Sesión 20. El Teorema de Convolución

Dr. J. Juan Rosales García
Departamento de Ingeniería Eléctrica, DICIS-UGTO.

Sesión 20. El Teorema de Convolución

Dr. J. Juan Rosales García
Departamento de Ingeniería Eléctrica, DICIS-UGTO.

Competencias:

Dr. J. Juan Rosales García Departamento de Ingeniería Eléctrica, DICIS-UGTO.

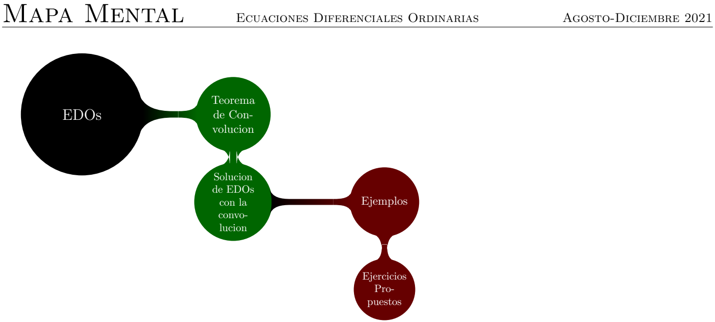
- Comprende el teorema de convolución y su importancia.
- Desarrolla habilidades en la aplicación del teorema de convolución.

Contenido de la Sesión 20:

- Conoce el teorema de convolución.
- Resuelve EDOs usando el teorema de convolución.

Mapa Mental

Dr. J. Juan Rosales García Departamento de Ingeniería Eléctrica, DICIS-UGTO.



La convolución

Podemos ver a la convolución de dos funciones $f(x)$ y $g(z)$ como la función resultante que aparece despues de efectuar los siguientes pasos:

- girar respecto del origen los valores de una de ellas, es decir $g(z) = g(-z)$ para todo z desde $-\infty$ a ∞.
- ir trasladando la función girada sobre la otra $f(z)g(x-z)$.

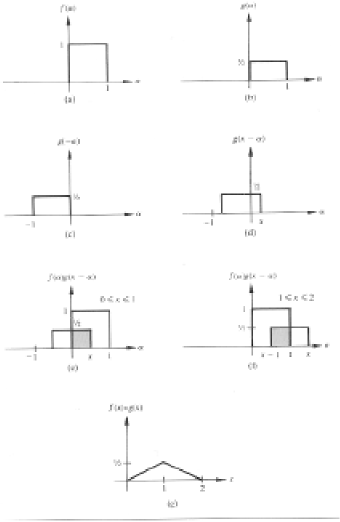
- en cada punto x calculamos el valor que resulta de sumar los productos obtenidos de multiplicar para todos los z los correspondiente valores de las funciones $f(z)$ y $g(x-z)$.

En esencia estamos calculando para cadavalor de x una especie de valor ponderado de una de las funciones $f(x)$ con los valores de la otra $g(x)$. En el caso de que el área encerrada por la curva de $g(x)$ fuese igual 1, entonces estaríamos calculando para x una media ponderada. Matematicamente la expresión para esta operación es:

$$f(x) * g(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(z)g(x-z)dz = h(x) \qquad (1)$$

De la expresión anterior puede verse como para un valor fijo de x los origines de las funciones f y g estan desplazados justamente en ese valor x.

Los valores de f para z crecientes van siendo multiplicados por valores de g para $(x - z)$ decrecientes. En el caso discreto que veremos más adelante esta visión intuitiva de la convolución quedará aún más clara.


(a)
(b)
(c)
(d)
(e)
(f)
(g)

Teorema de convolución

Dr. J. Juan Rosales García
Departamento de Ingeniería Eléctrica, DICIS-UGTO.

Si aplicamos la transformada de Laplace para resolver ecuaciones diferenciales con valores iniciales, probablemente la dificultad aparezca cuando tengamos que descomponer un complicado producto en la suma de dos o más términos simples usando fracciones parciales. A pesar de que el álgebra involucrada es elemental, puede llegar a ser bastante laboriosa.

Sería factible tener una regla de productos para las transformadas inversas de Laplace. Es decir, poder calcularlas a partir de las transformadas inversas de cada uno de sus factores. Esta regla existe y de esto nos ocuparemos en esta sección.

Deseamos calcular la TIL del producto $F(s)$ y $G(s)$

$$\mathcal{L}^{-1}[F(s)G(s)] \tag{2}$$

donde

$$\mathcal{L}^{-1}[F(s)] = f(t), \qquad \mathcal{L}^{-1}[G(s)] = g(t)$$

De la definición de la transformada de Laplace, tenemos

$$F(s) = \int_0^\infty f(\tau)e^{-s\tau}\mathrm{d}\tau, \qquad G(s) = \int_0^\infty g(u)e^{-su}\mathrm{d}u \tag{3}$$

Donde estamos tomando a τ y u como las variables de integración (esto no cambia nada).

De tal manera que el producto de $F(s)$ y $G(s)$ lo podemos escribir como

$$F(s)G(s) = \left(\int_0^{\infty} f(\tau)e^{-s\tau}\mathrm{d}\tau\right)\left(\int_0^{\infty} g(u)e^{-su}\mathrm{d}u\right) \tag{4}$$

La primer integral no contiene a u, por lo tanto, podemos escribirla dentro de la segunda integral, esto nos da

$$F(s)G(s) = \int_0^{\infty}\left(\int_0^{\infty} f(\tau)e^{-s\tau}\mathrm{d}\tau\right) g(u)e^{-su}\mathrm{d}u \tag{5}$$

Luego, combinando este resultado en una integral doble, resulta

$$F(s)G(s) = \int_0^\infty \left(\int_0^\infty f(\tau)g(u)e^{-s(\tau+u)}\mathrm{d}\tau\mathrm{d}u \right) \tag{6}$$

Haciendo la sustitución

$$\begin{aligned} t &= \tau + u \to \tau = t - u, \quad \frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}u} = 1, \quad 0 < \tau < \infty \\ &\iff u < t < \infty \end{aligned} \tag{7}$$

Por lo tanto, tenemos

$$F(s)G(s) = \int_0^\infty \int_u^\infty f(t-u)g(u)e^{-st}\mathrm{d}t\mathrm{d}u \tag{8}$$

Ahora, cambiando el orden en la integral doble, resulta

$$F(s)G(s) = \int_0^{\infty} \int_0^{t} f(t-u)g(u)e^{-st}\mathrm{d}u\mathrm{d}t \tag{9}$$

Podemos segregar los términos que contienen u y escribir

$$F(s)G(s) = \int_0^{\infty} \left(\int_0^{t} f(t-u)g(u)\mathrm{d}u \right) e^{-st}\mathrm{d}t \tag{10}$$

Si hacemos la siguiente definición

$$h(t) = \int_0^{t} f(t-u)g(u)\mathrm{d}u \tag{11}$$

entonces

$$F(s)G(s) = \int_0^{\infty} h(t)e^{-st}\mathrm{d}t \tag{12}$$

Esto es

$$F(s)G(s) = \mathcal{L}[h(t)] = H(s). \tag{13}$$

Conclusión: Hemos expresado el producto de $F(s)$ y $G(s)$ como una transformada de Laplace. Ahora podemos calcular fácilmente la transformada inversa del producto de $F(s)$ y $G(s)$, esto nos da

$$\mathcal{L}^{-1}[F(s)G(s)] = \mathcal{L}^{-1}[H(s)] = h(t) = \int_0^t f(t-u)g(u)\mathrm{d}u \tag{14}$$

Estos resultados los podemos formular en el teorema siguiente.

Theorem

(*convolución*) *sean* $f(t)$ *y* $g(t)$ *dos funciones definidas en* $[0, \infty)$, *para las cuales la transformada de Laplace existe. Entonces, el producto de sus transformadas* $F(s)$ *y* $G(s)$ *es la transformada* $H(s)$ *de la convolución de* $h(t)$ *de* $f(t)$ *y* $g(t)$ *representada por* $\mathcal{L}[f * g](t)$ *y se define como*

$$\boxed{h(t) = (f * g)(t) = f * g = \int_0^t f(\tau)g(t-\tau)\mathrm{d}\tau \quad \forall t \geq 0} \tag{15}$$

Con esta notación podemos reescribir los resultados anteriores como

$$\mathcal{L}^{-1}[F(s)G(s)] = f * g \tag{16}$$

que es equivalente a

$$\mathcal{L}^{-1}[F(s)G(s)] = \mathcal{L}^{-1}[F(s)] * \mathcal{L}^{-1}[G(s)] \tag{17}$$

Esta fórmula nos dice: La transformada inversa de Laplace de un producto es la convolución de las transformadas inversas de Laplace.

Propiedades de la convolución:

Dr. J. Juan Rosales García
Departamento de Ingeniería Eléctrica, DICIS-UGTO.

- $f * g = g * f$
- $(f * g) * h = f * (g * h)$
- $f * (g_1 + g_2) = f * g_1 + f * g_2$
- $f * 0 = 0 * f = 0$
- $f * 1 = 1 * f \neq f$

Theorem

Sean $f(t)$ y $g(t)$ funciones continuas por partes en $[0, \infty)$ y de orden exponencial. Entonces, la transformada de Laplace de la convolución de $f(t)$ y $g(t)$ está dada por la expresión

$$\boxed{\mathcal{L}[(f * g)(t)] = \mathcal{L}[f(t)]\mathcal{L}[g(t)] = F(s)G(s)} \tag{18}$$

$\triangle$ Tenemos

$$
\begin{aligned}
F(s)G(s) &= \left\{\int_0^\infty e^{-s\tau} f(\tau)\mathrm{d}\tau\right\}\left\{\int_0^\infty e^{-su} g(u)\mathrm{d}u\right\} = \\
&= \int_0^\infty \int_0^\infty e^{-s(\tau+u)} f(\tau)g(u)\mathrm{d}\tau\mathrm{d}u = \\
&= \int_0^\infty f(\tau)\mathrm{d}\tau \int_0^\infty e^{-s(\tau+u)} g(u)\mathrm{d}u \qquad (19)
\end{aligned}
$$

Dr. J. Juan Rosales García
Departamento de Ingeniería Eléctrica, DICIS-UGTO.

Hagamos un cambio de variables $t = \tau + u$, donde τ está fijo. Entonces, $u = t - \tau$ y los límites de integración para t son de τ a ∞. Por lo consiguiente, tenemos

$$F(s)G(s) = \int_0^{\infty} f(\tau)\mathrm{d}\tau \int_{\tau}^{\infty} e^{-st} g(t-\tau)\mathrm{d}t \qquad (20)$$

La región de integración $0 \leq \tau < \infty$, $\tau \leq t < \infty$.

Cambiando el orden de integración obtenemos la región de integración como $0 \leq t < \infty$, $0 \leq \tau \leq t$. Por consiguiente

$$
\begin{aligned}
F(s)G(s) &= \int_0^\infty e^{-st}\mathrm{d}t \int_0^t f(\tau)g(t-\tau)\mathrm{d}\tau = \\
= & \int_0^\infty e^{-st}\Big\{\int_0^t f(\tau)g(t-\tau)\mathrm{d}\tau\Big\}\mathrm{d}t = \\
= & \int_0^\infty \left[(f * g)(t)\right]\mathrm{d}t = \mathcal{L}[f(t) * g(t)] \quad \triangle \qquad (21)
\end{aligned}
$$

Ejemplo 1:

Dr. J. Juan Rosales García Departamento de Ingeniería Eléctrica, DICIS-UGTO.

Dada la transformada de Laplace

$$Y(s) = \frac{1}{(s^2+1)^2} \tag{22}$$

Hallar la función $f(t)$.

Solución: Escribamos la expresión (22) de la siguiente manera:

$$Y(s) = \frac{1}{s^2+1} \cdot \frac{1}{s^2+1} \tag{23}$$

Dr. J. Juan Rosales García
Departamento de Ingeniería Eléctrica, DICIS-UGTO.

Entonces

$$\begin{aligned} y(t) &= \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s^2+1}\right] * \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s^2+1}\right] = \sin t * \sin t = \\ &= \int_0^t \sin\tau \sin(t-\tau)\mathrm{d}\tau = -\frac{1}{2}\int_0^t \cos t \mathrm{d}\tau + \\ &+ \frac{1}{2}\int_0^t \cos(2\tau - t)\mathrm{d}\tau = -\frac{t}{2}\cos t + \frac{1}{2}\sin t \quad (24) \end{aligned}$$

Ejemplo 2:

Dr. J. Juan Rosales García
Departamento de Ingeniería Eléctrica,
DICIS-UGTO.

Usar la convolución para resolver la ecuación

$$y'' + ay' + by = f(t), \quad y(0) = y'(0) = 0 \tag{25}$$

donde a y b son ciertas constantes.

Solución:

Supongamos por un momento que $f(t) = \delta(t)$, es decir, que la función $f(t)$ es igual a la función delta de Dirac. Analicemos el problema de valor inicial

$$x'' + ax' + bx = \delta(t), \quad y(0) = y'(0) = 0 \tag{26}$$

En la teoría de circuitos eléctricos, $x(t)$ se le conoce como *la respuesta al impulso* $\delta(t)$. Aplicamos la transformada de Laplace a la ecuación (26), con el fin de obtener una expresión para $x(t)$.

$$\mathcal{L}[x''] + a\mathcal{L}[x'] + b\mathcal{L}[x] = \mathcal{L}[\delta(t)] \tag{27}$$

Obtenemos

$$s^2X(s) - sx(0) - x'(0) - asX(s) - sx(0) + bX(s) = 1 \tag{28}$$

Recordemos que la transformada de Laplace de la función delta de Dirac es $\mathcal{L}[\delta(t-t_0)] = e^{-st_0}$ y para el caso en que $t_0 = 0$, tenemos $\mathcal{L}[\delta(t)] = 1$.
Al sustituir las condiciones iniciales y despejar $X(s)$, resulta

$$X(s) = \frac{1}{s^2 + as + b} \tag{29}$$

Aplicando la transformada de Laplace a la ecuación (25), tomando en cuenta las condiciones iniciales y despejando a $Y(s)$, obtenemos, en analogía con (29), la siguiente expresión:

$$Y(s) = \frac{F(s)}{s^2 + as + b} \tag{30}$$

donde $F(s) = \mathcal{L}[f(t)]$.

Dr. J. Juan Rosales García Departamento de Ingeniería Eléctrica, DICIS-UGTO.

Esta misma expresión la podemos escribir como

$$Y(s) = \frac{1}{s^2 + as + b} F(s) \tag{31}$$

Tomando en cuenta el resultado (29) podemos escribir la expresión (30) como

$$Y(s) = X(s)F(s) \tag{32}$$

Luego, tomando la inversa

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1}[Y(s)] = \mathcal{L}^{-1}[X(s)F(s)] = \mathcal{L}^{-1}[X(s)] * \mathcal{L}^{-1}[F(s) \tag{33}$$

Dr. J. Juan Rosales García
Departamento de Ingeniería Eléctrica, DICIS-UGTO.

Tenemos que la solución al problema de valor inicial (25) es

$$y(t) = x(t) * f(t) \tag{34}$$

Es decir, podemos resolver $y(t)$ conociendo sólo la función $f(t)$ y la solución $x(t)$ de la ecuación diferencial con el mismo lado izquierdo pero con la función $f(t) = \delta(t)$.

Ejemplo 3:

Dr. J. Juan Rosales García Departamento de Ingeniería Eléctrica, DICIS-UGTO.

Usar la convolución para resolver el problema de valor inicial

$$y' + 2y = f(t), \qquad y(0) = 0 \tag{35}$$

Solución: Sea la ecuación

$$x' + 2x = \delta(t), \qquad y(0) = 0 \tag{36}$$

Aplicando la transformada de Laplace

$$\mathcal{L}[x'] + 2\mathcal{L}[x] = \mathcal{L}[\delta(t)] \tag{37}$$

Dr. J. Juan Rosales García
Departamento de Ingeniería Eléctrica, DICIS-UGTO.

Tomando en cuenta la condición inicial, tenemos

$$sX(s) + 2X(s) = 1 \tag{38}$$

Despejando, resulta

$$X(s) = \frac{1}{s+2} \tag{39}$$

Luego, aplicando la transformada de Laplace al problema original (35) y haciendo un poco de álgebra, tendremos

$$Y(s) = \frac{1}{s+2}F(s) \tag{40}$$

Tomando la inversa y aplicando los resultados de (16), resulta

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1}[Y(s)] = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s+2}\right] * \mathcal{L}^{-1}\left[F(s)\right] \qquad (41)$$

$$y(t) = e^{-2t} * f(t) \qquad (42)$$

Dr. J. Juan Rosales García Departamento de Ingeniería Eléctrica, DICIS-UGTO.

Si, por ejemplo, suponemos que $f(t) = t$, entonces, debemos calcular la convolución

$$y(t) = e^{-2t} * t = \int_0^t e^{-2(t-\tau)}\tau \mathrm{d}\tau = e^{-2t}\int_0^t e^{2\tau}\tau \mathrm{d}\tau \tag{43}$$

La integral

$$\int_0^t e^{2\tau}\tau \mathrm{d}\tau = e^{2t}\left(\frac{t}{2} - \frac{1}{4}\right)$$

Sustituyendo en (43), obtenemos el resultado final

$$y(t) = \frac{t}{2} - \frac{1}{4} \tag{44}$$

Este resultado es la solución de la ecuación (35) para $f(t) = t$.

Ejemplo 4:

Dr. J. Juan Rosales García
Departamento de Ingeniería Eléctrica, DICIS-UGTO.

Evaluar la TL de $f(t) = e^t$ convolución $g(t) = \sin t$.
Solución. Del teorema de convolución, tenemos

$$e^t * \sin t = \int_0^t e^\tau \sin(t-\tau)d\tau \tag{45}$$

Aplicando la TL, resulta

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\Big\{ \int_0^t e^\tau \sin(t-\tau)d\tau \Big\} &= \mathcal{L}\{e^t\} \cdot \mathcal{L}\{\sin t\} = \\ = \frac{1}{s-1} \cdot \frac{1}{s^2+1} &= \frac{1}{(s-1)(s^2+1)} \end{aligned} \tag{46}$$

Ejercicios Propuestos

1. $y' - 3y = \delta(t-2), \quad y(0) = 0$
2. $y' + y = \delta(t-1), \quad y(0) = 2$
3. $y'' - y = \left\{ \begin{matrix} e^{2t}, & 0 \leq t < 2 \\ 1, & t \geq 2 \end{matrix} \right\}, \; y(0) = 3 \; y'(0) = -1$
4. $y'' + 6y' + 5y = t - tu(t-2), \; y(0) = 1, \; y'(0) = 0$