Sesión 2: EDOs de Primer Orden

Dr. Juan Rosales García
Departamento de Ingeniería Eléctrica, DICIS-UGTO.

Competencias:

- Reconoce y resuelve una ED de variable separable.
- Reconoce y resuelve diferentes tipos de EDs reducibles a separables.

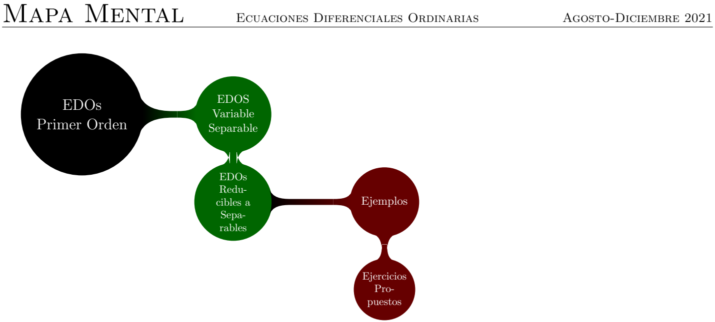
Contendio de la Sesión 2:

Dr. Juan Rosales García
Departamento de Ingeniería Eléctrica, DICIS-UGTO.

- EDOs de variables separables.
- EDOs reducibles a separables.
- Ejemplos.
- Ejercicios propuestos.

Mapa Mental

Dr. Juan Rosales García
Departamento de Ingeniería Eléctrica, DICIS-UGTO.



Sesión 2: EDOs de primer orden

Dr. Juan Rosales García
Departamento de Ingeniería Eléctrica, DICIS-UGTO.

De la definición general de una EDO, se deduce que una EDO de primer orden, en forma general, se escribe como

$$F(x, y, y') = 0 \tag{1}$$

Otra forma de escribir una ecuación diferencial de primer orden es

$$M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0 \tag{2}$$

Suponiendo que de (1) podemos despejar la derivada, resulta

$$y' = f(x, y) \tag{3}$$

No existe una solución general para la ecuación (3).

Sesión 2: EDOs de primer orden

Dr. Juan Rosales García
Departamento de Ingeniería Eléctrica, DICIS-UGTO.

Sin embargo, existen soluciones "generales" para la ecuación (3), cuando la función $f(x, y)$ tiene cierta forma, por ejemplo:

1. $y' = p(x)q(y), \quad \text{variables separables (VS)}$
2. $y' = f(\frac{y}{x}) \quad \text{Reducibles a VS}$
3. ED del tipo $y' = x^{\alpha-1} f\left(\frac{y}{x^{\alpha}}\right) \quad \text{Reducibles a VS.}$
4. ED del tipo$y' = \frac{y}{x} f\left(x^m y^n\right) \quad \text{Reducibles a VS.}$
5. $y' = f(ax + bx + c) \quad \text{Reducibles a VS}$

Método de Variables Separables

Dr. Juan Rosales García
Departamento de Ingeniería Eléctrica, DICIS-UGTO.

Supongamos que en la EDO

$$y' = f(x, y). \tag{4}$$

la función $f(x, y)$ es producto de dos funciones, $f(x, y) = p(x)q(y)$. En este caso, en lugar de escribir (4), escribiremos

$$\frac{dy}{dx} = p(x)q(y). \tag{5}$$

Podemos separar las variables

$$\frac{dy}{q(y)} = p(x)dx, \text{ e Integrando } \int \frac{dy}{q(y)} = \int p(x)dx \tag{6}$$

Método de Variables Separables

Dr. Juan Rosales García
Departamento de Ingeniería Eléctrica, DICIS-UGTO.

Se tiene la solución implícta

$$\int \frac{dy}{q(y)} = \int p(x)dx, \tag{7}$$

Si conocemos las funciones $p(x)$ y $q(y)$, entonces, podremos integrar y de esta manera obtener una solución que tendrá una de las dos formas: explícta ó implícita:

$$y = \phi(x, c) \tag{8}$$

$$\phi(x, y, c) = 0 \tag{9}$$

Así concluimos el método de variables separables.

EDOS Reducibles a Separables

Dr. Juan Rosales García
Departamento de Ingeniería Eléctrica, DICIS-UGTO.

Existen EDOs en las que no se puede separar las variables directamente, sin embargo haciendo algunos cambios de variable, éstas se reducen a variables separables. En esta sección analizremos las EDOS reducibles a separables, tales como:

1. $y' = f\left(\frac{y}{x}\right)$.
2. $y' = x^{\alpha-1} f\left(\frac{y}{x^{\alpha}}\right)$.
3. $y' = \frac{y}{x} f\left(x^m y^n\right)$.
4. $y' = f(ax + by + c)$.

EDO Reducible a Separable: Homogénea

Dr. Juan Rosales García
Departamento de Ingeniería Eléctrica, DICIS-UGTO.

Analizaremos la ecuación

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = f\left(\frac{y}{x}\right). \tag{10}$$

Supongamos que hacemos la siguiente sustitución

$$z(x) = \frac{y}{x}, \qquad \rightarrow \qquad y = z(x)x \tag{11}$$

EDO Reducible a Separable

Dr. Juan Rosales García
Departamento de Ingeniería Eléctrica, DICIS-UGTO.

Vamos a escribir la ecuación (10) en esta nueva función, para esto debemos derivar respecto a x (11)

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = z + x\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x} \tag{12}$$

Sustituyendo en (10), se tiene

$$z + x\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x} = f(z), \qquad x\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x} = f(z) - z \tag{13}$$

Esta ecuación es de variables separables

$$\frac{\mathrm{d}z}{f(z) - z} = \frac{\mathrm{d}x}{x} \tag{14}$$

EDO Reducible a Separable

Dr. Juan Rosales García
Departamento de Ingeniería Eléctrica, DICIS-UGTO.

Integrando, tenemos

$$\int \frac{\mathrm{d}z}{f(z) - z} = \int \frac{\mathrm{d}x}{x} \tag{15}$$

Esta expresión nos dice, si conoces la función $f(z)$, puedes integrar y se tendrá una solución del tipo

$$z = \phi(x, c), \qquad \text{o} \qquad \phi(x, z, c) = 0. \tag{16}$$

Luego, debemos recordar que hicimos la sustitución (11) y despejando tenemos $z = y/x$, es decir, la solución de la ecuación (10) será de la forma

$$\frac{y}{x} = \phi(x, c), \qquad \text{o} \qquad \phi(x, \frac{y}{x}, c) = 0. \tag{17}$$

EDO Reducible a Separable

Dr. Juan Rosales García
Departamento de Ingeniería Eléctrica, DICIS-UGTO.

Analizaremos la ecuación del tipo

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = x^{\alpha-1} f\left(\frac{y}{x^{\alpha}}\right). \tag{18}$$

Podemos observar que esta ecuación se reduce a la ecuación (10), cuando $\alpha = 1$. Por consiguiente, podemos hacer la sustitución

$$y = zx^{\alpha} \tag{19}$$

donde z es función de x, es decir $z = z(x)$. Para sustituir (19) en (18), derivamos respecto a x la expresión (19), esto es

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \alpha x^{\alpha-1} z + x^{\alpha} \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x} \tag{20}$$

EDO Reducible a Separable

Dr. Juan Rosales García
Departamento de Ingeniería Eléctrica, DICIS-UGTO.

Sustituyendo en (18), se tiene

$$\alpha x^{\alpha-1} z + x^{\alpha} \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x} = x^{\alpha-1} f(z) \tag{21}$$

Esta ecuación la podemos escribir de la siguiente manera

$$x^{\alpha} \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x} = x^{\alpha-1} f(z) - \alpha x^{\alpha-1} z = x^{\alpha-1}\Big(f(z) - \alpha z\Big) \tag{22}$$

Separando las variables

$$\frac{\mathrm{d}z}{f(z) - \alpha z} = \frac{\mathrm{d}x}{x}, \quad \text{integrando} \quad \int \frac{\mathrm{d}z}{f(z) - \alpha z} = \int \frac{\mathrm{d}x}{x} \tag{23}$$

Conociendo la función $f(z)$, podremos integrar y obtener la solución de la forma

$$z = \phi(x, c) \quad \xrightarrow{z = \frac{y}{x^{\alpha}}} \quad \frac{y}{x^{\alpha}} = \phi(x, c). \tag{24}$$

EDO Reducible a Separable

Dr. Juan Rosales García
Departamento de Ingeniería Eléctrica, DICIS-UGTO.

Supongamos que tenemos la siguiente EDO

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{y}{x} f(x^m y^n) \tag{25}$$

En el argumento de la función está el producto de x y y elevado a unas potencias m y n. Por consiguiente, supongamos la sustitución

$$z = x^m y^n \tag{26}$$

Para sustituir (26) en (25) derivamos

$$\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x} = m x^{m-1} y^n + n x^m y^{n-1} \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} \tag{27}$$

despejando la derivada, resulta

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{y}{nz} \left[\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x} - \frac{mz}{x} \right] \tag{28}$$

EDO Reducible a Separable

Sustituyendo (28) en (25),

$$\frac{y}{nz}\left[\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}-\frac{mz}{x}\right]=\frac{y}{x}f(z), \tag{29}$$

eliminando la y, y separando las variables se obtiene la ecuación

$$\frac{\mathrm{d}z}{z[nf(z)+m]}=\frac{\mathrm{d}x}{x} \tag{30}$$

Integrando

$$\int\frac{\mathrm{d}z}{z[nf(z)+m]}=\int\frac{\mathrm{d}x}{x} \tag{31}$$

Al conocer la función $f(z)$ podremos integrar y obtener la solución de la forma

$$z=\phi(x,c)\ \stackrel{z=x^m y^n}{\rightarrow}\ x^m y^n=\phi(x,c) \tag{32}$$

EDO Reducible a Separable

Dr. Juan Rosales García
Departamento de Ingeniería Eléctrica, DICIS-UGTO.

Supongamos que tenemos la EDO

$$\frac{dy}{dx} = f(ax + by + c). \tag{33}$$

No es de variable separable. Sin embargo, haciendo la sustitución

$$z = ax + by + c. \tag{34}$$

la EDO (33) se reduce a variables separables. Para esto, derivamos respecto a x la expresión (34)

$$\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x} = a + b\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} \tag{35}$$

EDO Reducible a Separable

Dr. Juan Rosales García
Departamento de Ingeniería Eléctrica, DICIS-UGTO.

de esta expresión despejamos $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$, esto es

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = -\frac{a}{b} + \frac{1}{b}\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x} \tag{36}$$

Luego, la sustituimos en (33)

$$-\frac{a}{b} + \frac{1}{b}\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x} = f(z), \quad \rightarrow \quad \frac{dz}{f(z) + \frac{a}{b}} = bdx \tag{37}$$

Integrando, resulta

$$\int \frac{\mathrm{d}z}{f(z) + \frac{a}{b}} = b\int \mathrm{d}x \tag{38}$$

Al conocer la función $f(z)$ podremos integrar y obtener la solución de la forma

$$z = \phi(x, C) \quad \overset{z=ax+by+c}{\rightarrow} \quad ax + by + c = \phi(x, C) \tag{39}$$

Conclusión: En esta Lección hemos visto los métodos generales para resolver los siguientes tipos de EDOS:

- $y' = f(x, y)$
- $y' = p(x)q(y)$
- $y' = f(\frac{y}{x})$
- $y' = x^{\alpha-1} f\left(\frac{y}{x^{\alpha}}\right)$.
- $y' = \frac{y}{x} f\left(x^m y^n\right)$.
- $y' = f(ax + bx + c)$

Una vez comprendido estos métodos pasaremos a la práctica.

Ejemplo 1:

Obtener la solución general de la ecuación diferencial

$$\frac{dy}{dx} = e^{x+y} \tag{40}$$

Solución: Usando la ley de los exponentes, la base es la misma, entonces $e^{x+y} = e^x e^y$ y de esta manera se puede escribir

$$\frac{dy}{dx} = e^x e^y \tag{41}$$

Separando, se tiene

$$\frac{dy}{e^y} = e^x dx \tag{42}$$

Una vez separadas las variables podemos integrar

$$\int \frac{dy}{e^y} = \int e^x dx \tag{43}$$

Realizando las integrales, resulta

$$-e^{-y} = e^{x} + c \tag{44}$$

donde c es una constante arbitraria. La constante arbitraria o de integración se obtiene de los valores iniciales (en este caso no tenemos valores iniciales). La solución dada (44) está en forma implícita. La forma explícita es

$$y = \ln\left(-\frac{1}{e^{x} + c}\right) \tag{45}$$

Para verificar que (45) es la solución de la ecuación, se debe sustituor (45) en (41). Para esto, derivamos (45) respecto a x. Tenemos

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{e^{x}}{e^{x} + c} \tag{46}$$

Sustituyendo (46) y (45) en (41), resulta

$$-\frac{e^x}{e^x + c} = e^x e^{\ln\left(-\frac{1}{e^x+c}\right)} = -\frac{e^x}{e^x + c} \tag{47}$$

Esta es una igualdad, lo que significa que la solución (45) es la solución general de la ecuación diferencial (41).

Ejemplo 2:

Dr. Juan Rosales García
Departamento de Ingeniería Eléctrica, DICIS-UGTO.

Obtener la solución general de la ecuación diferencial ordinaria

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{dx}} = (x^2 + 1)y \ln y \tag{48}$$

Solución: Esta ecuación es de variables separables, podemos escribirla de la siguiente manera

$$\frac{\mathrm{d}y}{y \ln y} = (x^2 + 1)\mathrm{d}x \;\rightarrow\; \int \frac{\mathrm{d}y}{y \ln y} = \int (x^2 + 1)\mathrm{d}x \tag{49}$$

Tomando en cuenta que $\mathrm{d} \ln y = \frac{1}{y}\mathrm{d}y$, podemos escribir

$$\int \frac{\mathrm{d}\ln y}{\ln y} = \int (x^2 + 1)\mathrm{d}x \tag{50}$$

Integrando, se tiene

$$\ln|\ln y| = x^3/3 + x + c \tag{51}$$

Otra forma de calcular la primer integral en (49) es haciendo la sustitución

$$t = \ln y, \; dt = \frac{1}{y} dy \tag{52}$$

sustituyendo

$$\int \frac{dy}{y \ln y} = \int \frac{dt}{t} = \ln|t| = \ln|\ln y| \tag{53}$$

Ejemplo 3:

Resolver el problema de valor inicial

$$x^2 y \mathrm{d}x = (x^3 + 1)(y^2 + 1)\mathrm{d}y, \qquad y(2) = 3. \tag{54}$$

Solución: La ecuación diferencial (54) está dada en la forma $M(x, y)\mathrm{d}x + N(x, y)\mathrm{d}y = 0$ y como se puede observar, se puede separar las variables de la siguiente manera

$$\frac{x^2 \mathrm{d}x}{x^3 + 1} = \left(\frac{y^2 + 1}{y}\right)\mathrm{d}y = \left(y + \frac{1}{y}\right)\mathrm{d}y \tag{55}$$

Integrando, se tiene

$$\int \frac{x^2 \mathrm{d}x}{x^3 + 1} = \int \left(y + \frac{1}{y}\right)\mathrm{d}y \tag{56}$$

La integral de la izquierda se resuelve mediante cambio de variable: Supongamos que $t = x^3 + 1$, entonces $\mathrm{d}t = 3x^2\mathrm{d}x$, luego $\frac{\mathrm{d}t}{3} = x^2\mathrm{d}x$, sustituyendo en (56),

$$\frac{1}{3}\int \frac{\mathrm{d}t}{t} = \int \left(y + \frac{1}{y}\right)\mathrm{d}y \tag{57}$$

Realizando las integrales, tenemos

$$\frac{1}{3}\ln t = \frac{y^2}{2} + \ln y + \ln c \tag{58}$$

Sustituyendo en esta ecuación $t = x^3 + 1$, resulta

$$\frac{1}{3}\ln\left(x^3 + 1\right) = \frac{y^2}{2} + \ln y + \frac{c}{3} \tag{59}$$

Dr. Juan Rosales García
Departamento de Ingeniería Eléctrica, DICIS-UGTO.

Donde hemos tomado la constante de integración como $c/3$, esto es por comodidad. Multiplicando toda la ecuación por 3, y usando las propiedades de los logaritmos, se tiene

$$\ln\left(\frac{x^3+1}{y^3}\right) = \frac{3}{2}y^2 + c \tag{60}$$

Esta es la solución general. Esto quiere decir que hay un número infinito de curvas representadas por la solución (60). Ahora, de todas esas curvas vamos a elegir una, la cual pasa por los puntos $x = 2$ y $y = 3$, esto es lo que quiere decir la condición inicial $y(2) = 3$.

Sustituyendo los valores iniciales en (60), tenemos

$$\ln\left(\frac{(2)^3+1}{(3)^3}\right)=\frac{3}{2}(3)^2+c, \qquad c=-\frac{27}{2}+\ln\left(\frac{1}{3}\right) \tag{61}$$

Finalmente, sustituimos el valor de c (61) en (60) y obtenemos la solución final del problema de valor inicial (54)

$$\ln\left(\frac{x^3+1}{y^3}\right)=\frac{3}{2}y^2-\frac{27}{2}+\ln\left(\frac{1}{3}\right). \tag{62}$$

Esta es la solución particular deseada.

Ejemplo 4:

Dr. Juan Rosales García
Departamento de Ingeniería Eléctrica, DICIS-UGTO.

Resolver la ecuación diferencial

$$x\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} - y = (x+y)\ln\left|\frac{x+y}{x}\right| \tag{63}$$

Solución: Escribamos esta ecuación de la siguiente manera:

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{y}{x} + \left(\frac{x+y}{x}\right)\ln\left|\frac{x+y}{x}\right| \tag{64}$$

Esta ecuación es homogénea, así que podemos transformarla en una ecuación con variables separables con la siguiente sustitución

$$\boxed{y = z(x)x \;\rightarrow\; z(x) = \tfrac{y}{x}} \tag{65}$$

Diferenciando respecto a x, tenemos

$$\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x} = \frac{x\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} - y}{x^2} \rightarrow \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = x\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x} + z \tag{66}$$

Sustituyendo en la ecuación (64), obtenemos

$$x\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x} = (1+z)\ln|1+z| \tag{67}$$

Como podemos ver, esta ecuación es de variables separables

$$\int \frac{\mathrm{d}z}{(1+z)\ln|1+z|} = \int \frac{\mathrm{d}x}{x} \tag{68}$$

Estas integrales son bastante sencillas de resolver si notamos que $\mathrm{d}\ln|z+1| = \frac{1}{z+1}\mathrm{d}z$, así

$$\int \frac{\mathrm{d} \ln|1+z|}{\ln|1+z|} = \int \frac{\mathrm{d}x}{x} \tag{69}$$

El resultado de integrar es

$$\ln\left|\ln|1+z|\right| = \ln|cx| \tag{70}$$

Usando las propiedades de los logaritmos, tenemos que

$$\ln|1+z| = cx \tag{71}$$

Ahora, regresando a las variables y, x, tenemos la solución general

$$\ln\left|\frac{x+y}{x}\right| = cx \tag{72}$$

Ejemplo 5:

Dr. Juan Rosales García
Departamento de Ingeniería Eléctrica, DICIS-UGTO.

Resolver la ecuación diferencial

$$xy' = y - xe^{y/x}. \tag{73}$$

Solución: Debido a que tenemos los términos $\frac{y}{x}$, entonces podemos usar la sustitución

$$y = zx \ \rightarrow \ z = \frac{y}{x} \tag{74}$$

Diferenciando respecto a x el primer término de la expresión (74), obtenemos

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = z + x\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x} \tag{75}$$

Sustituyendo en la ecuación original (73) tenemos la siguiente ecuación:

$$z + x\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x} = z - e^{z} \;\rightarrow\; x\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x} = -e^{z} \tag{76}$$

Separando variables

$$\int e^{-z}\mathrm{d}z = -\int \frac{\mathrm{d}x}{x} \tag{77}$$

Integrando, tenemos

$$-e^{-z} = -\ln|x| - \ln|c| \;\rightarrow\; e^{-z} = \ln|cx| \tag{78}$$

Ahora recordamos que hicimos el cambio $z = y/x$, lo sustituimos en la última ecuación de (78) y obtenemos

$$\ln|cx| = e^{-y/x} \tag{79}$$

Ejemplo 6:

Dr. Juan Rosales García
Departamento de Ingeniería Eléctrica, DICIS-UGTO.

Hallar la solución general de la ecuación diferencial:

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \sqrt{4x + 2y - 1}. \tag{80}$$

Solución: Según el método antes visto, para resolver este tipo de ecuación debemos hacer el cambio:

$$z = 4x + 2y - 1 \tag{81}$$

Ahora, para sustituir (81) en la ecuación (80), debemos encontrar la derivada $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$ en términos de la nueva función $z(x)$. Para esto, calculamos la derivada en (81), respecto a x:

$$\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x} = 4 + 2\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} \tag{82}$$

de donde obtenemos:

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x} - 2 \tag{83}$$

Sustituyendo en la ecuación original (80), tenemos:

$$\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x} - 2 = \sqrt{z} \quad \rightarrow \quad \frac{dz}{dx} = 2\sqrt{z} + 4 \tag{84}$$

De esta forma obtenemos una ecuación con variables separables, la cual podemos resolver sin ningún problema. Integrando

$$\int \frac{\mathrm{d}z}{\sqrt{z}+2} = 2\int \mathrm{d}x \tag{85}$$

Dr. Juan Rosales García
Departamento de Ingeniería Eléctrica,
DICIS-UGTO.

Para calcular la integral de lado izquierdo hacemos el cambio de variable

$$u = \sqrt{z}, \qquad \mathrm{d}u = \frac{1}{2} z^{-1/2} \mathrm{d}z, \quad 2u\mathrm{d}u = \mathrm{d}z \tag{86}$$

Sustituyendo en (85), obtenemos:

$$\begin{aligned} 2\int \frac{u}{u+2}\mathrm{d}u &= 2\int \left(1 - \frac{2}{u+2}\right)\mathrm{d}u \\ &= 2\left(u - 2\ln|u+2|\right) \\ &= 2u - 4\ln|u+2| \end{aligned} \tag{87}$$

Recordando que $u = \sqrt{z}$, tenemos que la integral es:

$$\int \frac{\mathrm{d}z}{\sqrt{z}+2} = 2\sqrt{z} - 4\ln|\sqrt{z}+2| \tag{88}$$

Regresando a las variables x, y, e integrando la parte derecha de la ecuación (85), resulta que la solución general de la ecuación (80) está dada por la expresión

$$\sqrt{4x+2y-1} - 2\ln|\sqrt{4x+2y-1}+2| = x + c \tag{89}$$

Ejemplo 7:

Resolver la ecuación diferencial

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = (x+y)^2 \tag{90}$$

Solución: Hagamos la sustitución

$$z = x + y \;\rightarrow\; \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x} = 1 + \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} \;\rightarrow\; \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = -1 + \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x} \tag{91}$$

Sustituyendo este resultado en (90), tenemos:

$$-1 + \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x} = z^2 \;\rightarrow\; \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x} = z^2 + 1 \tag{92}$$

Separando las variables e integrando

$$\int \frac{\mathrm{d}z}{z^2+1} = \int \mathrm{d}x \;\rightarrow\; \arctan z = x + c \tag{93}$$

Recordando que $z = x + y$, tenemos como resultado

$$\arctan(x+y) = x + c \quad \rightarrow \quad x + y = \tan(x+c). \quad (94)$$

Ejemplo 8:

Hallar la solución general de la ecuación

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{y}{x}\left(\ln|y| - \ln|x|\right) \tag{95}$$

Solución: La ecuación (95) la podemos escribir de la siguiente manera:

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{y}{x}\ln\left|\frac{y}{x}\right| \tag{96}$$

Hagamos la sustitución

$$z = \frac{y}{x} \;\rightarrow\; y = zx \;\rightarrow\; \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = z + x\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x} \tag{97}$$

Sustituyendo en (96), tenemos:

$$x\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x} = z(\ln|z| - 1) \tag{98}$$

Integrando

$$\int \frac{\mathrm{d}z}{z(\ln|z| - 1)} = \int \frac{\mathrm{d}x}{x} \tag{99}$$

obtenemos:

$$\ln|\ln|z| - 1| = \ln|x| + \ln|c| \ \rightarrow \ \ln\left|\frac{\ln|z| - 1}{cx}\right| = 0 \tag{100}$$

Esta expresión la podemos escribir como

$$\ln|z| = cx + 1 \tag{101}$$

Dr. Juan Rosales García
Departamento de Ingeniería Eléctrica, DICIS-UGTO.

Recordando la sustitución $z = \frac{y}{x}$, obtenemos finalmente la solución de la ecuación (95)

$$\ln\left|\frac{y}{x}\right| = cx + 1 \tag{102}$$

Ejercicios Propuestos

Hallar las soluciones de las siguientes ecuaciones diferenciales:

1. $y' = -4xy^2, \quad y(0) = 1$
2. $y' = y\sin(2x), \quad y(\pi/4) = 1$
3. $(1 - xy + x^2y^2)dx + (x^3y - x^2)dy = 0$
4. $y' = \sin(x - y + 1)$
5. $xy' = \frac{1-x^2}{y}$
6. $y' = 10^{x+y}$
7. $(y + 1)dx - (1 - x)dy = 0$
8. $(1 + e^{2x})y^2dy - e^x dx = 0 \quad y(0) = 0$
9. $y' = \frac{x^2+1}{y^4+3y}$
10. $xy' = x\sqrt{y - x^2} + 2y$
11. $y' = 2x + y + 4$
12. $(y + \sqrt{xy})dx - xdy = 0$