Sesión 19. Soluciones de EDOs Usando la TL

Dr. J. Juan Rosales García
Departamento de Ingeniería Eléctrica, DICIS-UGTO.

Competencias:

- Resuelve EDs con fuentes discontinuas.
- Aplica los diferentes teoremas para resolver EDOs con fuentes discontinuas.

Contenido de la Sesión 19:

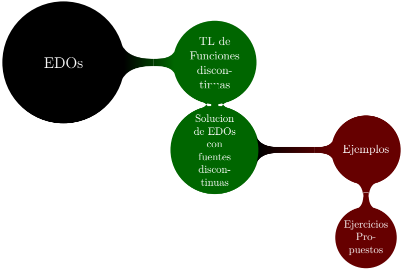
Dr. J. Juan Rosales García
Departamento de Ingeniería Eléctrica, DICIS-UGTO.

- EDOs con Fuentes discontinuas.
- EDOs con impulsos.

Dr. J. Juan Rosales García
Departamento de Ingeniería Eléctrica, DICIS-UGTO.

Mapa Mental

MAPA MENTAL ECUACIONES DIFERENCIALES ORDINARIAS AGOSTO-DICIEMBRE 2021



Ecuaciones diferenciales con fuentes discontinuas

En las aplicaciones, las funciones discontinuas (continuas por partes) aparecen de manera natural. Por ejemplo, el cierre y apertura de un interruptor es un fenómeno discontinuo. Las ecuaciones diferenciales que contienen funciones discontinuas son difíciles de tratar analíticamente usando los métodos previos. La transformada de Laplace es una herramienta poderosa para este tipo de ecuaciones diferenciales, ya que facilita el tratamiento de las funciones discontinuas.

El propósito de esta sección es el análisis de ecuaciones diferenciales con funciones discontinuas como fuentes. En otras palabras, aprenderemos a resolver ecuaciones de la forma

$$ay'' + by' + cy = f(t), \qquad y(0) = c_0, \qquad y'(0) = c_1 \tag{1}$$

donde a, b y c son constantes $(a \neq 0)$ y $f(t)$ tiene un número finito de discontinuidades en el intervalo $[0, \infty)$. Este tipo de problemas surge en situaciones donde la entrada a un sistema físico experimenta cambios instantáneos, por ejemplo, cuando se abre o se cierra un interruptor, o cuando las fuerzas que actúan en un sistema cambian de manera rápida.

Los pasos a seguir para resolver este tipo de ecuaciones son los siguientes:

- *Primer paso*. Debemos representar la función $f(t)$ en forma de combinación de funciones escalón.
- *Segundo paso*. Aplicar la transformada de Laplace a toda la ecuación diferencial.
- *Tercer paso*. Hacer uso de la transformada de Laplace para las derivadas y tomar en cuenta las condiciones iniciales.
- *Cuarto paso*. Despejar $Y(s)$ y calcular su inversa con el objetivo de hallar la función $y(t)$, la cual será la solución de la ecuación diferencial (1).

Ejemplo 1:

Resolver la siguiente ecuación diferencial de primer orden con una discontinuidad

$$y' + 9y = u(t-5), \qquad y(0) = -2 \tag{2}$$

Solución: Aplicando la transformada de Laplace, resulta

$$\mathcal{L}[y'] + 9\mathcal{L}[y] = \mathcal{L}[u(t-5)] \tag{3}$$

Luego, usando el teorema 4.3.1, y tomando en cuenta la condición inicial, tenemos

$$sY(s) + 2 + 9Y(s) = \frac{e^{-5s}}{s} \tag{4}$$

Factorizando y despejando a $Y(s)$, obtenemos

$$Y(s) = -\frac{2}{s+9} + \frac{e^{-5s}}{s(s+9)} \tag{5}$$

Para encontrar la solución $y(t)$ debemos calcular la transformada inversa, esto es

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1}[Y(s)] = -2\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s+9}\right] + \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{e^{-5s}}{s(s+9)}\right] \tag{6}$$

Desarrollando en fracciones parciales la expresión

$$\frac{1}{s(s+9)} = \frac{A}{s} + \frac{B}{s+9} \tag{7}$$

Tenemos, $As + 9A + BS = 1$, de donde, $A = 1/9$ y $B = -1/9$. Entonces

$$\frac{e^{-5s}}{s(s+9)} = \frac{e^{-5s}}{9s} - \frac{e^{-5s}}{9(s+9)} \tag{8}$$

y su transformada inversa es

$$\begin{aligned}\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{e^{-5s}}{s(s+9)}\right] &= \frac{1}{9}\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{e^{-5s}}{s}\right]-\frac{1}{9}\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{e^{-5s}}{s+9}\right]= \\ &= \frac{1}{9}u(t-5)-\frac{1}{9}u(t-5)e^{-9(t-5)} \quad (9)\end{aligned}$$

Tenemos la solución de la ecuación (2)

$$y(t)=-2e^{-9t}+\frac{1}{9}u(t-5)-\frac{1}{9}u(t-5)e^{-9(t-5)} \quad (10)$$

Ejemplo 2:

Dr. J. Juan Rosales García
Departamento de Ingeniería Eléctrica, DICIS-UGTO.

Resolver el problema de valor inicial

$$y' + y = u(t-2)e^{-2(t-2)}, \qquad y(0) = 1 \tag{11}$$

Solución: Aplicando la transformada de Laplace

$$\mathcal{L}[y'] + \mathcal{L}[y] = \mathcal{L}[u(t-2)e^{-2(t-2)}] \tag{12}$$

obtenemos

$$sY(s) - y(0) + Y(s) = \frac{e^{-2s}}{s+2} \tag{13}$$

Sustituyendo la condición inicial y factorizando

$$Y(s)[s+1] = 1 + \frac{e^{-2s}}{s+2} \tag{14}$$

Despejando Y(s), resulta

$$Y(s) = \frac{1}{s+1} + \frac{e^{-2s}}{(s+1)(s+2)} \tag{15}$$

El último término lo podemos desarrollar en fracciones parciales, como resultado tenemos

$$Y(s) = \frac{1}{s+1} + \frac{e^{-2s}}{s+1} - \frac{e^{-2s}}{s+2} \tag{16}$$

Por último, aplicando la transformada inversa de Laplace

$$
\begin{aligned}
y(t) &= \mathcal{L}^{-1}[Y(s)] = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s+1}\right] + \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{e^{-2s}}{s+1}\right] - \\
&- \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{e^{-2s}}{s+2}\right] = \\
&= e^{-t} + u(t-2)e^{-(t-2)} - u(t-2)e^{-2(t-2)} \\
&= e^{-t} + u(t-2)\left(e^{-(t-2)} - e^{-2(t-2)}\right) \qquad (17)
\end{aligned}
$$

Ejemplo 3:

Usar la transformada de Laplace para resolver la ecuación diferencial con valores iniciales

$$y''+y = f(t) = \begin{cases} 3 & 0 \leq t < \pi, \\ 0 & t \geq \pi. \end{cases} \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 0 \tag{18}$$

Solución: Para resolver esta ecuación hagamos uso de la función escalón y los teoremas antes mencionados. Primero, desarrollamos la función $f(t)$ en función del escalón

$$f(t) = f_0(t)+u(t-t_1)[f_1(t)-f_0(t)] = 3-3u(t-\pi) \tag{19}$$

Entonces, la ecuación (18) se puede escribir como

$$y'' + y = 3 - 3u(t - \pi) \tag{20}$$

Ahora aplicamos la transformada de Laplace a la ecuación (20), tenemos

$$\mathcal{L}[y''] + \mathcal{L}[y] = 3\mathcal{L}[1] - 3\mathcal{L}[u(t-\pi)] \qquad (21)$$

Haciendo uso de las fórmulas para la transformada de Laplace de las derivadas, y considerando las condiciones iniciales, tenemos

$$s^2 Y(s) + Y(s) = \frac{3}{s} - \frac{3e^{-\pi s}}{s} \qquad (22)$$

Factorizando y despejando $Y(s)$, obtenemos

$$Y(s) = \frac{3}{s(s^2+1)} - \frac{3e^{-\pi s}}{s(s^2+1)} \tag{23}$$

Desarrollando en fracciones parciales la expresión que está en el denominador de (23), esto nos da como resultado

$$\frac{1}{s(s^2+1)} = \frac{A}{s} + \frac{Bs+C}{s^2+1} = \frac{1}{s} - \frac{s}{s^2+1} \tag{24}$$

Sustituyendo este resultado en (24), se obtiene

$$Y(s) = \frac{3}{s} - \frac{3s}{s^2+1} - \frac{3}{s}e^{-\pi s} + \frac{3s}{s^2+1}e^{-\pi s} \tag{25}$$

Por último, calculamos la transformada inversa de esta expresión. El resultado final es

$$\begin{aligned} y(t) &= \mathcal{L}^{-1}[Y(s)] = 3\left[1-\cos t\right]u(t) - \\ &- 3u(t-\pi)\left[1-\cos(t-\pi)\right] \end{aligned} \tag{26}$$

ésta es la solución del problema con valor inicial.

Ejemplo 4:

Resolver la siguiente ecuación diferencial

$$y'' + 4y = 3u(t-5)\sin(t-5), \qquad y(0) = 1, \quad y'(0) = 0 \tag{27}$$

Solución: Aplicamos la transformada de Laplace

$$\mathcal{L}[y''] + 4\mathcal{L}[y] = 3\mathcal{L}[u(t-5)\sin(t-5)] \tag{28}$$

De donde, obtenemos

$$s^2 Y(s) - sy(0) - y'(0) + 4Y(s) = \frac{3e^{-5s}}{s^2+1} \tag{29}$$

Sustituyendo las condiciones iniciales y factorizando

$$(s^2+4)Y(s) = \frac{3e^{-5s}}{s^2+1} + s \tag{30}$$

Luego, despejando $Y(s)$, resulta

$$Y(s) = \frac{3e^{-5s}}{(s^2+1)(s^2+4)} + \frac{s}{s^2+4} \tag{31}$$

Para obtener la solución de la ecuación (27) debemos tomar la transformada inversa

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1}[Y(s)] = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{s}{s^2+4}\right] + \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{3e^{-5s}}{(s^2+4)(s^2+1)}\right] \tag{32}$$

Tomando en cuenta el resultado (**??**) podemos escribir

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{s}{s^2+4}\right] - \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{e^{-5s}}{s^2+4}\right] + \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{e^{-5s}}{s^2+1}\right] \tag{33}$$

Calculando por separado las TI.

$$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{s}{s^2+4}\right] = \cos 2t$$

$$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{e^{-5s}}{s^2+4}\right] = \frac{1}{2}u(t-5)\sin 2(t-5)$$

$$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{e^{-5s}}{s^2+1}\right] = u(t-5)\sin(t-5)$$

Sustituyendo estos resultados en (33), obtenemos el resultado final

$$y(t) = \cos 2t + u(t-5)\sin(t-5) - \frac{1}{2}u(t-5)\sin 2(t-5) \tag{34}$$

Ejemplo 5:

Hallar la solución del problema con valores iniciales

$$y'' + 2y' + 5y = 1 - u(t-7), \qquad y(0) = y'(0) = 0 \tag{35}$$

Solución: Aplicando la transformada de Laplace

$$\mathcal{L}[y''] + 2\mathcal{L}[y'] + 5\mathcal{L}[y] = \mathcal{L}[1 - u(t-7)] \tag{36}$$

resulta

$$s^2 Y(s) - sy(0) - y'(0) + 2[sY(s) - y(0)] + 5Y(s) = \frac{1}{s} - \frac{e^{-7s}}{s} \tag{37}$$

Poniendo las condiciones iniciales, factorizando y despejando, obtenemos la ecuación

$$Y(s) = \frac{1}{s(s^2+2s+5)} - \frac{e^{-7s}}{s(s^2+2s+5)} \tag{38}$$

Desarrollando en fracciones parciales la expresión

$$\frac{1}{s(s^2+2s+5)} = \frac{A}{s} + \frac{Bs+C}{s^2+2s+5} \tag{39}$$

Resulta $A = \frac{1}{5}$, $B = -\frac{1}{5}$ y $C = -\frac{2}{5}$.

Sustituyendo en (39), obtenemos

$$\frac{1}{s(s^2+2s+5)} = \frac{1}{5s} - \frac{s+2}{5(s^2+2s+5)} = \frac{1}{5s} - \frac{s+2}{5[(s+1)^2+4]} \tag{40}$$

Entonces, de la ecuación (38), tenemos

$$Y(s) = \frac{1}{5s} - \frac{s+2}{5[(s+1)^2+4]} - \frac{e^{-7s}}{5s} + \frac{e^{-7s}(s+2)}{5[(s+1)^2+4]} \tag{41}$$

El último término lo podemos escribir como

$$\begin{aligned}\frac{(s+2)}{5[(s+1)^2+4]} &= \frac{s+1+1}{5[(s+1)^2+4]} = \frac{s+1}{5[(s+1)^2+4]} + \\ &+ \frac{2}{5\cdot 2[(s+1)^2+4]} \qquad (42)\end{aligned}$$

Entonces, la expresión (41) tiene la forma

$$\begin{aligned}Y(s) &= \frac{1}{5s} - \frac{s+1}{5[(s+1)^2+4]} - \frac{2}{5\cdot 2[(s+1)^2+4]} - \\ &- \frac{e^{-7s}}{5s} + \frac{e^{-7s}(s+1)}{(s+1)^2+4} + \frac{2e^{-7s}}{5\cdot 2[(s+1)^2+4]} \qquad (43)\end{aligned}$$

Dr. J. Juan Rosales García
Departamento de Ingeniería Eléctrica, DICIS-UGTO.

Aplicando al TI, finalmente, se tiene

$$y(t) = \frac{1}{5} - \frac{e^{-t}}{5}\left(\cos 2t + \frac{1}{2}\sin 2t\right) - \frac{1}{5}u(t-7) + \\ + \frac{1}{5}u(t-7)e^{-(t-7)}\left[\cos 2(t-7) + \frac{1}{2}\sin 2(t-7)\right] \quad (44)$$

Observación: la ecuación (35) puede modelar el movimiento de una masa unitaria $m = 1$ unida a un resorte con constante $k = 2$, la cual se desliza sobre una superficie con coeficiente de amortiguamiento igual a 2. Las condiciones iniciales las podemos interpretar de la siguiente manera: en el tiempo $t = 0$ la masa se mantiene en reposo en $y = 0$. Cuando $t < 7$, la superficie se inclina de tal manera que la gravedad proporciona una fuerza unitaria (en este caso en la parte derecha de (35) aparecerá la unidad) que alarga al resorte. En el tiempo $t = 7$, la superficie vuelve a nivelarse (es decir, la parte derecha de (35) será cero) .

Ejemplo 6:

Resolver el siguiente problema con valores iniciales

$$y'' + 2y = r(t) = \begin{cases} 1 & \text{para} 0 \leq t < 1 \\ 0 & \text{para} t > 1 \end{cases} \tag{45}$$

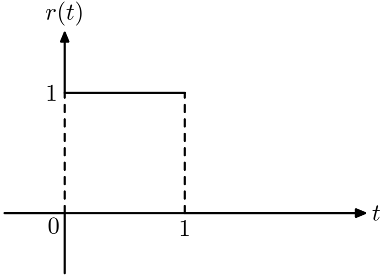


Figure: Onda cuadrada $r(t)$.

Solución:

Antes que nada escribamos $r(t)$ en función de las funciones escalón, esto es, como

$$r(t) = u(t) + u(t-1) \tag{46}$$

Sustituyendo en (45) y aplicando la transformada de Laplace, obtenemos

$$\mathcal{L}[y''] + 2\mathcal{L}[y] = \mathcal{L}[u(t)] + \mathcal{L}[u(t-1)] \tag{47}$$

De donde, resulta

$$s^2Y(s) - sy(0) - y'(0) + 2Y(s) = \frac{1}{s} + \frac{e^{-s}}{s} \tag{48}$$

Sustituyendo las condiciones iniciales y despejando $Y(s)$, tenemos

$$Y(s) = \frac{1}{s(s^2+2)} + \frac{e^{-s}}{s(s^2+2)} \tag{49}$$

Desarrollando en fracciones parciales la expresión

$$\frac{1}{s(s^2+2)} = \frac{A}{s} + \frac{Bs+C}{s^2+2} \tag{50}$$

tenemos

$$\begin{aligned} A + B &= 0 \\ 2A &= 1 \\ C &= 0 \end{aligned} \tag{51}$$

De donde, $C = 0$, $A = 1/2$ y $B = -1/2$. Entonces

$$\frac{1}{s(s^2+2)} = \frac{1}{2s} - \frac{s}{2(s^2+2)} \tag{52}$$

Sustituyendo en (49), obtenemos

$$Y(s) = \frac{1}{2s} - \frac{s}{2(s^2+2)} + \frac{e^{-s}}{2s} - \frac{e^{-s}s}{2(s^2+2)} \tag{53}$$

Nos queda por calcular la transformada inversa

$$
\begin{aligned}
& y(t) = \mathcal{L}^{-1}[Y(s)] = \qquad (54)\\
= \quad & \frac{1}{2}\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s}\right] - \frac{1}{2}\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{s}{s^2+2}\right] + \frac{1}{2}\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{e^{-s}}{s}\right] - \\
- \quad & \frac{1}{2}\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{e^{-s}s}{s^2+2}\right]
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s}\right] &= 1 \\
\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{s}{s^2+2}\right] &= \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{s}{s^2+(\sqrt{2})^2}\right] = \cos\sqrt{2}t \\
\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{e^{-s}}{s}\right] &= u(t-1) \qquad (55) \\
\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{e^{-s}s}{s^2+(\sqrt{2})^2}\right] &= \mathcal{L}^{-1}\left[e^{-s}F(s)\right] = \\
&= \begin{pmatrix} F(s) = \frac{s}{s^2+(\sqrt{2})^2} = \cos\sqrt{2}t \\ \text{por el teorema } 4\cdot 7\cdot 1 \end{pmatrix} = \\
&= \cos\sqrt{2}(t-1)u(t-1)
\end{aligned}
$$

Sustituyendo estos resultados en (55) tenemos el resultado final

$$y(t) = \frac{1}{2}\left(1 - \cos\sqrt{2}t\right) - \frac{1}{2}\left(1 - \cos\sqrt{2}(t-1)\right)u(t-1) \tag{56}$$

Este mismo resultado lo podemos escribir de la siguiente manera:

$$y(t) = \begin{cases} \frac{1}{2}\left(1 - \cos\sqrt{2}t\right) & \text{para} 0 \leq t < 1 \\ \frac{1}{2}\cos\sqrt{2}(t-1) - \frac{1}{2}\cos\sqrt{2}t & \text{para} t > 1 \end{cases} \tag{57}$$

Como podemos observar, la solución $y(t)$ representa una composición de oscilaciones armónicas.

Ecuaciones diferenciales con impulsos

Dr. J. Juan Rosales García
Departamento de Ingeniería Eléctrica, DICIS-UGTO.

Hemos aprendido a resolver ecuaciones diferenciales del tipo

$$a\frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}t^2} + b\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} + cy(t) = f(t), \quad y(t_0) = y_0, \quad y'(t_0) = y'_0 \tag{58}$$

donde a, b, c, son constantes y la función $f(t)$ continua por partes en el intervalo $[0, \infty)$. Sin embargo, en muchas de las aplicaciones surgen problemas de valor inicial donde la función $f(t)$ representa una fuerza que es muy grande durante un tiempo muy corto y cero en el resto del tiempo. A estas fuerzas se les conoce como impulsivas o forzamiento de impulso, y ocurren, por ejemplo, cuando dos objetos entran en colisión.

El impulso de una fuerza $f(t)$ durante el intervalo de tiempo $a \leq t \leq a+k$ se define como la integral de $f(t)$ de a a $a+k$. Desde el punto de vista práctico, es de interés el caso en que $k \to 0$, es decir, el impulso de una fuerza que actúa sólo por un instante muy corto. Para analizar este caso, consideremos la función definida por

$$f_k(t) = \begin{cases} \frac{1}{k}, & a \leq t \leq t+k \\ 0, & \text{otros} \quad \text{valores} \end{cases} \tag{59}$$

Dr. J. Juan Rosales García
Departamento de Ingeniería Eléctrica, DICIS-UGTO.

La gráfica de esta función está representada en la figura.

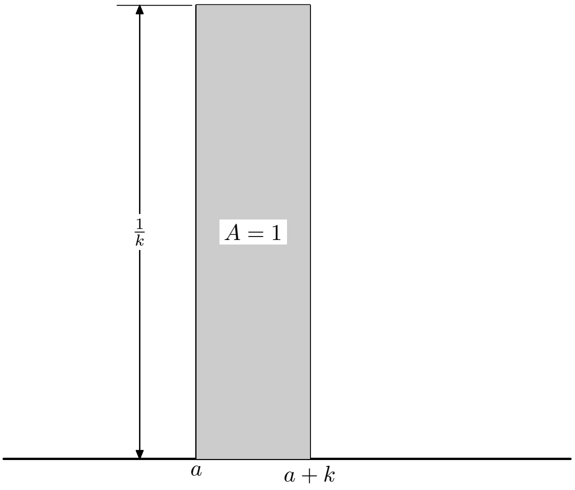


Figura: La función $f_k(t)$

Su impulso I_k es igual a la unidad, ya que la integral da el área del rectángulo. Esto es

$$\begin{aligned} I_k &= \int_0^{\infty} f_k(t)\mathrm{d}t = \int_a^{a+k} \frac{1}{k}\mathrm{d}t = \frac{1}{k}t\Big|_a^{a+k} = \\ &= \frac{1}{k}(a+k-a) = 1 \end{aligned} \tag{60}$$

Usando la función escalón unitario, podemos representar a $f_k(t)$ como

$$f_k(t) = \frac{1}{k}\left[u(t-a) - u(t-(a+k))\right] \tag{61}$$

Aplicando la transformada de Laplace a esta función, resulta

$$\begin{aligned} \mathcal{L}[f_k(t)] &= \frac{1}{k}\mathcal{L}\left[u(t-a) - u(t-(a+k))\right] = \\ &= \frac{1}{ks}\left[e^{-as} - e^{-(a+k)s}\right] = e^{-as}\frac{1-e^{-ks}}{ks} \end{aligned} \tag{62}$$

Por definición, se sigue que

$$\lim_{k\to 0} f_k(t) = \delta(t-a) \tag{63}$$

Dr. J. Juan Rosales García
Departamento de Ingeniería Eléctrica, DICIS-UGTO.

A la "función" $\delta(t-a)$ se le conoce como *función delta de Dirac* (también se le conoce como función de impulso unitario). El cociente de 62 tiende a la unidad cuando $k \to 0$, esto se hace usando la regla de $\mathrm{L'Hospital}$. Por consiguiente, cuando $k \to 0$, tenemos que la transformada de Laplace de la función delta de Dirac es

$$\mathcal{L}[\delta(t-a)] = e^{-as} \quad \text{si} \quad a = 0 \quad \rightarrow \quad \mathcal{L}[\delta(t)] = 1 \quad (64)$$

Debemos tener en cuenta que $\delta(t-a)$ no es una función en el sentido usual del cálculo, sino que se trata de una función llamada *función generalizada*, ya que (59) y (60) cuando $k \to 0$ implican

$$\delta(t-a) = \begin{cases} \infty & t = a \\ 0 & \text{otros} \quad \text{valores} \end{cases} \quad \text{y} \quad \int_0^\infty \delta(t-a)dt = 1 \tag{65}$$

Sin embargo, una función ordinaria que es 0 excepto en un solo punto debe tener la integral 0. No obstante, en problemas de impulsos es conveniente operar sobre $\delta(t-a)$ como si fuera una función usual.

La idea es poder resolver ecuaciones diferenciales del tipo

$$a\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2}+b\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}+cy(t)=\delta(t-t_0), \quad y(t_0)=y_0, \quad y'(t_0)=y'_0 \tag{66}$$

donde

$$\delta(t-t_0)=\begin{cases} 0, & t\neq t_0 \\ \infty, & t=t_0 \end{cases} \tag{67}$$

Ejemplo 7:

Dr. J. Juan Rosales García
Departamento de Ingeniería Eléctrica, DICIS-UGTO.

Supongamos que tenemos una masa unitaria unida a un resorte cuya constante es 9 y resbala sobre una superficie sin fricción. Supongamos, además, que para $t < 0$, la masa está en el punto de equilibrio y en reposo en $x = 0$. Cuando $t = 0$, a la masa se le da un fuerte golpe en la dirección x positiva. Hallar la ley que gobierna el movimiento de este sistema masa-resorte.

Solución:

De las condiciones del problema, tenemos que en $t = 0$, $x(0) = 0$, pero $x'(0)$ está indefinida debido a que la aceleración en este punto es infinita. Para indicar que antes de $t = 0$ la masa estaba en reposo, escribimos la condición inicial $x'(0) = 0^-$. Tenemos, entonces, que la ecuación diferencial que describe el movimiento de nuestro sistema es

$$\frac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t^2} + 9x = \delta(t), \quad x(0) = 0, \quad x'(0) = 0^- \tag{68}$$

Tomando la transformada de Laplace en ambos lados de la ecuación (68), resulta

$$\mathcal{L}\left[\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}\right] + 9\mathcal{L}[x] = \mathcal{L}[\delta(t)] \tag{69}$$

Esta expresión la podemos escribir como

$$s^2X(s) - sx(0) - x'(0) + 9X(s) = 1 \tag{70}$$

donde hemos usado el resultado(64).

Sustituyendo las condiciones iniciales y despejando $X(s)$, obtenemos la expresión

$$X(s) = \frac{1}{s^2+9} = \frac{1}{s^2+(3)^2} \tag{71}$$

La transformada inversa la escribimos de la siguiente manera:

$$x(t) = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s^2+(3)^2}\right] = \frac{1}{3}\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{3}{s^2+(3)^2}\right] \tag{72}$$

Usando la fórmula $\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{\omega}{s^2+\omega^2}\right] = \sin\omega t$ de la tabla 4.4-2, resulta

$$x(t) = \frac{1}{3}\sin 3t = \frac{1}{3}\sin\left(3t + 2\pi\right) \tag{73}$$

Hemos obtenido la ley de movimiento para un sistema masa-resorte, para el cual la amplitud es $A = 1/3$, la frecuencia $\omega = 3$ y el periodo $T = 2\pi$.

Ejemplo 8:

Dr. J. Juan Rosales García
Departamento de Ingeniería Eléctrica, DICIS-UGTO.

Resolver el siguiente problema con valores iniciales

$$y' + 2y = \delta(t-2), \qquad y(0) = 0 \tag{74}$$

Solución: Aplicando la transformada de Laplace, tenemos

$$\mathcal{L}[y'] + 2\mathcal{L}[y] = \mathcal{L}[\delta(t-2)], \qquad y(0) = 0 \tag{75}$$

Usando la transformada de Laplace para la derivada, obtenemos

$$sY(s) - y(0) + 2Y(s) = e^{-2s} \tag{76}$$

Sustituyendo las condiciones iniciales y despejando, resulta

$$Y(s) = \frac{e^{-2s}}{s+2} \tag{77}$$

Tomando la transformada inversa de esta expresión

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{e^{-2s}}{s+2}\right] \tag{78}$$

$$y(t) = u(t-2)e^{-2(t-2)} \tag{79}$$

Ejemplo 9:

Dr. J. Juan Rosales García Departamento de Ingeniería Eléctrica, DICIS-UGTO.

Resolver el siguiente problema de valor inicial

$$y''+2y'-3y=\delta(t-1)-3\delta(t-4), \quad y(0)=0, \quad y'(0)=0 \tag{80}$$

Solución: Aplicando la transformada de Laplace

$$\mathcal{L}[y''+2\mathcal{L}[y']-3\mathcal{L}[y]=\mathcal{L}[\delta(t-1)]-3\mathcal{L}[\delta(t-4)] \tag{81}$$

Tenemos

$$
\begin{aligned}
& s^2Y(s) - sy(0) - y'(0) + 2[sY(s) - y(0)] + 3Y(s) = \\
= \;& e^{-s} - 3e^{-4s} \qquad (82)
\end{aligned}
$$

Tomando en cuenta las condiciones iniciales y despejando $Y(s)$, resulta

$$
Y(s) = \frac{e^{-s}}{s^2 + 2s - 3} - \frac{3e^{-4s}}{s^2 + 2s - 3} \qquad (83)
$$

Desarrollemos en fracciones parciales la expresión

$$\frac{1}{s^2+2s-3} = \frac{1}{(s+3)(s-1)} = \frac{A}{s+3} + \frac{B}{s-1} \qquad (84)$$

Resultan las ecuaciones

$$\begin{aligned} A+B &= 0 \\ 3B-A &= 1 \end{aligned} \qquad (85)$$

Las soluciones de este sistema son $A = -1/4$ y $B = 1/4$.

Sustituyendo, tenemos

$$Y(s) = -\frac{1}{4}\frac{e^{-s}}{s+3} + \frac{1}{4}\frac{e^{-s}}{s-1} + \frac{3}{4}\frac{e^{-4s}}{s+3} - \frac{3}{4}\frac{e^{-4s}}{s-1} \quad (86)$$

Ahora, se toma la transformada inversa de (86), esto es

$$\begin{aligned} y(t) &= \mathcal{L}^{-1}[Y(s)] = && (87) \\ &= -\frac{1}{4}\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{e^{-s}}{s+3}\right] + \frac{1}{4}\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{e^{-s}}{s-1}\right] + \frac{3}{4}\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{e^{-4s}}{s+3}\right] - \\ &- \frac{3}{4}\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{e^{-4s}}{s-1}\right] \end{aligned}$$

Dr. J. Juan Rosales García
Departamento de Ingeniería Eléctrica, DICIS-UGTO.

Usando la tabla 4.4-I y el teorema 4.7.1, tenemos el resultado final

$$\begin{aligned} y(t) &= \frac{1}{4}u(t-1)\left[e^{(t-1)} - e^{-3(t-1)}\right] + \\ &+ \frac{3}{4}u(t-4)\left[e^{-3(t-4)} - e^{(t-4)}\right] \end{aligned} \tag{88}$$

Ejemplo 10:

Dr. J. Juan Rosales García
Departamento de Ingeniería Eléctrica, DICIS-UGTO.

Hallar la respuesta del sistema amortiguado masa-resorte representado por la ecuación

$$y'' + 3y' + 2y = \delta(t-3), \qquad y(0) = 0, \qquad y'(0) = 0 \tag{89}$$

Esta ecuación y sus condiciones iniciales nos dicen que el sistema se hallaba en reposo y en el tiempo $t = 3$, el sistema recibió un fuerte impacto.

Solución:

Aplicamos la transformada de Laplace a ambos lados de la ecuación (89)

$$\mathcal{L}[y''] + 3\mathcal{L}[y'] + 2\mathcal{L}[y] = \mathcal{L}[\delta(t-3)] \tag{90}$$

Tomando en cuenta las condiciones iniciales, resulta

$$s^2 Y(s) + 3sY(s) + 2Y(s) = e^{-3s} \tag{91}$$

Factorizando, tenemos

$$Y(s) = \frac{e^{-3s}}{s^2 + 3s + 2} \tag{92}$$

Podemos desarrollar en fracciones parciales la expresión

$$\frac{1}{s^2 + 3s + 2} = \frac{1}{(s+2)(s+1)} = \frac{A}{s+2} + \frac{B}{s+1} \tag{93}$$

Los valores de las constantes son $A = -1$ y $B = 1$. Entonces, sustituyendo estos valores en (93) y a su vez en (92), tenemos

$$Y(s) = -\frac{e^{-3s}}{s+2} + \frac{e^{-3s}}{s+1} \tag{94}$$

Ahora, aplicamos la transformada inversa de Laplace, esto es

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1}[Y(s)] = -\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{e^{-3s}}{s+2}\right) + \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{e^{-3s}}{s+1}\right) \tag{95}$$

Aplicando el teorema 4.7.1 y la tabla **4.4-I**, el resultado final es

$$y(t) = u(t-3)\left[e^{-(t-3)} - e^{-2(t-3)}\right] \tag{96}$$

Ejercicios Propuestos

Dr. J. Juan Rosales García
Departamento de Ingeniería Eléctrica, DICIS-UGTO.

1. $y'' - 4y' + 6y = 30u(t-\pi), \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 0$
2. $y'' = \begin{cases} t^2 & 0 \leq t < 1, \\ -t & 1 \leq t < 2, \\ t+1 & t \geq t_2 \end{cases}$
   $y(0) = 1, \quad y'(0) = 0$
3. $y'' + 2y' + 2y = \begin{cases} 1 & 0 \leq t < 2\pi, \\ t & 2\pi \leq t < 3\pi, \\ -1 & t \geq 3\pi \end{cases}$
   $y(0) = 2, \quad y'(0) = -1$
4. $y'' + y = \begin{cases} 3 & 0 \leq t < \pi, \\ 0 & t \geq \pi \end{cases}$
   $y(0) = 0, \quad y'(0) = 0$