_0$. El resultado es el siguiente:

$$x(t) = \frac{tF_0 \sin \gamma_0 t}{2m\gamma_0} \tag{37}$$

De esta expresión se tiene que cuando $t \to \infty$ la solución se indetermina, lo cual significa que el sistema, en este caso, tiende a la inestabilidad.

Circuito eléctrico RLC

Supongamos que tenemos un circuito eléctrico formado por un resistor de resistencia R (ohms), un inductor de inductancia L (henrios) y un capacitor de capacitancia C (faradios) conectados en serie a una fuente de fuerza electromotriz $E(t)$ (voltios). Determinar la ecuación diferencial que describa el comportamiento de la corriente $I(t)$ (amperes) en el circuito.

Si el interruptor está abierto, entonces, no pasa nada. Cuando el interruptor se cierra (encendido), las diferencias en el potencial eléctrico causan que fluya corriente en el circuito. La batería o generador en la figura 3 crea una diferencia de potencial eléctrico $E(t)$ entre sus dos terminales, que etiquetamos arbitrariamente como positiva y negativa. Decimos que $E(t) > 0$ si el potencial en la terminal positiva es mayor que el potencial en la terminal negativa, $E(t) < 0$ si el potencial en la terminal positiva es menor que en la terminal negativa y $E(t) = 0$ si el potencial es el mismo en las dos terminales. Usualmente a $E(t)$ se le llama *fuerza electromotriz*.

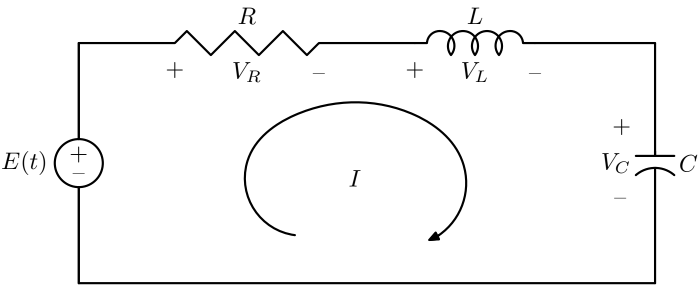

Figure: Circuito RLC.

Para cualquier tiempo t dado, en cada uno de los puntos del circuito fluye la misma corriente $I(t)$, y decimos que $I(t) > 0$ si el flujo circula alrededor del circuito, de la terminal positiva de la batería o generador hacia la terminal negativa, $I(t) < 0$ es el flujo en el sentido opuesto, e $I(t) = 0$ significa que no fluye corriente.
La ecuación para la corriente $I(t)$ se obtiene considerando las siguientes tres caídas de voltaje:

$$
\begin{aligned}
V_L &= L\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t} && \text{en el inductor.}\\
V_R &= RI, && \text{ley de Ohm.}\\
V_C &= \frac{q}{C}, && \text{en el capacitor.}
\end{aligned}
$$

La ley de Kirchhoff nos dice que *la suma de estas tres caídas de voltaje deberá ser igual a la fuerza electromotriz* $E(t)$. Matemáticamente, para el circuito de la figura 3, esta ley se escribe como

$$L\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t} + RI + \frac{1}{C}q = E(t) \tag{38}$$

Esta ecuación contiene dos incógnitas, la corriente $I(t)$ en el circuito y la carga $q(t)$ en el capacitor.

Por otro lado, la corriente $I(t)$ es la cantidad de carga que atraviesa una sección transversal de un conductor en un tiempo t, esto es

$$I(t) = \frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t} \tag{39}$$

Si derivamos la expresión (38) respecto a t, y tomamos en cuenta la relación (39), obtenemos la ecuación diferencial para la corriente $I(t)$ en función del tiempo

$$\boxed{L\frac{\mathrm{d}^2 I}{\mathrm{d}t^2} + R\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t} + \frac{1}{C}I = \frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}t}} \tag{40}$$

Esta ecuación es de segundo orden lineal no homogénea y con coeficientes constantes.

Por otro lado, sustituyendo la expresión (39) en (38), obtenemos una ecuación diferencial para la carga $q(t)$, la cual tiene la siguiente forma:

$$\boxed{L\frac{\mathrm{d}^2 q}{\mathrm{d}t^2} + R\frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t} + \frac{1}{C}q = E(t)} \tag{41}$$

Para hallar la corriente $I(t)$ que fluye en un circuito RLC resolvemos la ecuación (41) para $q(t)$ y luego diferenciamos la solución para obtener $I(t)$.

Oscilaciones libres del circuito RLC

Un circuito RLC tiene oscilación libre si $E(t) = 0$, para todo $t > 0$. Entonces, para las oscilaciones libres de un circuito, figura, en que $E(t) = 0$, tenemos de la expresión (41), la ecuación

$$L\frac{\mathrm{d}^2 q}{\mathrm{d}t^2} + R\frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t} + \frac{1}{C}q = 0 \tag{42}$$

Esta ecuación es lineal, homogénea con coeficientes constantes.

La ecuación característica correspondiente es

$$Lm^2 + Rm + \frac{1}{C} = 0 \tag{43}$$

Aquí m no representa ninguna masa, es un parámetro a determinar. Las raíces de esta ecuación característica son

$$m_1 = \frac{-R + \sqrt{R^2 - 4L/C}}{2L}, \quad m_2 = \frac{-R - \sqrt{R^2 - 4L/C}}{2L} \tag{44}$$

Existen tres casos de interés:

Primer caso:

Dr. J. Juan Rosales García
Departamento de Ingeniería Eléctrica, DICIS-UGTO.

Si se cumple la relación $R^2 < 4L/C$, decimos que la oscilación es subamortiguada. En tal caso, las raíces m_1 y m_2 son complejas conjugadas y tienen la forma

$$m_1 = -\frac{R}{2L} + i\omega_1 \qquad \text{y} \qquad m_2 = -\frac{R}{2L} - i\omega_1 \tag{45}$$

donde

$$\omega_1 = \frac{\sqrt{4L/C - R^2}}{2L} \tag{46}$$

Dr. J. Juan Rosales García
Departamento de Ingeniería Eléctrica,
DICIS-UGTO.

La solución general de la ecuación (42) es

$$q(t) = e^{-Rt/2L}\left(c_1 \cos\omega_1 t + c_2 \sin\omega_1 t\right) \tag{47}$$

Esta solución la podemos escribir en una forma equivalente

$$q(t) = Ae^{-Rt/2L}\cos\left(\omega_1 t - \phi\right) \tag{48}$$

siempre y cuando

$$A = \sqrt{c_1^2 + c_2^2}, \quad c_1 = A\cos\phi, \quad c_2 = A\sin\phi, \quad \phi = \tan^{-1} \tag{49}$$

donde A es la amplitud de las oscilaciones, ω la frecuencia y ϕ la fase.

Si suponemos que $R = 0$ (caso ideal), entonces, de las ecuaciones (48) y (46), tenemos

$$q(t) = A\cos\left(\frac{t}{\sqrt{LC}} - \phi\right) \tag{50}$$

Este resultado es similar al movimiento armónico simple de un sistema masa-resorte no amortiguado en vibración libre. El caso del sistema subamortiguado es el más interesante, ya que por lo general los circuitos RLC pertenecen a estos sistemas.

Segundo caso:

Si $R^2 > 4L/C$ tenemos la oscilación sobreamortiguada. Esto significa que la resistencia en el circuito es dominante. En este caso las raíces m_1 y m_2 son reales y la solución general de la ecuación (42) es

$$q(t) = c_1 e^{m_1 t} + c_2 e^{m_2 t} \tag{51}$$

Tercer caso:

Si $R^2 = 4L/C$, decimos que la oscilación es críticamente amortiguada. En tal caso, las raíces son reales e iguales, $m_1 = m_2 = m = -R/2L$ y la solución general de (42), es

$$q(t) = e^{-Rt/2L}(c_1 + c_2 t) \tag{52}$$

Si $R \neq 0$, entonces los exponentes en las expresiones (48, 51, 52) son negativos, por consiguiente la solución general de cualquier problema homogéneo con valor inicial

Dr. J. Juan Rosales García
Departamento de Ingeniería Eléctrica, DICIS-UGTO.

Es

$$L\frac{\mathrm{d}^2 q}{\mathrm{d}t^2} + R\frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t} + \frac{q}{C} = 0, \qquad q(0) = q_0, \qquad q'(0) = I_0 \tag{53}$$

tiende a cero de manera exponencial cuando $t \to \infty$. Entonces, las soluciones son soluciones transitorias. No habiendo fuente de energía exterior (generador) y existiendo "rozamiento eléctrico" (resistencia con calor de Joule) el sistema termina estabilizándose: El condensador se descarga y deja de pasar corriente. El régimen es siempre transitorio. Cuando hay oscilaciones existe transferencia de energía del campo eléctrico en el condensador al campo magnético en la bobina de inducción y viceversa.

Solución general del circuito RLC

Resolver el siguiente problema de valor inicial para la ecuación (41)

$$L\frac{\mathrm{d}^2q}{\mathrm{d}t^2} + R\frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t} + \frac{q}{C} = E(t), \qquad q(0) = q_0, \qquad q'(0) = I_0 \tag{54}$$

donde q_0 es la carga inicial en el capacitor e I_0 es la corriente inicial en el circuito. De la sección anterior, sabemos que para el caso $E(t) = 0$, todas las soluciones de (54) son transitorias.

Por otro lado, si suponemos que $E(t) \neq 0$, entonces, la solución general de (54) tendrá la forma

$$q(t) = q_h(t) + q_p(t) \tag{55}$$

donde $q_h(t)$ es la solución de la ecuación homogénea $(E(t) = 0)$, y tiende de manera exponencial a cero cuando $t \to \infty$, cualesquiera que sean las condiciones iniciales. $q_p(t)$ depende sólo de $E(t)$ y es independiente de las condiciones iniciales. A la solución $q_p(t)$ se le conoce como carga del estado permanente sobre el capacitor del circuito RLC.

Derivamos respecto al tiempo la expresión (55), obtenemos

$$\frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}q_h}{\mathrm{d}t} + \frac{\mathrm{d}q_p}{\mathrm{d}t} \tag{56}$$

Recordando que $I = \mathrm{d}q/\mathrm{d}t$, podemos escribir esta expresión de la siguiente manera:

$$I(t) = I_h(t) + I_p(t) \tag{57}$$

Entonces

$$I_h(t) = \frac{\mathrm{d}q_h}{\mathrm{d}t} \qquad \text{y} \qquad I_p(t) = \frac{\mathrm{d}q_p}{\mathrm{d}t} \tag{58}$$

decimos que $I_h(t)$ es la corriente transitoria e $I_p(t)$ es la corriente del estado permanente. En la mayoría de las aplicaciones sólo nos interesamos por la carga y corriente del estado permanente, es decir, nos interesa el comportamiento del sistema a largo plazo.

Ejemplo 1:

Determinar el periodo y la frecuencia de un movimiento armónico simple de un objeto de masa $m = 4\ kg$ colocado al extremo de un resorte cuya constante es $k = 16\ N/m$.

Solución:

La ecuación del movimiento armónico simple está dada por

$$\frac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t^2} + \omega_0^2 x = 0 \tag{59}$$

Donde

$$\omega_0^2 = \frac{k}{m} \tag{60}$$

y el periodo de las oscilaciones es

$$T = \frac{2\pi}{\omega_0} \tag{61}$$

Sustituyendo (60) en (61) tenemos

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}} \tag{62}$$

La solución general del movimiento armónico simple está dado por la expresión

$$x(t) = c_1 \cos \omega_0 t + c_2 \sin \omega_0 t \tag{63}$$

Sustituyendo el valor de la frecuencia (60) en (63), tenemos que la solución general para el problema dado, es

$$x(t) = c_1 \cos \sqrt{\frac{k}{m}} t + c_2 \sin \sqrt{\frac{k}{m}} t \tag{64}$$

Ejemplo 2:

Hallar la corriente de estado permanente de un circuito RLC si la fuerza electromotriz proporcionada por un generador de corriente alterna es $E(t) = E_0 \cos \omega t$

Solución:

Primero vamos a calcular la carga $q(t)$ del estado permanente en el capacitor como una solución particular de la ecuación

$$L\frac{\mathrm{d}^2 q}{\mathrm{d}t^2} + R\frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t} + \frac{q}{C} = E_0 \cos \omega t \tag{65}$$

Como nada más nos interesa el estado permanente, entonces, buscamos una solución particular de la ecuación (65) de la siguiente manera:

$$q_p(t) = A\cos\omega t + B\sin\omega t \tag{66}$$

donde las constantes A y B las debemos determinar, para esto sustituimos en (65) y resulta el sistema de ecuaciones

$$\begin{aligned} -A\omega^2 L + RB\omega + \frac{A}{C} &= E_0 \\ -B\omega^2 L - RA\omega + \frac{B}{C} &= 0 \end{aligned} \tag{67}$$

Resolviendo el sistema para A y B, obtenemos el siguiente resultado:

$$A = \frac{E_0(\frac{1}{C} - L\omega^2)}{(\frac{1}{C} - L\omega^2) + R^2\omega^2}, \quad B = \frac{E_0 R\omega}{(\frac{1}{C} - L\omega^2) + R^2\omega^2} \tag{68}$$

Sustituyendo en (66) obtenemos la expresión que nos da el comportamiento permanente del sistema.