Sesión 17. TL de las Derivadas y de Funciones Discontinuas

Dr. J. Juan Rosales García
Departamento de Ingeniería Eléctrica, DICIS-UGTO.

Competencias:

- Conoce la TL de derivadas
- Conoce la Transformada inversa de Laplace y sus propiedades (TIL).
- Calcula TIL de algunas funciones
- Resuelve ED con ayuda de la TL.

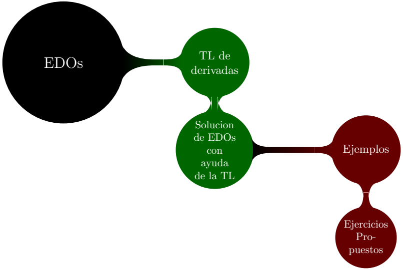
Contenido de la Sesión 17:

Dr. J. Juan Rosales García
Departamento de Ingeniería Eléctrica, DICIS-UGTO.

- TL de derivadas
- Primer teorema de desplazamiento.
- Transformada de Laplace Inversa (TIL).
- Solución de EDOS con la TL.

Mapa Mental

Dr. J. Juan Rosales García
Departamento de Ingeniería Eléctrica, DICIS-UGTO.



Primer teorema de desplazamiento

Si

$$\mathcal{L}[f(t)] = \int_0^\infty f(t)e^{-st}\mathrm{d}t \equiv F(s), \tag{1}$$

es la transformada de Laplace de $f(t)$ para Re $s > \sigma_0$, entonces

$$\boxed{\mathcal{L}[e^{at}f(t)] = F(s-a)} \tag{2}$$

es la transformada de Laplace de $e^{at}f(t)$ para Re $s > \sigma_0 + a$.

Dr. J. Juan Rosales García
Departamento de Ingeniería Eléctrica,
DICIS-UGTO.

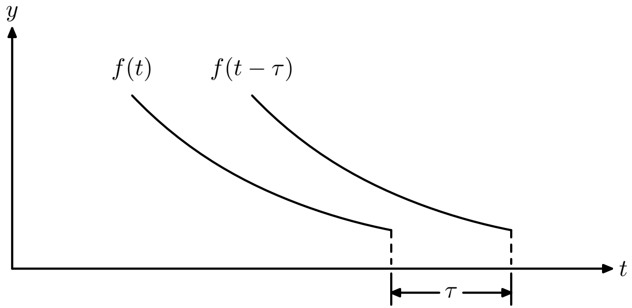


Figure: Función desplazada en el tiempo.

△ De las condiciones del teorema, la transformada de Laplace de la función $f(t)$ existe. Obtengamos la transformada de Laplace del producto $e^{at}f(t)$, es decir

$$\begin{aligned} \mathcal{L}[e^{at}f(t)] &= \int_0^\infty f(t)e^{at}e^{-st}\mathrm{d}t = \int_0^\infty f(t)e^{-(s-a)t}\mathrm{d}t = \\ &= \int_0^\infty f(t)e^{-\tilde{s}t}\mathrm{d}t \end{aligned} \tag{3}$$

donde $\tilde{s} = s - a$.

Por definición, la integral en la expresión (3) es $F(\tilde{s})$, es decir,

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} f(t)e^{-\tilde{s}t}\mathrm{d}t &= F(\tilde{s}) = F(s-a), \quad \tilde{s} > \sigma_0, \\ & \mathrm{Re}\ s > \sigma_0 + a \qquad \triangle \qquad (4) \end{aligned}$$

Este teorema es muy útil para calcular transformadas de Laplace.

Ejemplo 1:

Usar el primer teorema de desplazamiento para calcular la transformada de Laplace de

$$f(t) = e^{at}\cos\omega t \tag{5}$$

Solución:

Primero identificamos la función $f(t)$ como $f(t) = \cos\omega t$. Para esta función su transformada de Laplace es (ver ejemplo 10)

$$\mathcal{L}[\cos\omega t] = \frac{s}{s^2+\omega^2}, \qquad \text{Re } s > \omega \tag{6}$$

Entonces, por el primer teorema de desplazamiento, tenemos

$$\mathcal{L}[e^{at}\cos\omega t] = \frac{s-a}{(s-a)^2+\omega^2}, \qquad \text{Re } s > \omega \tag{7}$$

Ejemplo 2:

Dr. J. Juan Rosales García Departamento de Ingeniería Eléctrica, DICIS-UGTO.

Calcular la transformada de Laplace de la función

$$f(t) = e^{at} \sin \omega t \tag{8}$$

Solución: Sabemos que la transformada de Laplace de la función seno es

$$\mathcal{L}[\sin \omega t] = \frac{\omega}{s^2 + \omega^2} \tag{9}$$

Entonces por el primer teorema de desplazamiento, resulta

$$\mathcal{L}[e^{at} \sin \omega t] = \frac{\omega}{(s-a)^2 + \omega^2} \tag{10}$$

Ejemplo 3:

Dr. J. Juan Rosales García
Departamento de Ingeniería Eléctrica, DICIS-UGTO.

Hallar la transformada de Laplace de la función

$$f(t) = e^{at} t^{\alpha} \tag{11}$$

Solución: Tenemos

$$\mathcal{L}[t^{\alpha}] = \frac{\Gamma(\alpha+1)}{s^{\alpha+1}} \tag{12}$$

Entonces, usando el teorema 4.2.1, obtenemos

$$\mathcal{L}[e^{at} t^{\alpha}] = \frac{\Gamma(\alpha+1)}{(s-a)^{\alpha+1}}, \qquad \text{Re } s > a \tag{13}$$

Ejemplo 4:

Dr. J. Juan Rosales García Departamento de Ingeniería Eléctrica, DICIS-UGTO.

Hallar la transformada de Laplace de la función

$$f(t) = 2t^3 e^{-\frac{1}{2}t} \tag{14}$$

Solución: Sea

$$g(t) = t^3 \tag{15}$$

Entonces su transformada de Laplace, es

$$G(s) = \mathcal{L}[t^3] = \frac{3!}{s^{3+1}} = \frac{3!}{s^4} \tag{16}$$

Por el teorema 4.2.1, tenemos

$$F(s) = \mathcal{L}[f(t)] = \mathcal{L}\left[2t^3 e^{-\frac{1}{2}t}\right] = \frac{(2)(3!)}{(s+\frac{1}{2})^4} = \frac{12}{(s+\frac{1}{2})^4}, \tag{17}$$

Ejemplo 5:

Calcular la transformada de Laplace de la siguiente función:

$$f(t) = e^{-\alpha t}(A\cos\beta t + B\sin\beta t) \tag{18}$$

Solución: Escribamos la expresión (18) de la siguiente manera:

$$f(t) = e^{-\alpha t} g(t) \tag{19}$$

donde

$$g(t) = A\cos\beta t + B\sin\beta t \tag{20}$$

La transformada de Laplace de $g(t)$ es fácil de obtener si tomamos en cuenta las fórmulas

$$\begin{aligned} \mathcal{L}[\cos\beta t] &= \frac{s}{s^2+\beta^2}, \\ \mathcal{L}[\sin\beta t] &= \frac{\beta}{s^2+\beta^2} \end{aligned} \tag{21}$$

Entonces, la transformada de Laplace de $g(t)$, es

$$\begin{aligned} G(s) &= \mathcal{L}[g(t)] = A\mathcal{L}[\cos\beta t] + B\mathcal{L}[\sin\beta t] = \frac{As}{s^2+\beta^2} + \\ &+ \frac{B\beta}{s^2+\beta^2} \end{aligned} \tag{22}$$

Luego, según el teorema 4.4.2, tenemos

$$\begin{aligned} F(s) &= \mathcal{L}[f(t)] = \mathcal{L}\left[e^{-\alpha t}(A\cos\beta t + B\sin\beta t)\right] = \\ &= \frac{A(s+\alpha)+B\beta}{(s+\alpha)^2+\beta^2} \end{aligned} \tag{23}$$

Transformada Inversa de Laplace

Dr. J. Juan Rosales García Departamento de Ingeniería Eléctrica, DICIS-UGTO.

Para cumplir con el propósito de esta sesión, el cual es aplicar la transformada de Laplace en la búsqueda de soluciones de ecuaciones diferenciales con valores iniciales, debemos definir la transformada inversa de Laplace.

Si $F(s)$ es la transformada de Laplace de una función $f(t)$, entonces, la *transformada inversa de Laplace* se define como

$$\boxed{f(t) = \mathcal{L}^{-1}[F(s)] = \frac{1}{2\pi j} \int_{\sigma - j\infty}^{\sigma + j\infty} F(s) e^{st} \mathrm{d}s} \qquad (24)$$

La transformada inversa de Laplace nos permite hallar la función $f(t)$ si conocemos la función $F(s)$. Esta transformada es también lineal, es decir, cumple la condición de linealidad

$$\mathcal{L}^{-1}[\alpha F(s) + \beta G(s)] = \alpha \mathcal{L}^{-1}[F(s)] + \beta \mathcal{L}^{-1}[G(s)] \quad (25)$$

donde α y β son constantes arbitrarias.

Ejemplo 6:

Hallar la transformada inversa de Laplace de las funciones

$$
\begin{aligned}
a)\ F(s) &= \frac{A}{s}, \quad b)\ F(s) = \frac{s}{s^2-4}, \quad c)\ F(s) = \frac{1}{s^2+16}, \\
e)\ F(s) &= \left[\frac{1}{s^2-1} - \frac{4}{s^4}\right]
\end{aligned}
$$

donde A es una constante arbitraria.

Solución:

Según la definición de la transformada inversa de Laplace, debemos encontrar las funciones $f(t)$ tales que sus transformadas de Laplace sean las dadas en la expresión (26). Tenemos

$$a). \quad f(t) = \mathcal{L}^{-1}[F(s)] = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{A}{s}\right] \tag{27}$$

Si recordamos la TL de una constante, es fácil ver que la transformada inversa de (27), es

$$f(t) = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{A}{s}\right] = A \tag{28}$$

Concluimos, que la transformada inversa de Laplace de la función a) en (26) es $f(t) = A$.

$$\begin{aligned} b). \quad f(t) &= \mathcal{L}^{-1}[F(s)] = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{s}{s^2-4}\right] = \\ &= \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{s}{s^2-(2)^2}\right] = \cosh(2t) \end{aligned} \tag{29}$$

$$c). \quad f(t) = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s^2+16}\right] = \frac{1}{4}\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{4}{s^2+(4)^2}\right] = \\ = \frac{1}{4}\sin(4t) \qquad (30)$$

Aquí, hemos multiplicado por 4 y dividido entre 4, para poder usar la fórmula $\mathcal{L}[\sin(\omega t)] = \frac{\omega}{s^2+\omega^2}$, con $\omega = 4$.

$$d). \quad f(t) = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{4}{s^4}\right] = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{4}{s^{3+1}}\right] = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{4\cdot 3!}{3!s^{3+1}}\right] = \\ = \frac{4}{6}\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{3!}{s^{3+1}}\right] = \frac{2}{3}t^3 \qquad (31)$$

Dr. J. Juan Rosales García Departamento de Ingeniería Eléctrica, DICIS-UGTO.

$$
\begin{aligned}
e). \quad f(t) &= \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s^2-1} - \frac{4}{s^4}\right] = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s^2-1}\right] - \\
&- \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{4}{s^4}\right] = \sinh(t) - \frac{2}{3}t^3 \qquad (32)
\end{aligned}
$$

Tabla de Inversas de Laplace

Tabla de transformadas inversas

$\mathcal{L}^{-1}[F(s)]$	$f(t)$
$\mathcal{L}^{-1}[\frac{1}{s}]$	$f(t)=1$
$\mathcal{L}^{-1}[\frac{n!}{s^{n+1}}]$	$f(t)=t^n$
$\mathcal{L}^{-1}[\frac{1}{s-a}]$	$f(t)=e^{at}$
$\mathcal{L}^{-1}[\frac{\omega}{s^2+\omega^2}]$	$f(t)=\sin\omega t$
$\mathcal{L}^{-1}[\frac{s}{s^2+\omega^2}]$	$f(t)=\cos\omega t$
$\mathcal{L}^{-1}[\frac{\omega}{s^2-\omega^2}]$	$f(t)=\sinh\omega t$
$\mathcal{L}^{-1}[\frac{s}{s^2-\omega^2}]$	$f(t)=\cosh\omega t$
$\mathcal{L}^{-1}[\frac{s^2-\omega^2}{(s^2+\omega^2)^2}]$	$f(t)=t\cos\omega t$
$\mathcal{L}^{-1}[\frac{2\omega s^2}{(s^2+\omega^2)^2}]$	$f(t)=\sin\omega t+\omega t\cos\omega t$
$\mathcal{L}^{-1}[\frac{1}{(s-a)(s-b)}]$	$f(t)=\frac{e^{at}-e^{bt}}{a-b}$

Ejemplo 7:

Dr. J. Juan Rosales García
Departamento de Ingeniería Eléctrica, DICIS-UGTO.

Calcular la transformada inversa de Laplace de la función

$$F(s) = \frac{2s+4}{s^2+3} \tag{33}$$

Solución: A esta expresión la podemos representar como

$$\frac{2s+4}{s^2+3} = \frac{2s}{s^2+(\sqrt{3})^2} + \frac{4}{s^2+(\sqrt{3})^2} \tag{34}$$

Usando la tabla de las transformadas inversas

$$\begin{aligned} f(t) &= \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{2s+4}{s^2+3}\right] = 2\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{s}{s^2+(\sqrt{3})^2}\right] + \\ &+ \frac{4}{\sqrt{3}}\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{\sqrt{3}}{s^2+(\sqrt{3})^2}\right] = 2\cos(\sqrt{3}t) + \\ &+ \frac{4}{\sqrt{3}}\sin(\sqrt{3}t) \end{aligned} \tag{35}$$

Ejemplo 8:

Dr. J. Juan Rosales García
Departamento de Ingeniería Eléctrica, DICIS-UGTO.

Usando la transformada de Laplace resolver la siguiente ecuación diferencial:

$$y'' + 3y' + 2y = 0, \quad y(0) = a, \quad y'(0) = b \tag{36}$$

Solución: Aplicamos la transformada de Laplace

$$\mathcal{L}[y''] + 3\mathcal{L}[y'] + 2\mathcal{L}[y] = 0, \quad y(0) = a, \quad y'(0) = b \tag{37}$$

Usando las fórmulas de la transformada de Laplace para las derivadas

$$\left[s^2 Y(s) - sy(0) - y'(0)\right] + 3\left[sY(s) - y(0)\right] + 2Y(s) = 0 \tag{38}$$

donde $\mathcal{L}[y(t)] = Y(s)$, $\mathcal{L}[y'] = sY(s) - y(0)$ y $\mathcal{L}[y''] = s^2Y(s) - sy(0) - y'(0)$.
Sustituyendo las condiciones iniciales, resulta

$$s^2Y(s) - as - b + 3sY(s) - 3a + 2Y(s) = 0 \qquad (39)$$

Factorizando

$$\left[s^2 + 3s + 2\right] Y(s) = as + b + 3a \qquad (40)$$

Despejando, obtenemos

$$Y(s) = \frac{as + b + 3a}{s^2 + 3s + 2} = \frac{as + b + 3a}{(s + 1)(s + 2)} = \frac{A}{s + 1} + \frac{B}{s + 2} \qquad (41)$$

Por el método de Heaviside obtenemos las constantes A y B

$$A = \left.\frac{as + b + 3a}{s + 2}\right|_{s=-1} = \frac{-a + b + 3a}{-1 + 2} = 2a + b \qquad (42)$$

y

$$B = \left.\frac{as + b + 3a}{s + 1}\right|_{s=-2} = \frac{-2a + b + 3a}{(-1)} = -(a + b) \qquad (43)$$

Sustituyendo en (41), se tiene

$$Y(s) = \frac{2a + b}{s + 1} - \frac{a + b}{s + 2} \qquad (44)$$

Luego, calculamos la transformada inversa de Laplace

$$\begin{aligned} y(t) &= \mathcal{L}^{-1}[Y(s)] = (2a+b)\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s+1}\right] - \\ &- (a+b)\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s+2}\right] \\ &= (2a+b)e^{-t} - (a+b)e^{-2t} \end{aligned} \tag{45}$$

Entonces, la solución del problema de valor inicial (36) tiene la forma

$$y(t) = (2a+b)e^{-t} - (a+b)e^{-2t}, \quad \forall t \geq 0 \tag{46}$$

Ejemplo 9:

Usando la transformada de Laplace, resolver el problema de Cauchy

$$y'' + 2y' + 5y = 3, \qquad y(0) = 0, \quad y'(0) = 0 \tag{47}$$

Solución: Aplicamos la transformada de Laplace

$$\mathcal{L}[y''] + 2\mathcal{L}[y'] + 5\mathcal{L}[y] = 3, \qquad y(0) = 0, \quad y'(0) = 0 \tag{48}$$

Usando las fórmulas de la transformada de Laplace para las derivadas

$$s^2 Y(s) + 2sY(s) + 5Y(s) = \frac{3}{s} \tag{49}$$

Despejando $Y(s)$ y desarrollando en fracciones parciales, resulta

$$\begin{aligned} Y(s) &= \frac{3}{s(s^2+2s+5)} = \frac{3}{5}\frac{1}{s} - \frac{3}{5}\frac{s+2}{s^2+2s+5} = \\ &= \frac{3}{5}\frac{1}{s} - \frac{3}{10}\frac{2}{(s+1)^2+2^2} - \frac{3}{5}\frac{s+1}{(s+1)^2+2^2} \end{aligned} \tag{50}$$

Luego, calculamos la transformada inversa de Laplace

$$\begin{aligned} y(t) &= \mathcal{L}^{-1}[Y(s)] = \frac{3}{5}\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s}\right] - \\ &- \frac{3}{10}\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{2}{(s+1)^2+2^2}\right] - \\ &- \frac{3}{5}\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{s+1}{(s+1)^2+2^2}\right] \end{aligned} \tag{51}$$

La inversa es

$$y(t) = \frac{3}{5} - \frac{3}{10}e^{-t}\sin 2t - \frac{3}{5}e^{-t}\cos 2t, \qquad \forall t \geq 0 \tag{52}$$

Ejemplo 10:

Dr. J. Juan Rosales García Departamento de Ingeniería Eléctrica, DICIS-UGTO.

Resolver la siguiente ecuación diferencial usando la transformada de Laplace

$$y'' - 6y' + 5y = 3e^{2t}, \quad y(0) = 2, \quad y'(0) = 3 \tag{53}$$

Solución: Aplicando la transformada de Laplace

$$\mathcal{L}[y''] - 6\mathcal{L}[y'] + 5\mathcal{L}[y] = 3\mathcal{L}[e^{2t}] \tag{54}$$

Obtenemos

$$s^2Y(s) - 2s - 3 - 6sY(s) + 12 + 5Y(s) = \frac{3}{s-2} \tag{55}$$

Acomodando términos

$$Y(s)\left[s^2-6s+5\right]=\frac{3}{s-2}+2s-9 \tag{56}$$

Despejamos $Y(s)$ y obtenemos

$$\begin{aligned} Y(s) &= \frac{3}{(s-2)(s-1)(s-5)}+\frac{2s}{(s-1)(s-5)}- \\ &- \frac{9}{(s-1)(s-5)} \end{aligned} \tag{57}$$

Ahora calculemos la inversa de Laplace

$$\begin{aligned} y(t) &= \mathcal{L}^{-1}[Y(s)] = 3\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{(s-2)(s-1)(s-5)}\right] + \\ &+ 2\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{s}{(s-1)(s-5)}\right] - \\ &- 9\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{(s-1)(s-5)}\right] \end{aligned} \tag{58}$$

desarrollando en fracciones parciales el primer término de la expresión (58)

$$\frac{1}{(s-2)(s-1)(s-5)} = \frac{A}{s-2} + \frac{B}{s-1} + \frac{C}{s-5} \tag{59}$$

Tenemos

$$A = \left.\frac{1}{(s-1)(s-5)}\right|_{s\to 2} = \frac{1}{(1)(-3)} = -\frac{1}{3} \tag{60}$$

$$B = \left.\frac{1}{(s-2)(s-5)}\right|_{s\to 1} = \frac{1}{(-1)(-4)} = \frac{1}{4} \tag{61}$$

$$C = \left.\frac{1}{(s-2)(s-1)}\right|_{s\to 5} = \frac{1}{(3)(4)} = \frac{1}{12} \tag{62}$$

Sustituyendo en (59)

$$\frac{1}{(s-2)(s-1)(s-5)} = -\frac{1}{3(s-2)} + \frac{1}{4(s-1)} + \frac{1}{12(s-5)} \tag{63}$$

Calculando la transformada inversa de esta expresión

$$\begin{aligned} & \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{(s-2)(s-1)(s-5)}\right] = -\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{3(s-2)}\right] + \\ + \quad & \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{4(s-1)}\right] + \\ + \quad & \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{12(s-5)}\right] = -\frac{1}{3}e^{2t} + \frac{1}{4}e^{t} + \frac{1}{12}e^{5t} \end{aligned} \tag{64}$$

De esta manera hemos obtenido la transformada inversa de Laplace para el primer término de la ecuación (58)

$$3\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{(s-2)(s-1)(s-5)}\right] = -e^{2t} + \frac{3}{4}e^{t} + \frac{1}{4}e^{5t} \tag{65}$$

Para calcular los dos últimos términos de la ecuación (58), hagamos uso de las fórmulas

$$\begin{aligned}\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{s}{(s-a)(s-b)}\right] &= \frac{ae^{at}-be^{bt}}{a-b},\\ \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{(s-a)(s-b)}\right] &= \frac{e^{at}-e^{bt}}{a-b}\end{aligned} \tag{66}$$

si, $a=1$ y $b=5$, tenemos

$$\begin{aligned}\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{s}{(s-1)(s-5)}\right] &= -\frac{e^{t}-5e^{5t}}{4} = -\frac{1}{4}e^{t}+\frac{5}{4}e^{5t},\\ \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{(s-1)(s-5)}\right] &= -\frac{e^{t}-e^{5t}}{4} = -\frac{1}{4}e^{t}+\frac{1}{4}e^{5t}.\end{aligned}$$

Tomando en cuenta las expresiones obtenidas y haciendo algunas manipulaciones algebraicas no complicadas, tenemos que la solución final de la ecuación diferencial (53) es

$$y(t) = \frac{5}{2}e^{t} + \frac{1}{2}e^{5t} - e^{2t} \tag{67}$$

Ejercicios Propuestos

Dr. J. Juan Rosales García
Departamento de Ingeniería Eléctrica, DICIS-UGTO.

1. $F(s) = \frac{1}{s} + \frac{2}{s^2} + \frac{3}{s^3}$
2. $F(s) = \frac{1}{s} + \frac{s}{s^2+4}$
3. $F(s) = \frac{(s+1)(s-1)}{s^3}$
4. $F(s) = \frac{1}{s^2+4s+20}$
5. $F(s) = \frac{s+7}{s^2+4s+8}$
6. $F(s) = \frac{2}{(s-3)^2-9}$
7. $F(s) = \frac{e^{-3s}(s+1)}{s^2+2s+2}$
8. $F(s) = \frac{1}{s} + \frac{4}{s^2} + e^{-3s}\left(\frac{4}{s} - \frac{1}{s^3}\right)$