Sesión 18. Soluciones de EDOs Usando la TL

Dr. J. Juan Rosales García
Departamento de Ingeniería Eléctrica, DICIS-UGTO.

Competencias:

Dr. J. Juan Rosales García
Departamento de Ingeniería Eléctrica, DICIS-UGTO.

- Calcula la TL de funciones discontinuas.
- Resuelve ED de primer orden con fuentes discontinuas.

Contenido de la Sesión 18:

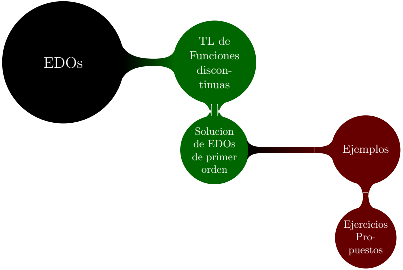
Dr. J. Juan Rosales García
Departamento de Ingeniería Eléctrica, DICIS-UGTO.

- TL de Funciones discontinuas.
- Segundo teorema de desplazamiento.
- Soluciones de EDOS con la TL

Mapa Mental

Sesión 18. Soluciones de EDOs Usando la TL

Dr. J. Juan Rosales García
Departamento de Ingeniería Eléctrica, DICIS-UGTO.



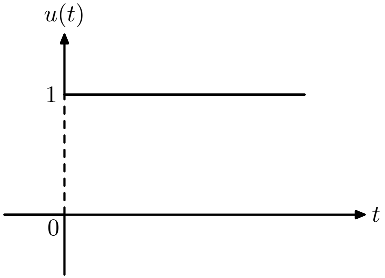
Transformada de funciones discontinuas

Dr. J. Juan Rosales García
Departamento de Ingeniería Eléctrica, DICIS-UGTO.

En esta sección presentaremos la transformada de Laplace de algunas funciones discontinuas que son muy importantes en la ingeniería, al igual que algunos teoremas acerca de la transformada de Laplace, útiles para resolver ecuaciones diferenciales con fuentes discontinuas.

La función *escalón unitario* fue introducida por Heaviside. Esta función se define como

$$\boxed{u(t) = \begin{cases} 0 & \text{para} t < 0 \\ 1 & \text{para} t > 0 \end{cases}} \tag{1}$$



Como podemos ver, esta función cambia bruscamente desde cero hasta el valor unitario para el tiempo $t = 0$. En ingeniería esta notación es conveniente para representar el cierre de un interruptor para $t = 0$. Para el caso en que $V_0 = 1$ el producto $V_0 u(t) = u(t)$, y su transformada de Laplace es

$$\mathcal{L}[u(t)] = \int_0^\infty u(t)e^{-st}\mathrm{d}t = \int_0^\infty e^{-st}\mathrm{d}t = -\frac{e^{-st}}{s}\bigg|_0^\infty = \frac{1}{s}, \tag{2}$$

Para el caso en que $V_0 \neq 0$ sea un voltaje independiente del tiempo, tenemos

$$\mathcal{L}[V_0 u(t)] = V_0 \int_0^\infty e^{-st}\mathrm{d}t = -V_0 \frac{e^{-st}}{s}\Big|_0^\infty = \frac{V_0}{s}, \quad \text{Re } s > 0 \tag{3}$$

La expresión (1) se puede generalizar

$$\boxed{u(t-\tau) = \begin{cases} 0 & \text{para} t < \tau \\ 1 & \text{para} t > \tau \end{cases}} \tag{4}$$

Dr. J. Juan Rosales García Departamento de Ingeniería Eléctrica, DICIS-UGTO.

para una función escalón que cambia bruscamente en el tiempo $t = \tau$.

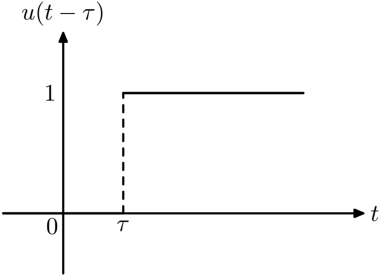


Figure: Función escalón desplazada.

En general, la función escalón desplazada tiene un valor unitario cuando la cantidad $(t-\tau)$, que es el argumento de la función u, es positiva y tiene un valor cero cuando $(t-\tau)$ es negativa. Del mismo modo la función $u(\tau-t)$ es la que cambia desde la unidad hasta el valor cero (para tiempo creciente) para el instante en que $t=\tau$. La transformada de Laplace de $u(t-\tau)$ se calcula a partir de la definición, esto es

$$\mathcal{L}[u(t-\tau)] = \int_{\tau}^{\infty} e^{-st}\mathrm{d}t = -\frac{e^{-st}}{s}\bigg|_{\tau}^{\infty} = \frac{e^{-\tau s}}{s}, \ \mathrm{Re}\, s > 0 \tag{5}$$

Este resultado se compone del producto de dos factores; el factor $\frac{1}{s}$, correspondiente a la transformada de la función escalón unitario, iniciada en el tiempo $t = 0$, y el término $e^{-\tau s}$ es una función que influye en la transformada de una función escalón que no principia en $t = 0$, sino en $t = \tau$.
Lo anterior se puede generalizar a cualquier función del tiempo $f(t)$, que demore su iniciación para otro tiempo $t = \tau$. Una función trasladada en el tiempo se representa de la siguiente manera:

$$f(t-\tau)u(t-\tau) \tag{6}$$

Para hallar la transformada de Laplace de esta función trasladada, usamos la definición (6) introduciendo en ella una nueva variable temporal t', entonces podemos escribir la transformada de Laplace como

$$\mathcal{L}[f(t')] = \int_0^\infty f(t')e^{-st'}\mathrm{d}t' = F(s) \tag{7}$$

Si elegimos la variable t' como $t' = t - \tau$, obtenemos que la expresión (7) se convierte en

$$\mathcal{L}[f(t')] = \int_{\tau}^{\infty} f(t-\tau)e^{-(t-\tau)s}\mathrm{d}t = \int_{\tau}^{\infty} f(t-\tau)e^{-st}(e^{\tau s})\mathrm{d}t \tag{8}$$

El factor $e^{\tau s}$ se puede sacar de la integral y el límite inferior de la integral se puede cambiar a cero si $f(t-\tau)$ se multiplica por $u(t-\tau)$, así

$$\mathcal{L}[f(t)] = e^{\tau s}\int_{0}^{\infty} f(t-\tau)u(t-\tau)e^{-st}\mathrm{d}t \tag{9}$$

Esta expresión integral se reconoce como la transformada de la función $f(t-\tau)u(t-\tau)$, tenemos

$$\mathcal{L}[f(t-\tau)u(t-\tau)] = e^{-\tau s}\mathcal{L}[f(t)] = e^{-\tau s}F(s) \quad (10)$$

Para el caso inverso tendremos

$$\mathcal{L}^{-1}[e^{-\tau s}F(s)] = f(t-\tau)u(t-\tau) \quad (11)$$

Estas ecuaciones indican que la transformada de cualquier función trasladada, para principiar en el tiempo $t=\tau$, es $e^{-\tau s}$ veces la transformada de la función cuando principia en $t=0$. Este resultado es importante y lo formularemos como teorema.

Theorem

(segundo teorema de desplazamiento) Suponga que $\tau \geq 0$, *y* $\mathcal{L}[f(t)]$ *existe para todo* $s > s_0$. *Entonces,* $\mathcal{L}[u(t-\tau)f(t-\tau)]$ *existe para* $\mathrm{Re}\, s > \sigma_0$ *y*

$$\boxed{\mathcal{L}[u(t-\tau)f(t-\tau)] = e^{-\tau s}F(s)} \tag{12}$$

Para el caso inverso, tenemos

$$\boxed{\mathcal{L}^{-1}[e^{-\tau s}F(s)] = f(t-\tau)u(t-\tau)} \tag{13}$$

Dr. J. Juan Rosales García
Departamento de Ingeniería Eléctrica,
DICIS-UGTO.

Este teorema establece que multiplicar una transformada de Laplace por el exponencial $e^{-s\tau}$ corresponde a desplazar el argumento de la transformada inversa en τ unidades.

Ejemplo 1:

Calcular la transformada inversa de Laplace de la función

$$Y(s) = \left(\frac{5}{s} - \frac{1}{s^2}\right) + e^{-3s}\left(\frac{6}{s} + \frac{7}{s^2}\right) + \frac{3e^{-6s}}{s^3} \tag{14}$$

Solución: Del segundo teorema de desplazamiento. Definamos

$$\begin{aligned} Y_1(s) &= \left(\frac{5}{s} - \frac{1}{s^2}\right), \quad Y_2(s) = \left(\frac{6}{s} + \frac{7}{s^2}\right), \\ Y_3(s) &= \frac{3}{s^3} \end{aligned} \tag{15}$$

La transformada inversa de estas expresiones es fácil de calcular usando las fórmulas de la tabla 4.4-I. Tenemos como resultado

$$\begin{aligned} y_1(t) &= \mathcal{L}^{-1}[Y_1(s)] = 5 - t \\ y_2(t) &= \mathcal{L}^{-1}[Y_2(s)] = 6 + 7t \\ y_3(t) &= \mathcal{L}^{-1}[Y_3(s)] = \frac{3}{2}t^2 \end{aligned} \tag{16}$$

Luego

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1}[Y_1(s)] + \mathcal{L}^{-1}[e^{-3s}Y_2(s)] + \mathcal{L}^{-1}[e^{-6s}Y_3(s)] \tag{17}$$

Del segundo teorema de desplazamiento tenemos para el segundo y tercer término

$$\begin{aligned} \mathcal{L}^{-1}[e^{-3s}Y_2(s)] &= u(t-3)[6+7(t-3)], \\ \mathcal{L}^{-1}[e^{-6s}Y_3(s)] &= \frac{3}{2}u(t-6)[(t-6)^2] \end{aligned} \tag{18}$$

Sustituyendo estos resultados en (17), finalmente, tenemos la solución

$$y(t) = (5-t)u(t) + u(t-3)[7t-15] + \frac{3}{2}u(t-6)[(t-6)^2] \tag{19}$$

Veamos otra de las utilidades de la función escalón. Supongamos que tenemos una función continua por partes definida en el intervalo $[0, \infty)$,

$$\boxed{f(t) = \begin{cases} f_0(t) & \mathrm{para 0 \leq t < t_1} \\ f_1(t) & \mathrm{para t \geq t_1} \end{cases}} \tag{20}$$

Se supone que $f_0(t)$ y $f_1(t) \in [0, \infty)$. El uso de la función escalón nos permite representar a la función (20) como

$$\boxed{f(t) = u(t)f_0(t) + u(t - t_1)[f_1(t) - f_0(t)]} \tag{21}$$

Supongamos ahora que tenemos tres funciones dadas de la siguiente forma:

$$\boxed{f(t) = \begin{cases} f_0(t) & \mathrm{para 0 \leq t < t_1} \\ f_1(t) & \mathrm{para t_1 \leq t < t_2} \\ f_2(t) & \mathrm{para t \geq t_2} \end{cases}} \qquad (22)$$

Esto es equivalente a la siguiente expresión:

$$\begin{aligned} f(t) &= u(t)f_0(t) + u(t-t_1)[f_1(t) - f_0(t)] + \\ &+ u(t-t_2)[f_2(t) - f_1(t)] \end{aligned} \qquad (23)$$

Para determinar la transformada de Laplace $\mathcal{L}[f(t)]$ de funciones continuas por partes? Para esto existen dos teoremas que nos facilitarán los cálculos.

Theorem

Sea $f(t) \in [0, \infty)$. *Supóngase que* $\tau \geq 0$ *y* $\mathcal{L}[f(t+\tau)]$ *existe para* $\operatorname{Re} s > \sigma_0$. *Entonces,* $\mathcal{L}[u(t-\tau)f(t)]$ *existe para* $\operatorname{Re} s > \sigma_0$ *y*

$$\boxed{\mathcal{L}[u(t-\tau)f(t)] = e^{-s\tau}\mathcal{L}[f(t+\tau)]} \tag{24}$$

△ Por definición

$$\mathcal{L}[u(t-\tau)f(t)] = \int_0^\infty u(t-\tau)f(t)e^{-st}\mathrm{d}t \tag{25}$$

Tomando en cuenta la definición del escalón desplazado, tenemos

$$\mathcal{L}[u(t-\tau)f(t)] = \int_0^\tau (0)e^{-st}\mathrm{d}t + \int_\tau^\infty f(t)e^{-st}\mathrm{d}t \tag{26}$$

La primer integral de la derecha es cero. Introduciendo la nueva variable $t' = t - \tau$ en la segunda integral, resulta

$$\begin{aligned}\mathcal{L}[u(t-\tau)f(t)] &= \int_0^\infty f(t'+\tau)e^{-s(t'+\tau)}\mathrm{d}t' = \\ &= e^{-s\tau}\int_0^\infty f(t'+\tau)e^{-st'}\mathrm{d}t' \quad (27)\end{aligned}$$

Cambiando la etiqueta de la variable de integración en la última integral de t' a t, obtenemos

$$\mathcal{L}[u(t-\tau)f(t)] = e^{-s\tau}\int_0^\infty f(t+\tau)e^{-st}\mathrm{d}t = e^{-s\tau}\mathcal{L}[f(t+\tau)] \quad (28)$$

Ejemplo 2:

Dr. J. Juan Rosales García Departamento de Ingeniería Eléctrica, DICIS-UGTO.

Hallar la transformada de Laplace

$$\mathcal{L}[u(t-2)(t+1)] \tag{29}$$

Solución:

Para usar el teorema anterior, Teorema 2, identificamos $\tau = 2$ y $f(t) = t + 1$, entonces $f(t+2) = t+2+1 = t+3$ y la transformada de Laplace

$$\mathcal{L}[t+3] = \frac{1}{s^2} + \frac{3}{s} \tag{30}$$

El Teorema 2 implica

$$\mathcal{L}[u(t-2)(t+1)] = e^{-2s}\left(\frac{1}{s^2} + \frac{3}{s}\right) \tag{31}$$

Ejemplo 3:

Hallar la transformada de Laplace de la función continua por partes

$$f(t) = \begin{cases} 2, & 0 \leq t < \pi \\ 0, & \pi \leq t < 2\pi \\ \sin t, & t \geq 2\pi \end{cases} \tag{32}$$

Solución: Escribamos la función (32) en términos de la función escalón, obtenemos

$$f(t) = 2u(t) - 2u(t-\pi) + u(t-2\pi)\sin(t-2\pi) \tag{33}$$

En esta ecuación, por comodidad, hemos escrito $\sin t = \sin(t - 2\pi)$, esto es válido, debido a que la función seno es periódica de periodo 2π.

Aplicando la transformada de Laplace en (33) se tiene

$$\begin{aligned}\mathcal{L}[f(t)] &= 2\mathcal{L}[u(t)] - 2\mathcal{L}[u(t-\pi)] + \\ &+ \mathcal{L}[u(t-2\pi)\sin(t-2\pi)] = \frac{2}{s} - \frac{2e^{-\pi s}}{s} + \\ &+ \frac{e^{-2\pi s}}{s^2+1} \qquad (34)\end{aligned}$$

Ejemplo 4:

Dr. J. Juan Rosales García
Departamento de Ingeniería Eléctrica, DICIS-UGTO.

Hallar la función $f(t)$ correspondiente a la transformada de Laplace

$$F(s) = \frac{2}{s^2} - \frac{2e^{-2s}}{s^2} - \frac{4e^{-2s}}{s} + \frac{se^{-\pi s}}{s^2+1} \tag{35}$$

Solución:

Aplicando la transformada inversa de Laplace

$$\begin{aligned} f(t) &= \mathcal{L}^{-1}[F(s)] = 2\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s^2}\right] - 2\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{e^{-2s}}{s^2}\right] - \\ &- 4\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{e^{-2s}}{s}\right] + \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{se^{-\pi s}}{s^2+1}\right] \end{aligned} \tag{36}$$

Haciendo uso del Teorema 1, resulta

$$\begin{aligned} & f(t) = 2t - 2u(t-2)[t-2] - 4u(t-2) + \\ + \quad & u(t-\pi)\cos(t-\pi) = 2t - 2u(t-2)t - \\ - \quad & u(t-\pi)\cos t \end{aligned} \tag{37}$$

Este mismo resultado lo podemos escribir en su forma equivalente como

$$f(t) = \begin{cases} 2t, & 0 \leq t < 2 \\ 0, & 2 \leq t < \pi \\ -\cos t, & t \geq \pi \end{cases} \tag{38}$$

Diferenciación e integración de la transformada de Laplace

Dr. J. Juan Rosales García
Departamento de Ingeniería Eléctrica, DICIS-UGTO.

En las secciones anteriores hemos discutido la solución de ecuaciones diferenciales con coeficientes constantes con condiciones iniciales. Las propiedades de la transformada de Laplace estudiadas hasta el momento no son suficientes para resolver ecuaciones diferenciales con coeficientes polinomiales en términos de la variable independiente. No obstante, el concepto de diferenciación de la transformada de Laplace nos ayuda a resolver algunos problemas de esta índole.

Theorem

(diferenciación de la transformada de Laplace) Si $f(t)$ es una función continua por partes para todo $t \geq 0$ y es de orden exponencial cuando $t \to \infty$, entonces

$$\boxed{\mathcal{L}[-tf(t)] = \frac{\mathrm{d}F(s)}{\mathrm{d}s} \quad y \quad \mathcal{L}[t^n f(t)] = (-1)^n \frac{\mathrm{d}^n F(s)}{\mathrm{d}s^n}, \ \mathrm{Re}\ s > \sigma} \tag{39}$$

donde $F(s) = \mathcal{L}[f(t)]$

$\triangle$ De las condiciones del teorema se tiene que la transformada de Laplace de la función $f(t)$ existe, es decir, tiene lugar la integral impropia

$$\int_0^\infty f(t)e^{-st}\mathrm{d}t = F(s) \tag{40}$$

Entonces, tomando la derivada respecto a s, obtenemos

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}s} &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\int_0^\infty f(t)e^{-st}\mathrm{d}t = \int_0^\infty f(t)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}e^{-st}\mathrm{d}t = \\ &= -\int_0^\infty tf(t)e^{-st}\mathrm{d}t = \mathcal{L}[-tf(t)] \end{aligned} \tag{41}$$

Concluimos que

$$\mathcal{L}[tf(t)] = -\frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}s} \tag{42}$$

Para el caso $\mathcal{L}[t^2 f(t)]$, tenemos

$$\begin{aligned} \mathcal{L}[t^2 f(t)] &= \mathcal{L}[t\{tf(t)\}] = -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}[\mathcal{L}\{tf(t)\}] = \\ &= -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{ds}}\Big[-\frac{\mathrm{d}F(s)}{\mathrm{d}s}\Big] = (-1)^2\frac{\mathrm{d}^2F(s)}{\mathrm{d}s^2} \end{aligned} \tag{43}$$

Luego, por inducción se puede demostrar que

$$\mathcal{L}[t^n f(t)] = (-1)^n \frac{\mathrm{d}^n F(s)}{\mathrm{d}s^n} \quad \forall n = 1,\ 2,\ 3, \ldots \qquad \triangle \tag{44}$$

De la expresión (39), obtenemos

$$\boxed{\mathcal{L}^{-1}[F'(s)] = -tf(t), \quad \mathcal{L}^{-1}[F^{(n)}(s)] = (-1)^n t^n f(t)} \tag{45}$$

Ejemplo 5:

Calcular la transformada de Laplace de la función

$$f(t) = t^2 \sin(\omega t) \tag{46}$$

Solución: Usando el Teorema 3 y la tabla de transformadas, tenemos

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}[t^2 \sin(\omega t)] &= (-1)^2 \frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}s^2}\left[\frac{\omega}{s^2+\omega^2}\right] = \\
&= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\left[-\frac{2\omega s}{(s^2+\omega^2)^2}\right] \\
&= \frac{6\omega s^2 - 2\omega^3}{(s^2+\omega^2)^3}
\end{aligned} \tag{47}$$

Ejemplo 6:

Dr. J. Juan Rosales García Departamento de Ingeniería Eléctrica, DICIS-UGTO.

Calcular la transformada de Laplace de la función $f(t) = t^2 e^{-2t}$.

Solución:

Hagamos uso del Teorema 3 y de la fórmula $\mathcal{L}[e^{-2t}] = \frac{1}{s+2}$. Entonces, tenemos

$$\begin{aligned} \mathcal{L}[t^2 e^{-2t}] &= (-1)^2 \frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}s^2}\left[\frac{1}{s+2}\right] = -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\left[\frac{1}{(s+2)^2}\right] = \\ &= \frac{2}{(s+2)^3} \end{aligned} \tag{48}$$

Ejemplo 7:

Dr. J. Juan Rosales García Departamento de Ingeniería Eléctrica, DICIS-UGTO.

Calcular la transformada de Laplace de la función $f(t) = t^2 \cos(3t)$.

Solución: Usando la fórmula

$$\mathcal{L}[\cos(\omega t)] = \frac{s}{s^2 + \omega^2}$$

Para nuestro caso, tenemos que $\omega = 3$, entonces

$$\mathcal{L}[\cos(3t)] = \frac{s}{s^2 + 9} = F(s) \tag{49}$$

Dr. J. Juan Rosales García Departamento de Ingeniería Eléctrica, DICIS-UGTO.

Entonces

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}[t^2\cos(3t)] &= (-1)^2\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}s^2}\left[\frac{s}{s^2+9}\right] = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\left[\frac{9-s^2}{(s^2+9)^2}\right] \\
&= \frac{-2s(s^2+9)^2-(9-s^2)(s^2+9)(4s)}{(s^2+9)^4} \\
&= \frac{2s^3-54s}{(s^2+9)^3} = \frac{2s(s^2-27)}{(s^2+9)^3} \qquad (50)
\end{aligned}$$

Teorema de Integración

Dr. J. Juan Rosales García
Departamento de Ingeniería Eléctrica, DICIS-UGTO.

El teorema anterior muestra que la diferenciación de la transformada $F(s)$ respecto a s corresponde a la multiplicación de t por $f(t)$, junto con un cambio de signo. Desde luego, es de esperar que la integración de $F(s)$ corresponda a una división de $f(t)$ entre t. Esto lo afirma el siguiente teorema.

Theorem

(transformada de Laplace de una integral) Sea $f(t)$ una función continua por partes en $[0,\infty)$ y de orden exponencial. Entonces, la transformada de Laplace de la integral de $f(t)$ está dada por la expresión

$$\boxed{\mathcal{L}\left[\int_0^t f(\tau)\mathrm{d}\tau\right] = \frac{F(s)}{s}} \tag{51}$$

△ De la definición de transformada de Laplace, tenemos

$$\mathcal{L}\Big[\int_0^t f(\tau)\mathrm{d}\tau\Big] = \int_0^\infty \Big[\int_0^t f(\tau)\mathrm{d}\tau\Big] e^{-st}\mathrm{d}t \qquad (52)$$

Integrando por partes, definiendo

$$\begin{aligned} u &= \int_0^t f(\tau)\mathrm{d}\tau \quad \rightarrow \quad \mathrm{d}u = f(t)\mathrm{d}t \\ \mathrm{d}v &= e^{-st}\mathrm{d}t \quad \rightarrow \quad v = -\frac{1}{s}e^{-st} \end{aligned} \qquad (53)$$

Obtenemos

$$\mathcal{L}\Big[\int_0^t f(t)\mathrm{d}t\Big] = -\frac{e^{-st}}{s}\int_0^t f(\tau)\mathrm{d}\tau\Big|_0^\infty + \frac{1}{s}\int_0^\infty f(t)e^{-st}\mathrm{d}t \tag{54}$$

El primer término de la derecha en (54) desaparece, ya que $e^{-st} \to 0$ cuando $t \to \infty$. En consecuencia

$$\mathcal{L}\Big[\int_0^t f(\tau)\mathrm{d}\tau\Big] = \frac{F(s)}{s} \qquad \triangle \tag{55}$$

Para la transformada inversa, tenemos

$$\boxed{\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s}F(s)\right] = \int_0^t f(\tau)\mathrm{d}\tau} \tag{56}$$

Ejemplo 8:

Dr. J. Juan Rosales García
Departamento de Ingeniería Eléctrica, DICIS-UGTO.

Hallar la función $f(t)$ si su transformada de Laplace es

$$F(s) = \frac{3}{s^2 + s} \tag{57}$$

Solución:

Para poder usar el Teorema 4, escribamos la expresión (57) de la siguiente manera:

$$F(s) = \frac{3}{s(s+1)} = \frac{3}{s} G(s) \tag{58}$$

donde

$$G(s) = \frac{1}{s+1} \tag{59}$$

Luego, con ayuda de la tabla 4.4-I calculamos la transformada inversa de la expresión

$$g(t) = \mathcal{L}^{-1}[G(s)] = \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{s+1}\right) = e^{-t} \tag{60}$$

Entonces, de la fórmula (56), tenemos

$$f(t) = \mathcal{L}^{-1}\left[F(s)\right] = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{3}{s}G(s)\right] = 3\int_0^t e^{-\tau}\mathrm{d}\tau \tag{61}$$

Calculando la integral, obtenemos el resultado final

$$f(t) = 3\left(1 - e^{-t}\right) \tag{62}$$

Ejemplo 9:

Dr. J. Juan Rosales García
Departamento de Ingeniería Eléctrica, DICIS-UGTO.

Hallar la función $f(t)$ correspondiente a la transformada

$$F(s) = \frac{4}{s^3 + 4s} \tag{63}$$

Solución:

Para poder usar el Teorema 4, escribamos la transformada (63) de la siguiente manera:

$$F(s) = \frac{4}{s^3 + 4s} = \frac{(2)(2)}{s(s^2 + 4)} = \frac{2}{s} G(s) \tag{64}$$

donde

$$G(s) = \frac{2}{s^2 + (2)^2} \tag{65}$$

La transformada inversa de (65), es

$$g(t) = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{2}{s^2 + (2)^2}\right] = \sin 2t \qquad (66)$$

Entonces, aplicando el Teorema 4, a la expresión (63), tenemos

$$\begin{aligned} f(t) &= \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{2}{s}G(s)\right] = 2\int_0^t \sin 2\tau d\tau = \\ &= -\cos 2\tau\Big|_0^t = 1 - \cos 2t \end{aligned} \qquad (67)$$

Ejercicios Propuestos

1. $y' + y = u(t-1)(t-1), \quad y(0) = 2$
2. $y' = u(t-2), \quad y(0) = 3$
3. $y' + 9y = u(t-5), \quad y(0) = -2$
4. $y' + y = u(t-2)e^{-2(t-2)}, \quad y(0) = 1$
5. $y' + y = u(t-1)(t-1), \quad y(0) = 2$