Sesión 23. Series de Potencias

Dr. J. Juan Rosales García
Departamento de Ingeniería Eléctrica, DICIS-UGTO.

Competencias:

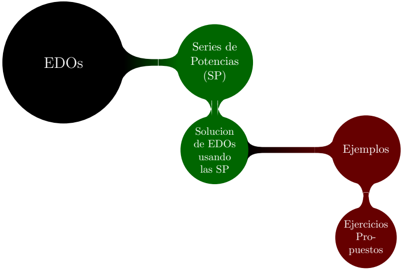
- Conoce las propiedades de las series de potencias.
- Comprende la importancia de las series de potencia en la solución de las EDOS con coeficientes variables.

Contenido de la Sesión 23:

- Definición de Serie de Potencias (SP).
- Propiedades de las SP
- Solución de EDOs con coefiecientes constantes.

Mapa Mental

Dr. J. Juan Rosales García
Departamento de Ingeniería Eléctrica, DICIS-UGTO.



Resúmen

Hemos aprendido diferentes métodos de solución de las ED. Excepto la ED de Cauchy-Euler, siempre hemos supuesto que los coeficientes de la ED son constantes. Sin embargo, hay ED muy importantes con coeficientes que no son constantes y en tal caso es imposible resolver este tipo de ecuaciones con los métodos antes vistos. No obstante, existe un excelente método para resolver ED con coeficientes variables. Este método se basa en las series de potencia. Desde luego, este es un método aproximado, pero en tal caso no nos queda más que conformarnos con ello. Antes de entrar en materia veamos algunas definiciones que serán útiles posteriormente.

Series de potencias

Dr. J. Juan Rosales García
Departamento de Ingeniería Eléctrica, DICIS-UGTO.

Una serie infinita que tiene la forma

$$\boxed{a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)^2 +, \ldots, + a_m(x - x_0)^m + \ldots \equiv \sum_{m=0}^{\infty} a_m (x - x_0)^m} \quad ($$

donde x_0 y $a_0, a_1, \ldots, a_m, \ldots$ son constantes, a estas últimas se les llama coeficientes de la serie, y la serie se le llama serie de potencias de $x - x_0$. A x_0 se le conoce como el centro de la serie y x es una variable.

En particular, el centro x_0 puede estar en el origen, es decir $x_0 = 0$, y en tal caso, la serie (1) se reduce a una serie de potencias en x

$$\boxed{a_0 + a_1 x + a_2 x^2 +, \ldots, + a_m x^m + \cdots \equiv \sum_{m=0}^{\infty} a_m x^m} \tag{2}$$

La suma de los primeros n términos de (1), denominada *suma parcial*, se representa por

$$s_n(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)^2 +, \ldots, + a_n(x - x_0)^n \tag{3}$$

donde $n = 0,\ 1,\ 2 \ldots$ Es claro que si omitimos los primeros s_n términos de (1), la expresión que nos queda es

$$R_n(x) = a_{n+1}(x - x_0)^{n+1} + a_{n+2}(x - x_0)^{n+2} + \ldots \tag{4}$$

A esta expresión se le conoce como *residuo de la serie* (1) después del término $a_n(x - x_0)^n$.

$$\begin{aligned}
\sum_{m=0}^{\infty} a_m(x-x_0)^m = \\
&= a_0 + a_1(x-x_0) + \cdots + a_n(x-x_0)^n + \cdots = \\
&= s_n(x) + R_n(x) \qquad (5)
\end{aligned}$$

Para las primeras sumas parciales, tenemos

$$\begin{aligned}
s_0(x) &= a_0 \\
R_0(x) &= a_1(x-x_0) + a_2(x-x_0)^2 + \ldots \\
s_1(x) &= a_0 + a_1(x-x_0) \\
R_1(x) &= a_2(x-x_0)^2 + a_3(x-x_0)^3 + \ldots \\
s_2(x) &= a_0 + a_1(x-x_0) + a_2(x-x_0)^2 \\
R_2(x) &= a_3(x-x_0)^3 + a_4(x-x_0)^4 + \ldots \qquad (6)
\end{aligned}$$

De esta manera hemos asociado a la serie (1) una sucesión de sumas parciales $s_0(x)$, $s_1(x)$, $s_2(x), \ldots$ y sus respectivos residuos $R_0(x)$, $R_1(x)$, $R_2(x) \ldots$
Si para alguna $x = x_1$ la suma converge, es decir, si se cumple la relación

$$\lim_{n\to\infty} s_n(x_1) = s(x_1) \tag{7}$$

entonces, decimos que la serie (1) *converge* en $x = x_1$ y que el número $s(x_1)$ es el *valor o la suma* de la serie (1) en $x = x_1$, y se escribe

$$s(x_1) = \sum_{m=0}^{\infty} a_m (x_1 - x_0)^m \tag{8}$$

Entonces, para cada n se tiene

$$s(x_1) = s_n(x_1) + R_n(x_1) \tag{9}$$

Si la suma diverge en $x = x_1$, decimos que la serie (1) *diverge* en $x = x_1$.
Para la convergencia de la serie (1) se tiene que para cualquier $\epsilon > 0$ existe un $N(\epsilon)$ tal que, de (9), se deduce

$$|R_n(x_1)| = |s(x_1) - s_n(x_1)| < \epsilon, \quad \forall n > N \tag{10}$$

Desde el punto de vista geométrico esto significa que toda $s_n(x_1)$ con $n > N$, está entre $s - \varepsilon$ y $s + \varepsilon$, figura 1.

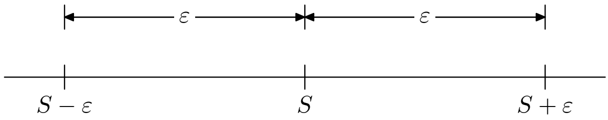


Figure: Gráfica de la desigualdad (10).

Desde el punto de vista práctico, esto quiere decir, que en el caso de convergencia es posible aproximar la suma $s(x_1)$ de (1) mediante $s_n(x_1)$ con la presición que se desee, tomando a n lo suficientemente grande.

Intervalo y radio de convergencia

Dr. J. Juan Rosales García
Departamento de Ingeniería Eléctrica, DICIS-UGTO.

Si ponemos $x = x_0$ en la serie (1) observamos que, excepto el término a_0, todos los demás términos son cero. Por consiguiente, la serie (1) siempre converge en $x = x_0$. Existen algunos casos en los cuales $x = x_0$ puede ser la única posibilidad de convergencia. Tales series no son realmente de interés práctico.
Si existen valores de x para los cuales la serie (1) converge, estos valores forman un intervalo, llamado *intervalo de convergencia de la serie* .

Dr. J. Juan Rosales García
Departamento de Ingeniería Eléctrica,
DICIS-UGTO.

Si tal intervalo existe y además es finito y tiene el punto medio x_0, figura 2.

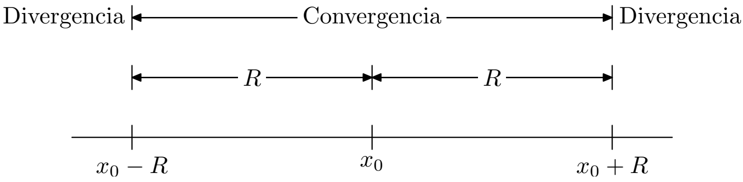


Figure: Intervalo de convergencia (10) de una serie de potencias con centro en x_0.

Dr. J. Juan Rosales García
Departamento de Ingeniería Eléctrica,
DICIS-UGTO.

$$|x - x_0| < R \tag{11}$$

y la serie (1) converge para toda x que satisfaga la relación (11), y diverge para toda x que cumpla la relación $|x - x_0| > R$, entonces, al número R se le conoce como *radio de convergencia de la serie* (1).

El radio de convergencia se puede calcular por cualquiera de las dos fórmulas

$$\boxed{\lim_{m\to\infty}\left|\frac{a_{m+1}}{a_m}\right| = \frac{1}{R} \qquad \lim_{m\to\infty}\sqrt[m]{|a_m|} = \frac{1}{R}} \tag{12}$$

con la única condición de que estos límites existan y que sean diferentes de cero. Si los límites son infinitos, entonces, la serie (1) converge sólo en el centro x_0.

Si para cada x la serie (1) converge, entonces, ésta tiene un valor dado $s(x)$. En tal caso, decimos que la serie (1) representa a la función $s(x)$ en el intervalo de convergencia y escribimos

$$s(x) = \sum_{m=0}^{\infty} a_m (x - x_0)^m, \qquad |x - x_0| < R \tag{13}$$

El dominio de la función será el intervalo de convergencia de la serie. Si la serie tiene un radio de convergencia $R > 0$, entonces $s(x)$ es continua, diferenciable e integrable en el intervalo $|x - x_0| < R$.

Dr. J. Juan Rosales García
Departamento de Ingeniería Eléctrica, DICIS-UGTO.

Propiedades de las series de potencias

Multiplicación de series por una constante: Si multiplicamos una serie de potencias por una constante, entonces la constante se puede colocar dentro de la suma, es decir

$$\boxed{c\sum_{m=0}^{\infty} a_m(x-x_0)^m = \sum_{m=0}^{\infty} ca_m(x-x_0)^m} \qquad (14)$$

Suma de series: Dos series de potencias designadas por las funciones $f(x)$ y $g(x)$

$$f(x) = \sum_{m=0}^{\infty} a_m (x - x_0)^m, \qquad g(x) = \sum_{m=0}^{\infty} b_m (x - x_0)^m \tag{15}$$

con radios de convergencia positivos pueden sumarse término a término en puntos comunes de sus intervalos abiertos de convergencia.

Si la primera serie converge para $|x - x_0| < R_1$ y la segunda converge para $|x - x_0| < R_2$, entonces

$$\boxed{f(x) + g(x) = \sum_{m=0}^{\infty}(a_m + b_m)(x - x_0)^m} \tag{16}$$

para $|x - x_0| < R$, donde R es el menor de R_1 y R_2.

Dr. J. Juan Rosales García
Departamento de Ingeniería Eléctrica, DICIS-UGTO.

Entonces, las combinaciones lineales de series de potencias pueden formarse término a término, esto es

$$\boxed{c_1 f(x) + c_2 g(x) = \sum_{m=0}^{\infty} (c_1 a_m + c_2 b_m)(x - x_0)^m} \tag{17}$$

Multiplicación de series: Dos series de potencias se pueden multiplicar término a término. Sean

$$f(x) = \sum_{m=0}^{\infty} a_m (x - x_0)^m, \quad g(x) = \sum_{m=0}^{\infty} b_m (x - x_0)^m \quad (18)$$

dos series con radios de convergencia positivos. Entonces, la multiplicación de estas series es

$$\begin{aligned} f(x)g(x) &= \sum_{m=0}^{\infty} (a_0 b_m + a_1 b_{m-1} + \ldots + a_m b_0)(x - x_0)^m = \\ &= a_0 b_0 + (a_0 b_1 + a_1 b_0)(x - x_0) + \\ &+ (a_0 b_2 + a_1 b_1 + a_2 b_0)(x - x_0)^2 + \ldots \end{aligned}$$

Desplazando el índice en la sumatoria de la serie. El índice de una sumatoria en una serie de potencias es una variable muda, es decir

$$\sum_{m=2}^{\infty} \frac{2^m m^3}{(m+1)!} = \sum_{k=2}^{\infty} \frac{2^k k^3}{(k+1)!} \tag{19}$$

Para cualquier entero k la serie de potencias

$$\boxed{\begin{gathered}\sum_{m=m_0}^{\infty} a_m (x-x_0)^{m-k} = \sum_{m+k=m_0}^{\infty} a_{m+k}(x-x_0)^{m+k-k} = \\ = \sum_{m=m_0-k}^{\infty} a_{m+k}(x-x_0)^m\end{gathered}} \tag{20}$$

Dr. J. Juan Rosales García
Departamento de Ingeniería Eléctrica, DICIS-UGTO.

Es decir, reemplazar m por $m + k$ en el término general y restar k del límite inferior de la sumatoria deja sin cambio a la serie.

Derivadas de las series de potencias

Dr. J. Juan Rosales García
Departamento de Ingeniería Eléctrica, DICIS-UGTO.

Una serie de potencias admite derivadas término a término de la serie. Sea la serie

$$f(x) = \sum_{m=0}^{\infty} a_m (x - x_0)^m, \qquad |x - x_0| < R \tag{21}$$

convergente para $|x - x_0| < R$, donde $R > 0$.

Entonces la serie obtenida al derivar término a término también converge y representa la derivada $f'(x)$ de $f(x)$, esto es

$$f'(x) = \sum_{m=1}^{\infty} m a_m (x - x_0)^{m-1}, \quad |x - x_0| < R \tag{22}$$

De igual manera, tenemos la segunda derivada

$$f''(x) = \sum_{m=2}^{\infty} m(m-1) a_m (x - x_0)^{m-2}, \qquad |x - x_0| < R \tag{23}$$

En general, se tiene *hasta el orden k*

$$\begin{aligned} f^{(k)} &= \sum_{m=k}^{\infty} m(m-1)\dots(m-k+1)a_m(x-x_0)^{m-k} \\ |x-x_0| &< R \end{aligned} \tag{24}$$

Además, todas las series tienen el mismo radio de convergencia R.

Series e integración de ecuaciones diferenciales

Existe una infinidad de ecuaciones diferenciales que no se reducen a cuadraturas, en tal caso nos vemos en la necesidad de recurrir a métodos aproximados de integración de dichas ecuaciones. Uno de estos métodos consiste en representar la solución de la ecuación en forma de la *serie de Taylor*, entonces, la suma de un número finito de términos de esta serie será aproximadamente igual a la solución de la ecuación diferencial.

Supongamos que necesitamos hallar la solución de la ecuación diferencial de segundo orden con ciertas condiciones iniciales

$$y'' = F(x,\, y,\, y'),\; y(x_0) = y_0,\; y'(x_0) = y_0' \qquad (25)$$

Ahora, supongamos que la solución $y = f(x)$ existe y puede ser representada en forma de serie de Taylor, es decir, como

$$\begin{aligned} y(x) &= f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{1 \cdot 2}(x - x_0)^2 \\ &+ \frac{f'''(x_0)}{1 \cdot 2 \cdot 3}(x - x_0)^3 + \ldots \end{aligned} \tag{26}$$

Entonces, debemos encontrar a $f(x_0)$, $f'(x_0)$, $f''(x_0), \ldots,$ es decir, los valores de las derivadas de la solución particular para $x = x_0$.

De las condiciones iniciales en (25) podemos deducir

$$f(x_0) = y_0, \quad f'(x_0) = y'(x_0) \tag{27}$$

De la ecuación (25), obtenemos

$$f''(x_0) = y''(x_0) = F(x_0,\, y_0,\, y_0') \tag{28}$$

Dr. J. Juan Rosales García Departamento de Ingeniería Eléctrica, DICIS-UGTO.

Derivando ambos términos de la ecuación (25) respecto a x, tenemos

$$y''' = F'_x(x, y, y') + F'_y(x, y, y')y' + F'_{y'}(x, y, y')y'' \quad (29)$$

Sustituyendo los valores de $x = x_0$ en el segundo término, encontramos

$$f'''(x_0) = y'''(x_0) \tag{30}$$

Derivando una vez más la expresión (29), obtenemos

$$f^{IV}(x_0) = y^{IV}(x_0) \tag{31}$$

Luego los valores encontrados de las derivadas se sustituyen en la serie de Taylor (26). La serie así obtenida representa la solución de la ecuación dada para los valores de x para los cuales la serie converge.

Ejemplo 1:

Usar la serie de Taylor para hallar la integración aproximada de la ecuación

$$y' = x^2 y + y^3 \tag{32}$$

con la condición inicial $y(0) = 1$. Aproximar hasta los cuatro primeros términos diferentes de cero.

Solución:

De la condición inicial,

$$y'(0) = 0^2 y + (1)^3 = 1 \rightarrow y'(0) = 1 \tag{33}$$

Derivando la ecuación (32), tenemos

$$y'' = 2xy + x^2 y' + 3y^2 y' \tag{34}$$

$$\begin{aligned} y''' &= 2y + 2xy' + 2xy' + x^2 y'' + 6y(y')^2 + \\ &+ 3y^2 y'' \end{aligned} \tag{35}$$

Sustituyendo la condición (33) y $y(0) = 1$, obtenemos

$$y'' = 3, \quad y''' = 2 + 6 + 3 \cdot 3 = 17 \tag{36}$$

Sustituyendo en la serie (26), tenemos

$$y(x) = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{3x^2}{2!} + \frac{17}{3!}x^3 \tag{37}$$

Ejemplo 2:

Dr. J. Juan Rosales García
Departamento de Ingeniería Eléctrica, DICIS-UGTO.

Usar la serie de Taylor para hallar la integración aproximada de la ecuación

$$y'' = x + y^2 \tag{38}$$

con las condiciones iniciales $y(0) = 0$ y $y'(0) = 1$. Hallar los cinco primeros términos diferentes de cero.

Dr. J. Juan Rosales García
Departamento de Ingeniería Eléctrica, DICIS-UGTO.

Solución:

Diferenciando la ecuación (38), tenemos

$$
\begin{aligned}
y''' &= 1 + 2yy' \qquad (39)\\
y^{IV} &= 2y'y' + 2yy''\\
y^{V} &= 2y''y' + 2y'y'' + 2y'y'' + 2yy''' = 6y'y'' + 2yy'''\\
y^{VI} &= 6(y'')^2 + 8y'y''' + 2yy^{IV}\\
y^{VII} &= 20y''y''' + 10y'y^{IV} + 2yy^{V}
\end{aligned}
$$

Sustituyendo las condiciones iniciales, obtenemos

$$\begin{aligned} y(0) &= 0, \quad y'(0) = 1, \quad y'' = 0, \\ y'''(0) &= 1, \\ y^{IV}(0) &= 2, \\ y^{V}(0) &= 0, \quad y^{VI}(0) = 8, \quad y^{VII}(0) = 20 \end{aligned} \tag{40}$$

Entonces, sustituyendo en (26), la solución es

$$y(x) = \frac{x}{1!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{2x^4}{4!} + \frac{8x^6}{6!} + \frac{20x^7}{7!} \tag{41}$$

Integración de ecuaciones lineales mediante series de potencias

Dr. J. Juan Rosales García Departamento de Ingeniería Eléctrica, DICIS-UGTO.

Una forma de comprender como funciona el método de series de potencias en la solución de ecuaciones diferenciales, es aplicarlo a ecuaciones diferenciales cuyas soluciones ya son conocidas. Empecemos con dos ejemplos, para los cuales las soluciones son obtenidas por métodos ya estudiados en las secciones anteriores.

Ejemplo 3:

Usar la serie de potencias para resolver la ecuación diferencial

$$y' + y = 0 \tag{42}$$

Solución:

Supongamos la solución en serie de potencias

$$y(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \ldots + a_m x^m + \ldots = \sum_{m=0}^{\infty} a_m x^m \tag{43}$$

Derivando esta expresión, tenemos

$$y'(x) = \sum_{m=1}^{\infty} m a_m x^{m-1} \tag{44}$$

Dr. J. Juan Rosales García
Departamento de Ingeniería Eléctrica, DICIS-UGTO.

Sustituyendo en la ecuación (42), obtenemos

$$\sum_{m=1}^{\infty} m a_m x^{m-1} + \sum_{m=0}^{\infty} a_m x^m = 0 \qquad (45)$$

Para factorizar, debemos tener los mismos exponentes en x. Hagamos un desplazamiento de índice en la primer suma de (45). Sea $n = m - 1$, entonces, $m = n + 1$ y n comienza de cero. Tenemos

$$\sum_{n=0}^{\infty} (n+1) a_{n+1} x^n + \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = 0 \tag{46}$$

Factorizamos

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left[(n+1)a_{n+1} + a_n\right] x^n = 0 \tag{47}$$

Debido a que $x^n \neq 0$, lo que debe ser cero es la expresión que está en paréntesis cuadrados, esto es

$$(n+1)a_{n+1} + a_n = 0 \tag{48}$$

De aquí obtenemos la ecuación

$$a_{n+1} = -\frac{a_n}{n+1}, \quad \forall n \geq 0 \tag{49}$$

A esta ecuación se le llama ecuación de recurrencia.

Hagamos unas cuantas iteraciones, para ver la forma de la solución

$$\begin{aligned}
n &= 0 \quad \rightarrow \quad a_1 = -a_0. \\
n &= 1 \quad \rightarrow \quad a_2 = -\frac{a_1}{2} = \frac{a_0}{2!} \\
n &= 2 \quad \rightarrow \quad a_3 = -\frac{a_2}{3} = -\frac{a_0}{3!} \\
n &= 3 \quad \rightarrow \quad a_4 = -\frac{a_3}{4} = \frac{a_0}{4!} \\
n &= 4 \quad \rightarrow \quad a_5 = -\frac{a_4}{5} = -\frac{a_0}{5!} \\
n &= 5 \quad \rightarrow \quad a_6 = -\frac{a_5}{6} = \frac{a_0}{6!}
\end{aligned} \tag{50}$$

Sustituyendo estos resultados en la solución (43), obtenemos

$$
\begin{aligned}
y(x) &= a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + a_4 x^4 + a_5 x^5 + a_6 x^6 + \dots \\
&= a_0 - a_0 x + \frac{a_0 x^2}{2!} - \frac{a_0 x^3}{3!} + \frac{a_0 x^4}{4!} - \frac{a_0 x^5}{5!} + \frac{a_0 x^6}{6!} - \\
&= a_0 \left[1 - x + \frac{x^2}{2!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^5}{5!} + \frac{x^6}{6!} - \dots \right]
\end{aligned}
$$

Esta expresión es la solución en serie de potencias de la ecuación (42). Del cálculo, sabemos que la exponencial e^{-x} la podemos representar como

$$e^{-x} = \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m \frac{x^m}{m!} = 1 - x + \frac{x^2}{2!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^5}{5!} + \frac{x^6}{6!} - \dots \tag{52}$$

Tomando esto en cuenta podemos escribir la expresión (51) de la siguiente manera:

$$y(x) = a_0 e^{-x} \tag{53}$$

que es la solución general de la ecuación (42) escrita en función de funciones elementales e^{-x}, a_0 juega el papel de la constante de integración.

Ejemplo 4:

Usando el método de series de potencias resolver la siguiente ecuación diferencial

$$y'' + y = 0 \tag{54}$$

Solución:
Buscamos la solución de esta ecuación en forma de una serie de potencias

$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \tag{55}$$

Para sustituir en la ecuación (54) debemos derivar dos veces, esto es

$$y' = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1}, \quad y'' = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) a_n x^{n-2} \tag{56}$$

Sustituyendo este resultado en la ecuación (54), obtenemos

$$\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)a_n x^{n-2} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = 0 \tag{57}$$

Haciendo un corrimiento en el índice de la primera suma nos queda

$$\sum_{n=0}^{\infty}(n+2)(n+1)a_{n+2}x^n + \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = 0 \tag{58}$$

Ahora podemos factorizar, esto es

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left[(n+2)(n+1)a_{n+2} + a_n\right] x^n = 0 \tag{59}$$

Para que esta expresión sea una identidad debemos tener

$$(n+2)(n+1)a_{n+2} + a_n = 0 \tag{60}$$

Despejando a_{n+2}, tenemos

$$a_{n+2} = -\frac{a_n}{(n+1)(n+2)} \tag{61}$$

Para cada valor de n obtenemos el valor de los coeficientes de la serie de potencias (55). Evaluemos algunos coeficientes:

$$\begin{aligned} n &= 0 &\rightarrow \quad & a_2 = -\frac{a_0}{1 \cdot 2} = -\frac{a_0}{2!} \\ n &= 1 &\rightarrow \quad & a_4 = -\frac{a_2}{4 \cdot 3} = \frac{a_0}{4 \cdot 3 \cdot 2!} = \frac{a_0}{4!} \\ n &= k &\rightarrow \quad & a_{2k} = \frac{(-1)^{k+1} a_0}{[2(k+1)]!} \end{aligned} \tag{62}$$

Dr. J. Juan Rosales García
Departamento de Ingeniería Eléctrica,
DICIS-UGTO.

De una manera similar, tenemos para los n impares

$$
\begin{aligned}
n &= 1 \quad \rightarrow \quad a_3 = -\frac{a_1}{2\cdot 3} = -\frac{a_1}{3!} \\
n &= 3 \quad \rightarrow \quad a_5 = -\frac{a_3}{5\cdot 4} = \frac{a_1}{5\cdot 4\cdot 3!} = \frac{a_1}{5!} \\
n &= 2k+1 \quad \rightarrow \quad a_{2k+1} = \frac{(-1)^k a_1}{(2k+1)!} \qquad (63)
\end{aligned}
$$

La conclusión a que hemos llegado es que la serie (55) será solución de la ecuación diferencial (54) siempre y cuando los coeficientes estén dados por

$$a_{2k} = \frac{(-1)^k a_0}{(2k)!}, \qquad a_{2k+1} = \frac{(-1)^k a_1}{(2k+1)!} \tag{64}$$

donde $k = 1, 2, 3, \ldots,$. A los números a_0 y a_1, desde el punto de vista matemático no se les restringe en nada, estos vienen siendo las constantes de integración, las cuales dependen del valor inicial del problema. Así, la solución en serie de potencias tiene la forma general

$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 + \sum_{k=1}^{\infty} a_{2k} x^{2k} + \sum_{2k+1}^{\infty} a_{2k+1} x^{2k+1} \tag{65}$$

Explícitamente, podemos escribir la solución como

$$y(x) = a_0 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!} x^{2k} + a_1 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} x^{2k+1} \tag{66}$$

Podemos observar que las series en la ecuación (66) son, ni más ni menos, que una representación de las funciones $\cos x$ y $\sin x$ en serie de potencias, es decir

$$\cos x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!} x^{2k}, \quad \sin x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} x^{2k+1} \tag{67}$$

De esta manera podemos escribir la solución (66) como

$$y(x) = a_0 \cos x + a_1 \sin x \tag{68}$$

donde a_1 y a_2 vienen siendo las constantes de integración.

Es claro que las ecuaciones diferenciales (42) y (54) las pudimos haber resuelto con los métodos de los capítulos anteriores, sin embargo, ésta es una forma muy clara de ver cómo funciona el método de series de potencias para el caso de ecuaciones diferenciales con coeficientes constantes. En las siguientes secciones analizaremos ecuaciones diferenciales con coeficientes variables, que es donde las series de potencias muestran su potencial.

Ejercicios Propuestos

Dr. J. Juan Rosales García
Departamento de Ingeniería Eléctrica, DICIS-UGTO.

- $y' = x^2y + y^3, \; y(0) = 1$. Hallar los cuatro primeros términos del desarrollo diferentes de cero.
- $y' = x + 2y^2, \; y(0) = 0$. Hallar los dos primeros términos del desarrollo diferentes de cero.
- $y' = y^2 + x, \quad y(0) = 1$. Hallar los cinco primeros términos del desarrollo.
- $y'' + xy' + y = 0$
- $y'' - 2xy' + y = 0$