Sesión 16. Introducción a la Transformada de Laplace (TL)

Dr. J. Juan Rosales García
Departamento de Ingeniería Eléctrica, DICIS-UGTO.

Competencias:

- Conoce la definición de la Transformada de Laplace y sus propiedades.
- Calcula la TL de funciones partiendo de la definición de TL.

Contenido de la Sesión 16:

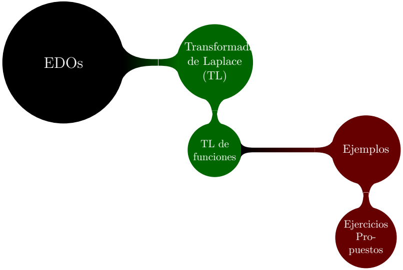
Dr. J. Juan Rosales García
Departamento de Ingeniería Eléctrica,
DICIS-UGTO.

- Introducción a la TL.
- Propiedades de la TL.
- TL de algunas funciones sencillas.

Mapa Mental

Sesión 16. Introducción a la Transformada de Laplace (TL)

Dr. J. Juan Rosales García
Departamento de Ingeniería Eléctrica, DICIS-UGTO.



Transformada de Laplace

Hasta el momento hemos aprendido a resolver ecuaciones diferenciales de primer orden y de orden superior, tanto lineales homogéneas como lineales no homogéneas con coeficientes constantes, y un tipo muy especial de ecuaciones con coeficientes variables llamadas ecuaciones de Cauchy-Euler. En todos estos casos suponíamos que la parte derecha (no homogénea) de la ecuación era una función continua. Sin embargo, en las aplicaciones reales de la ingeniería, la función (no homogénea) casi siempre es continua por partes y en ocasiones es un pulso de muy corta duración, esto trae complicaciones para los métodos estudiados anteriormente.

Dr. J. Juan Rosales García
Departamento de Ingeniería Eléctrica, DICIS-UGTO.

Para estos problemas existe el método conocido como método de Laplace, más comúnmente llamado Transformada de Laplace.
El método de la transformada de Laplace es un método operativo que aporta muchas ventajas cuando se usa para resolver ecuaciones diferenciales lineales. Mediante el uso de la transformada de Laplace es posible convertir muchas funciones comunes, tales como las senoidales, las senoidales amortiguadas y las exponenciales en funciones algebraicas $Y(s)$ de una variable s que, en general, es compleja. Las operaciones tales como la diferenciación y la integración se sustituyen mediante operaciones algebraicas en el plano complejo o real.

Si se resuelve la ecuación algebraica en s, la solución de la ecuación diferencial se encuentra mediante una tabla de transformadas inversas de Laplace, si esto es posible, o se aplica la técnica de expansión en fracciones parciales y luego se halla la transformada inversa, la cual será la solución de la ecuación diferencial.

Sin embargo, la transformada de Laplace es aplicable sólo a ecuaciones diferenciales lineales, y aún cuando reemplazan el cálculo por el álgebra, las operaciones algebraicas pueden resultar muy complicadas.

Dr. J. Juan Rosales García
Departamento de Ingeniería Eléctrica,
DICIS-UGTO.

En las aplicaciones, las funciones discontinuas surgen de manera natural. Por ejemplo, el encendido y apagado de un interruptor son fenómenos discontinuos. Las ecuaciones diferenciales que contienen funciones discontinuas son difíciles de tratar analíticamente usando los métodos antes vistos, pero la transformada de Laplace puede facilitar el tratamiento de esas discontinuidades. Otra de las ventajas del método de Laplace es que automáticamente incluye las condiciones iniciales.

En este capítulo estudiaremos la transformada de Laplace como una herramienta para resolver ecuaciones diferenciales. A continuación daremos algunos conceptos básicos de la transformada de Laplace y la aplicaremos a algunas funciones bien conocidas, las cuales, posteriormente, serán de gran utilidad.

Conceptos básicos de la transformada de Laplace

Sea $f(t)$ una función definida para todo $t \geq 0$. Entonces, la integral impropia definida como

$$\boxed{\mathcal{L}[f(t)] = \int_0^\infty e^{-st} f(t)\mathrm{d}t \equiv F(s)} \tag{1}$$

donde $s = \sigma + j\omega$, se llama *transformada de Laplace* de $f(t)$, con la condición de que la integral (1) exista, es decir, que la integral converja.

Una integral impropia sobre un intervalo infinito se define como un límite de integrales sobre intervalos finitos, es decir

$$\int_0^\infty f(t)\mathrm{d}t = \lim_{b\to\infty}\int_0^b f(t)\mathrm{d}t$$

Si el límite existe, decimos que *la integral converge*, en caso contrario, se dice que la *integral diverge* o no existe. La integral (1) contiene la variable de integración t y el parámetro s, que en general es complejo, es decir, tiene la forma $s = \sigma + j\omega$, donde a σ se le conoce como *frecuencia neper* con unidades $\mathrm{neper/s}$ y a ω como la *frecuencia real* medida en radianes sobre segundo $\mathrm{rad/s}$, en este caso, la integral (1) se define en un intervalo $(-\infty, \infty)$.

En consecuencia, cuando la integral (1) converge, no lo hace sólo en un número, sino en una función $F(s)$. Por consiguiente, la integral impropia (1) suele convergir para algunos valores de s y divergir para otros. Por lo anterior, es importante indicar el dominio de la transformada de Laplace, el cual tiene la forma Re $s > \sigma_0$ que representa la parte real de s, para un cierto número σ_0. En las aplicaciones a la ingeniería, la variable t representa el dominio del tiempo y s el dominio de la frecuencia.

De manera más formal y desde un punto de vista estrictamente matemático, decimos que la transformada de Laplace define una operación que convierte una función $f(t)$ a una nueva función transformada $F(s)$, y usamos la letra $\mathcal{L}$ para representarla. En otras palabras, escribimos $F(s) = \mathcal{L}[f(t)]$.

Observe que la transformada de Laplace (1) está definida como una integral sobre el intervalo $0 \leq t < \infty$ (y no sobre el eje real entero $-\infty < t < \infty$). Es necesario usar este intervalo ya que, para $\mathrm{Re}\, s > 0$, $e^{-st} \to \infty$, cuando $t \to \infty$. Si evaluamos la transformada de Laplace sobre todo el eje real, entonces las restricciones sobre la función $f(t)$ serían mucho más estrictas. Por otro lado, en la mayoría de las aplicaciones nos interesa el comportamiento futuro ($t \geq 0$), así que tomamos el intervalo $0 \leq t < \infty$.

En la literatura se utiliza una letra minúscula para representar la función que se transforma y la correspondiente letra mayúscula para representar la función transformada. Por ejemplo, la transformada de Laplace de las funciones $f(t)$, $g(t)$ y $y(t)$ se representan como:

$$\mathcal{L}[f(t)] = F(s), \qquad \mathcal{L}[g(t)] = G(s), \qquad \mathcal{L}[y(t)] = Y(s) \tag{2}$$

La transformada de Laplace es una transformada lineal, es decir, para una suma de funciones $\alpha f(t) + \beta g(t)$, la transformada de Laplace es

$$\begin{aligned} \int_0^\infty e^{-st}[\alpha f(t) + \beta g(t)]\mathrm{d}t &= \alpha \int_0^\infty e^{-st} f(t)\mathrm{d}t + \\ &+ \beta \int_0^\infty e^{-st} g(t)\mathrm{d}t = \\ &= \alpha F(s) + \beta G(s) \qquad (3) \end{aligned}$$

donde α y β son ciertas constantes arbitrarias.

La expresión (3) la podemos escribir como

$$\begin{aligned}\mathcal{L}[\alpha f(t)+\beta g(t)] &= \alpha\mathcal{L}[f(t)]+\beta\mathcal{L}[g(t)] = \\ &= \alpha F(s)+\beta G(s) \qquad (4)\end{aligned}$$

Debido a esta propiedad se dice que la transformada de Laplace es una *transformada lineal* o un *operador lineal* que transforma la función $f(t)$ en la función $F(s)$. A la función $f(t)$ se le conoce también como *función objeto*, y a su correspondiente transformada $F(s)$ como su *imagen*.

Es obvio que, por definición de la transformada de Laplace, no para toda función existe su correspondiente transformada de Laplace. Sin embargo, existe una clase amplia de funciones para las cuales la transformada de Laplace existe. Esto se debe al hecho de que la exponencial e^{-st} en la integral (1) actúa como función de "amortiguamiento". A continuación daremos las condiciones que debe cumplir la función $f(t)$ para que exista su transformada de Laplace.

Las condiciones suficientes que garantizan la existencia de la transformada de Laplace son:

- Que la función $f(t)$ sea una función continua por partes (seccionalmente continua) en $[0, \infty)$
- Que la función $f(t)$ sea una función de orden exponencial para $t > t_0$

Una función $f(t)$ es continua por partes en $[0, \infty)$, si en cualquier intervalo $0 \leq a < t < b$ existen a lo más un número finito de puntos t_k en que $k = 1, 2, \ldots, n$ y $t_{n-k} < t_k$ en los cuales $f(t)$ tiene discontinuidades finitas y es continua en cada intervalo abierto $t_{n-k} < t < t_k$.

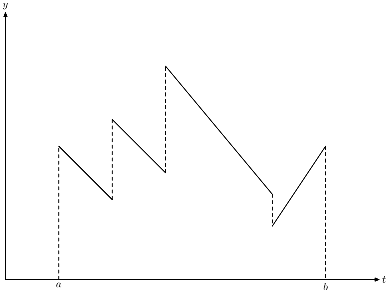


Figure: Función continua por partes.

Se dice que una función $f(t)$ es de *orden exponencial* si existen ciertos números $M > 0$ y $\sigma_0 \geq 0$ tales que se cumpla la relación

$$|f(t)| < Me^{\sigma_0 t}, \qquad \text{para} \quad \text{todo} \quad t. \tag{5}$$

Al número σ_0 se le llama *exponente de crecimiento*. Esto quiere decir, que al aumentar t, el crecimiento del módulo de la función $f(t)$ no es superior al de alguna función exponencial. La condición (5) garantiza la existencia de la integral (1).

Dr. J. Juan Rosales García Departamento de Ingeniería Eléctrica, DICIS-UGTO.

Las funciones $f_1(t) = t$, $f_2(t) = e^{-t}$ y $f_3(t) = 4\cos t$ son todas de orden exponencial, ya que cumplen las relaciones

$$|t| \leq e^t, \qquad |e^{-t}| \leq e^t, \qquad |4\cos t| \leq 4e^t \tag{6}$$

La función $f(t) = e^{t^3}$ no es de orden exponencial, pues ésta crece más rápido que cualquier potencia lineal positiva de c para $t > c > 0$. Las condiciones anteriores se resumen en el siguiente teorema.

Theorem

Si $f(t)$ es una función continua por partes para $t \geq 0$, y de orden exponencial, entonces la transformada de Laplace $\mathcal{L}[f(t)]$ de $f(t)$ existe para $\text{Re}\, s > \sigma_0$.

$\triangle$ Debido a que $f(t)$ es continua por partes, la expresión $e^{-st}f(t)$ será integrable sobre cualquier intervalo finito del eje t. En el cálculo de integrales impropias existe un teorema, el cual afirma que la convergencia absoluta implica la convergencia.

Entonces, es suficiente probar que la integral $\int_0^\infty |e^{-st} f(t)| \mathrm{d}t$ existe para Re $s > \sigma_0$. Para esto, basta a su vez con probar que el valor de la integral $\int_0^b |e^{-st} f(t)| \mathrm{d}t$ permanece acotado cuando $b \to \infty$. Luego, la desigualdad (5) implica que

$$
\begin{aligned}
\int_0^b |e^{-st} f(t)| \mathrm{d}t &< \int_0^b |e^{-st} M e^{\sigma_0 t}| \mathrm{d}t = \\
= \quad & M \int_0^b |e^{-(s-\sigma_0)t}| \mathrm{d}t < M \int_0^\infty |e^{-(s-\sigma_0)t}| \mathrm{d}t = \\
= \quad & \frac{M}{|s-\sigma_0|} \qquad (7)
\end{aligned}
$$

en donde fue necesaria la condición Re $s > \sigma_0$ para la existencia de la última integral. $\triangle$

Transformada de algunas funciones elementales: Ejemplo 1:

Sea la función

$$f(t) = A, \quad \forall t \geq 0 \tag{8}$$

donde A es cierta constante arbitraria. Calcular su transformada de Laplace.

Solución: Por definición, la TL es

$$\mathcal{L}[A] = \int_0^\infty Ae^{-st}\mathrm{d}t = A\int_0^\infty e^{-st}\mathrm{d}t =$$

$$= -\frac{Ae^{-st}}{s}\Big|_0^\infty = \frac{A}{s}e^{-st}\Big|_\infty^0 = \frac{A}{s} - A\lim_{t\to\infty}\frac{1}{s}e^{-st} \tag{9}$$

Si $\mathrm{Re}\, s > 0$, el exponente $-st$ tiende a $-\infty$, cuando $t \to \infty$, y como consecuencia, $e^{-st} \to 0$.

Por lo tanto, el último término de (9) se hace cero. Si Re $s < 0$, entonces el último término de (9) tiende al infinito y como consecuencia la integral diverge. Por último, si Re $s = 0$, entonces la integral $\int_0^\infty dt \to \infty$. Como conclusión, tenemos que la integral (9) existe solamente cuando Re $s > 0$, y el resultado es

$$\mathcal{L}[A] = \frac{A}{s}, \quad \text{Re } s > 0 \tag{10}$$

Ejemplo 2:

Sea la función

$$f(t) = t, \quad \forall t > 0 \tag{11}$$

Calcular su transformada de Laplace.

Solución: Para $f(t) = t$, tenemos

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}[t] &= \int_0^\infty t e^{-st}\mathrm{d}t \to \Big\{ u = t,\ \mathrm{d}u = \mathrm{d}t,\ \mathrm{d}v = e^{-st}\mathrm{d}t, \\
v &= -\frac{1}{s}e^{-st}\Big\} = -\frac{t}{s}e^{-st}\Big|_0^\infty + \\
&+ \frac{1}{s}\int_0^\infty e^{-st}\mathrm{d}t = -\frac{e^{-st}}{s^2}\Big|_0^\infty = \frac{1}{s^2}, \quad \mathrm{Re}\, s > 0 \quad (12)
\end{aligned}$$

Ejemplo 3:

Calcular la transformada de Laplace de la función

$$f(t) = t^2 \tag{13}$$

Solución:

Para $f(t) = t^2$, tenemos

$$\begin{aligned} \mathcal{L}[t^2] &= \int_0^{\infty} t^2 e^{-st} \mathrm{d}t \rightarrow \Big\{ u = t^2,\ \mathrm{d}u = 2t\mathrm{d}t, \\ \mathrm{d}v &= e^{-st}\mathrm{d}t,\ \ v = -\frac{1}{s}e^{-st} \Big\} \\ &= -\frac{t^2}{s}e^{-st}\Big|_0^{\infty} + \frac{2}{s}\int_0^{\infty} te^{-st}\mathrm{d}t = \frac{2}{s}\int_0^{\infty} te^{-st}\mathrm{d}t \end{aligned} \tag{14}$$

Usando el resultado anterior $\int_0^\infty te^{-st}dt = 1/s^2$, tenemos

$$\mathcal{L}[t^2] = \frac{2}{s^3}, \quad \text{Re } s > 0. \tag{15}$$

Ejemplo 4:

Hallar la transformada de Laplace de la función

$$f(t) = t^3 \tag{16}$$

Solución: Para $f(t) = t^3$, tenemos

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}[t^3] &= \int_0^\infty t^3 e^{-st}\mathrm{d}t \to \Big\{ u = t^3,\, \mathrm{d}u = 3t^2\mathrm{d}t, \\
\mathrm{d}v &= e^{-st}\mathrm{d}t,\; v = -\frac{1}{s}e^{-st} \Big\} \\
&= -\frac{t^3}{s}e^{-st}\Big|_0^\infty + \frac{3}{s}\int_0^\infty t^2 e^{-st}\mathrm{d}t = \frac{2\cdot 3}{s^4},\; \mathrm{Re}\ s > 0
\end{aligned} \tag{17}$$

donde hemos usado el resultado anterior, es decir, la $\mathcal{L}[t^2] = 2/s^3$.

Ejemplo 5:

Dr. J. Juan Rosales García Departamento de Ingeniería Eléctrica, DICIS-UGTO.

Calcular la transformada de Laplace de la función

$$f(t) = t^n \tag{18}$$

Solución: Sustituyendo la función (18) en la definición (1), obtenemos

$$\begin{aligned}\mathcal{L}[t^n] &= \int_0^\infty t^n e^{-st}\mathrm{d}t \to \Big\{u = t^n,\ \mathrm{d}u = nt^{n-1}\mathrm{d}t,\ \mathrm{d}v = e \\ &= -\frac{t^n}{s}e^{-st}\Big|_0^\infty + \frac{n}{s}\int_0^\infty t^{n-1}e^{-st}\mathrm{d}t\end{aligned}$$

para $s > 0$ y $n > 0$ el primer término de la derecha en (19) es igual a cero, y tenemos solamente

$$\int_0^\infty t^n e^{-st}dt = \frac{n}{s}\int_0^\infty t^{n-1}e^{-st}dt, \quad \mathrm{Re}\ s > 0 \tag{20}$$

Podemos observar que el término de la izquierda de (20) es $\mathcal{L}[t^n]$ y el término de la derecha es $\mathcal{L}[t^{n-1}]$, es decir, la expresión (20) es equivalente a

$$\mathcal{L}[t^n] = \frac{n}{s}\mathcal{L}[t^{n-1}], \quad \text{Re } s > 0, \quad n > 0 \qquad (21)$$

De esta expresión podemos ver que para $n > 1$, tenemos

$$\mathcal{L}[t^{n-1}] = \frac{n-1}{s}\mathcal{L}[t^{n-2}] \qquad (22)$$

Para $n > 2$ tenemos

$$\mathcal{L}[t^{n-2}] = \frac{n-2}{s}\mathcal{L}[t^{n-3}], \quad n > 2. \qquad (23)$$

Sustituyendo las expresiones (23) en (22) y a su vez en (21), tenemos

$$\mathcal{L}[t^n] = \frac{n(n-1)(n-2)}{s^3}\mathcal{L}[t^{n-3}] \tag{24}$$

Repitiendo este mismo proceso, tendremos

$$\mathcal{L}[t^n] = \frac{n(n-1)(n-2)\cdot\cdots\cdot 2\cdot 1}{s^n}\mathcal{L}[t^0] = \frac{n(n-1)(n-2)\cdot}{s^n} \tag{25}$$

Finalmente, si $n \geq 0$, entonces

$$\mathcal{L}[t^n] = \frac{n!}{s^{n+1}}, \quad \text{Re } s > 0 \tag{26}$$

Ejemplo 6:

Calcular la transformada de Laplace de la función

$$f(t) = t^{1/2}. \tag{27}$$

Solución:

Tenemos

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}[t^{1/2}] &= \int_0^\infty t^{1/2} e^{-st} \mathrm{d}t \to \left\{x = st,\ t = \frac{x}{s},\ \mathrm{d}t = \frac{1}{s}\mathrm{d}x\right\} \\
&= \int_0^\infty \left(\frac{x}{s}\right)^{1/2} \frac{e^{-x}}{s} \mathrm{d}x = \frac{1}{s^{3/2}} \int_0^\infty x^{1/2} e^{-x} \mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{s^{3/2}} \Gamma\left(\frac{3}{2}\right)
\end{aligned}$$

donde $\Gamma(\frac{3}{2})$ es la función Gamma o función de Euler, definida como $\Gamma(p) = \int_0^\infty x^{p-1} e^{-x} \mathrm{d}x$, donde p es un número cualquiera.

Para obtener el valor de p igualamos $p-1=1/2$, de donde $p=3/2$. Vamos a utilizar la fórmula $\Gamma(\frac{1}{2})=\sqrt{\pi}$, después usando la fórmula general $\Gamma(m+\frac{1}{2})=\frac{(2m)!}{m!2^{2m}}\Gamma(\frac{1}{2})=\frac{(2m)!}{m!2^{2m}}\sqrt{\pi}$, para calcular $\Gamma(\frac{3}{2})$, resulta

$$\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)=\Gamma\left(1+\frac{1}{2}\right)=\frac{2!}{2^2}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{2}\sqrt{\pi} \tag{29}$$

Dr. J. Juan Rosales García Departamento de Ingeniería Eléctrica, DICIS-UGTO.

Sustituyendo en (28) el resultado obtenido, finalmente tenemos

$$\mathcal{L}[t^{1/2}] = \frac{\sqrt{\pi}}{2s^{3/2}}, \qquad \text{Re } s > 0 \tag{30}$$

De igual manera se puede hallar la transformada de Laplace de la función $f(t) = t^{-1/2}$, esto se deja como ejercicio al lector.

Ejemplo 7:

Calcular la transformada de Laplace de la función

$$f(t) = t^{\alpha}, \quad \alpha > -1 \tag{31}$$

Solución: Por definición de la transformada de Laplace, tenemos

$$\begin{aligned} \mathcal{L}[t^{\alpha}] &= \int_0^{\infty} t^{\alpha} e^{-st} \mathrm{d}t \rightarrow \left\{ x = st,\ t = \frac{x}{s},\ \mathrm{d}t = \frac{1}{s}\mathrm{d}x, \right\} = \\ &= \int_0^{\infty} \left(\frac{x}{s}\right)^{\alpha} \left(\frac{e^{-x}}{s}\right) \mathrm{d}x = \frac{1}{s^{\alpha+1}} \int_0^{\infty} x^{\alpha} e^{-x} \mathrm{d}x \quad (3 \end{aligned}$$

Comparando la integral con la definición de la función Gamma, tenemos que $p - 1 = \alpha$, o bien $p = \alpha + 1$, entonces, tenemos

$$\int_0^{\infty} x^{\alpha} e^{-x} dx = \Gamma(\alpha + 1) \tag{33}$$

Dr. J. Juan Rosales García
Departamento de Ingeniería Eléctrica, DICIS-UGTO.

Sustituyendo la expresión (33) en (32), tenemos

$$\mathcal{L}[t^{\alpha}] = \frac{\Gamma(\alpha+1)}{s^{\alpha+1}}, \quad \alpha > -1, \quad \mathrm{Re}\, s > 0 \tag{34}$$

Ejemplo 8:

Dr. J. Juan Rosales García Departamento de Ingeniería Eléctrica, DICIS-UGTO.

Calcular la transformada de Laplace de la función

$$f(t) = e^{at} \tag{35}$$

donde a es una constante arbitraria.
Solución: Sustituyendo la función (35) en la definición (1), obtenemos

$$\mathcal{L}[e^{at}] = \int_0^\infty e^{at} e^{-st} \mathrm{d}t = \int_0^\infty e^{-(s-a)t} \mathrm{d}t \tag{36}$$

para Re $s \leq a$ el exponente de e en la integral es positivo ó igual a cero, y entonces la integral es divergente.

Dr. J. Juan
Rosales García
Departamento de
Ingeniería
Eléctrica,
DICIS-UGTO.

Para Re $s > a$, el exponente e de la integral es negativo y la integral es convergente, por lo tanto, para Re $s > a$ la transformada de Laplace existe, y se puede obtener integrando la expresión

$$\begin{aligned} \mathcal{L}[e^{at}] &= \int_0^\infty e^{-(s-a)t}\mathrm{d}t = -\frac{e^{-(s-a)t}}{s-a}\bigg|_0^\infty = \frac{1}{s-a} \\ \mathrm{Re} s &> a \end{aligned} \tag{37}$$

Ejemplo 9:

Dr. J. Juan Rosales García Departamento de Ingeniería Eléctrica, DICIS-UGTO.

Calcular las transformadas de Laplace de las funciones hiperbólicas $\sinh(\omega t)$ y $\cosh(\omega t)$, donde ω es una constante arbitraria.

Solución:

Hagamos uso de las fórmulas

$$\sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}, \quad \cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2} \tag{38}$$

Entonces, la transformada de Laplace para la función $\sinh(\omega t)$ es

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}[\sinh(\omega t)] &= \mathcal{L}\left[\frac{e^{\omega t}-e^{-\omega t}}{2}\right] = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{s-\omega}-\frac{1}{s+\omega}\right) = \\
&= \left[\frac{(s+\omega)-(s-\omega)}{2(s-\omega)(s+\omega)}\right] = \frac{1}{2}\left(\frac{2\omega}{s^2-\omega^2}\right) = \\
&= \frac{\omega}{s^2-\omega^2} \qquad (39)
\end{aligned}$$

Para la función $\cosh(\omega t)$, tenemos

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}[\cosh(\omega t)] &= \mathcal{L}\left[\frac{e^{\omega t}+e^{-\omega t}}{2}\right] = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{s-\omega}+\frac{1}{s+\omega}\right) = \\
&= \left[\frac{(s+\omega)+(s-\omega)}{2(s-\omega)(s+\omega)}\right] = \frac{1}{2}\left(\frac{2s}{s^2-\omega^2}\right) = \\
&= \frac{s}{s^2-\omega^2},\ \text{Re}\ s > \omega \qquad (40)
\end{aligned}$$

Donde hemos aplicado el resultado obtenido en (37).

Ejemplo 10:

Dr. J. Juan Rosales García Departamento de Ingeniería Eléctrica, DICIS-UGTO.

Hallar la transformada de Laplace del producto de funciones

$$f(t) = e^{at}\cos(\omega t) \tag{41}$$

Solución: Aplicando la definición de transformada de Laplace, tenemos

$$\mathcal{L}[f(t)] = \int_0^{\infty} \cos(\omega t) e^{-(s-a)t} \mathrm{d}t$$

$$\left\{ du = -\omega \sin(\omega t)\mathrm{d}t,\ v = -\frac{1}{s-a} e^{-(s-a)t} \right\} =$$

Dr. J. Juan Rosales García
Departamento de Ingeniería Eléctrica, DICIS-UGTO.

$$
\begin{aligned}
&= -\frac{e^{-(s-a)t}}{s-a}\cos(\omega t)\Big|_0^\infty - \frac{\omega}{s-a}\int_0^\infty \sin(\omega t)e^{-(s-a)t}\mathrm{d}t \\
&= \frac{1}{s-a} - \frac{\omega}{s-a}\int_0^\infty \sin(\omega t)e^{-(s-a)t}\mathrm{d}t \qquad (42)
\end{aligned}
$$

Dr. J. Juan Rosales García
Departamento de Ingeniería Eléctrica, DICIS-UGTO.

Evaluando la última integral de la expresión (42), por separado, se tiene

$$
\begin{aligned}
& \int_0^\infty \sin(\omega t) e^{-(s-a)t} \mathrm{d}t \\
\rightarrow \quad & \left\{ \mathrm{d}u = \omega \cos(\omega t) \mathrm{d}t,\ v = -\frac{1}{s-a} e^{-(s-a)t} \right\} \\
= \quad & -\frac{e^{-(s-a)t}}{s-a} \sin(\omega t) \Big|_0^\infty + \frac{\omega}{s-a} \int_0^\infty \cos(\omega t) e^{-(s-a)t} \mathrm{d}t \\
= \quad & \frac{\omega}{s-a} \int_0^\infty \cos(\omega t) e^{-(s-a)t} \mathrm{d}t \qquad (43)
\end{aligned}
$$

Sustituyendo este resultado en (42), tenemos

$$\int_0^\infty \cos(\omega t)e^{-(s-a)t}dt = \frac{1}{s-a} - \\ - \frac{\omega}{s-a}\frac{\omega}{s-a}\int_0^\infty \cos(\omega t)e^{-(s-a)t}dt \qquad (44)$$

Agrupando términos resulta

$$\int_0^\infty \cos(\omega t)e^{-(s-a)t}dt\left[1+\frac{\omega^2}{(s-a)^2}\right] = \frac{1}{s-a} \qquad (45)$$

Finalmente, el resultado es

$$\mathcal{L}[e^{at}\cos(\omega t)] = \int_0^\infty \cos(\omega t) e^{-(s-a)t} dt = \frac{s-a}{(s-a)^2+\omega^2}, \tag{46}$$

Ejemplo 11:

Hallar la transformada de Laplace de la función exponencial compleja

$$f(t) = e^{j\omega t} \tag{47}$$

Solución: Tenemos

$$\begin{aligned} \mathcal{L}[e^{j\omega t}] &= \int_0^\infty e^{j\omega t} e^{-st} \mathrm{d}t = \int_0^\infty e^{-(s-j\omega)t} \mathrm{d}t = \\ &- \frac{1}{s-j\omega} e^{-(s-j\omega)t} = \frac{1}{s-j\omega} \end{aligned} \tag{48}$$

Observamos que el resultado $\frac{1}{s-j\omega}$ lo podemos escribir como $\frac{s+j\omega}{(s-j\omega)(s+j\omega)} = \frac{s}{s^2+\omega^2} + j\frac{\omega}{s^2+\omega^2}$. De donde podemos identificar que la parte real e imaginaria son las transformadas de las funciones $\cos(\omega t)$ y $\sin(\omega t)$. Es decir, $\mathcal{L}[\cos(\omega t)] = \frac{s}{s^2+\omega^2}$, y $\mathcal{L}[\sin(\omega t)] = \frac{\omega}{s^2+\omega^2}$. Esto es obvio, ya que la función exponencial se puede escribir como: $e^{j\omega t} = \cos(\omega t) + j\sin(\omega t)$

Ejemplo 12:

Dr. J. Juan Rosales García
Departamento de Ingeniería Eléctrica, DICIS-UGTO.

Obtener la transformada de Laplace de la función

$$f(t) = \cos^2(\omega t), \qquad \omega \quad \text{constante} \tag{49}$$

Solución: Usando $\cos^2(\omega t) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos 2\omega t$.

$$\begin{aligned} \mathcal{L}[f(t)] &= \mathcal{L}\left[\frac{1}{2}\right] + \frac{1}{2}\mathcal{L}\Big[\cos(2\omega t)\Big] = \frac{1}{2s} + \frac{s}{2(s^2+4\omega^2)} = \\ &= \frac{s^2+2\omega^2}{s(s^2+4\omega^2)}, \ \text{Re } s > 0 \end{aligned} \tag{50}$$

Ejemplo 13:

Dr. J. Juan Rosales García Departamento de Ingeniería Eléctrica, DICIS-UGTO.

Sea la función continua por partes

$$f(t) = \begin{cases} t & \text{para } 0 \leq \text{t} < 3, \\ 2 & \text{para t} \geq 3 \end{cases} \tag{51}$$

Calcular su transformada de Laplace.

Solución:

Dr. J. Juan Rosales García Departamento de Ingeniería Eléctrica, DICIS-UGTO.

Debido a que la función está definida por partes, la transformada de Laplace se calcula en dos partes, esto es por la propiedad de linealidad de la transformada de Laplace. Tenemos

$$\begin{aligned} \mathcal{L}[f(t)] &= \int_0^\infty f(t)e^{-st}\mathrm{d}t = \int_0^3 f(t)e^{-st}\mathrm{d}t + \\ &+ \int_3^\infty f(t)e^{-st}\mathrm{d}t = \int_0^3 te^{-st}\mathrm{d}t + \int_3^\infty 2e^{-st}\mathrm{d}t \end{aligned} \tag{52}$$

Evaluamos cada una de las integrales por separado, tenemos

$$
\begin{aligned}
\int_0^3 te^{-st}\mathrm{d}t &\rightarrow \left\{\mathrm{d}u = \mathrm{d}t,\; v = -\frac{1}{s}e^{-st}\right\} \\
&= -\frac{t}{s}e^{-st}\Big|_0^3 + \frac{1}{s}\int_0^3 e^{-st}\mathrm{d}t = -\frac{3}{s}e^{-3s} - \\
&- \frac{1}{s^2}e^{-st}\Big|_0^3 = -\frac{3}{s}e^{-3s} - \frac{1}{s^2}e^{-3s} + \\
&+ \frac{1}{s^2} \qquad (53)
\end{aligned}
$$

Para la segunda integral de (53), tenemos

$$2\int_{3}^{\infty} e^{-st}\mathrm{d}t = -\frac{2}{s}e^{-st}\Big|_{3}^{\infty} = \frac{2}{s}e^{-3s} \tag{54}$$

Sumando los resultados y agrupando términos, finalmente tenemos

$$\begin{aligned} \mathcal{L}[f(t)] &= \int_{0}^{3} te^{-st}\mathrm{d}t + 2\int_{3}^{\infty} e^{-st}\mathrm{d}t = \qquad (55) \\ &= -\left(\frac{1}{s}+\frac{1}{s^2}\right)e^{-3s} + \frac{1}{s^2}, \qquad \mathrm{Re}\ s > 0 \end{aligned}$$

Ejemplo 14:

Hallar la transformada de Laplace de la siguiente función:

$$f(t) = \begin{cases} 2, & 0 \leq t < \pi \\ 0, & \pi \leq t < 2\pi \\ \sin t, & t \geq 2\pi \end{cases} \tag{56}$$

Solución: De la definición, tenemos

$$\begin{aligned} \mathcal{L}[f(t)] &= \int_0^{\pi} 2e^{-st}\mathrm{d}t + \int_{\pi}^{2\pi} 0e^{-st}\mathrm{d}t + \int_{2\pi}^{\infty} \sin te^{-st}\mathrm{d}t \\ &= \int_0^{\pi} 2e^{-st}\mathrm{d}t + \int_{2\pi}^{\infty} \sin te^{-st}\mathrm{d}t \end{aligned} \tag{57}$$

Hagamos por separado las integrales

$$2\int_0^{\pi} e^{-st}\mathrm{d}t = -\frac{2}{s}e^{-st}\Big|_0^{\pi} = -\frac{2}{s}e^{-\pi s} + \frac{2}{s} \tag{58}$$

$$
\begin{aligned}
& \int_{2\pi}^{\infty} \sin t e^{-st} \mathrm{d}t \\
\rightarrow & \left\{ \mathrm{d}u = \cos t \mathrm{d}t, \ \mathrm{d}v = e^{-st}\mathrm{d}t, \right\} = \\
= & -\frac{1}{s} \sin t e^{-st} \Big|_{2\pi}^{\infty} + \frac{1}{s} \int_{2\pi}^{\infty} \cos t e^{-st} \mathrm{d}t = \\
= & \frac{1}{s} \int_{2\pi}^{\infty} \cos t e^{-st} \mathrm{d}t \qquad (59) \\
\rightarrow & \left\{ \mathrm{d}u = -\sin t \mathrm{d}t, \ \mathrm{d}v = e^{-st}\mathrm{d}t, \right\} \\
= & -\frac{1}{s^2} e^{-st} \cos t \Big|_{2\pi}^{\infty} - \frac{1}{s^2} \int_{2\pi}^{\infty} \sin t e^{-st} \mathrm{d}t = \qquad (60)
\end{aligned}
$$

$$= \frac{e^{-2\pi s}}{s^2} - \frac{1}{s^2}\int_{2\pi}^{\infty} \sin t e^{-st}\mathrm{d}t$$

Como resultado de la integración se tiene

$$\int_{2\pi}^{\infty} \sin t e^{-st}\mathrm{d}t = \frac{1}{s^2}e^{-2\pi s} - \frac{1}{s^2}\int_{2\pi}^{\infty} \sin t e^{-st}\mathrm{d}t \quad (61)$$

Luego, agrupando términos, obtenemos

$$\int_{2\pi}^{\infty} \sin t e^{-st}\mathrm{d}t \left(1 + \frac{1}{s^2}\right) = \frac{1}{s^2}e^{-2\pi s} \quad (62)$$

Entonces

$$\int_{2\pi}^{\infty} \sin t e^{-st} \mathrm{d}t = \frac{e^{-2\pi s}}{s^2+1} \tag{63}$$

Finalmente, poniendo los resultados (58) y (63) en (57) se obtiene la transformada de Laplace de la función (56). ésta es

$$\mathcal{L}[f(t)] = \frac{2}{s} - \frac{2}{s}e^{-\pi s} + \frac{1}{s^2+1}e^{-2\pi s}, \qquad \text{Re } s > 0 \tag{64}$$

Ejercicios Propuestos

1. $f(t) = (t+1)^3$
2. $f(t) = t^5$
3. $f(t) = t^2 e^{3t}$
4. $f(t) = t^2 + 6t - 3$
5. $f(t) = (e^t - e^{-t})^2$
6. $f(t) = (1 + e^{2t})^2$
7. $f(t) = t \cos t$
8. $f(t) = e^{-t} \sin t$