Sesión 24. Series de Potencias: Puntos Ordinarios y Singulares

Dr. J. Juan Rosales García
Departamento de Ingeniería Eléctrica, DICIS-UGTO.

Competencias:

- Distingue los puntos ordinarios de los irregulares.
- Aplica las series de potencia para resolver EDOs con coeficientes variables
- Analiza la validéz de las soluciones de las EDOs.

Contenido de la Sesión 24:

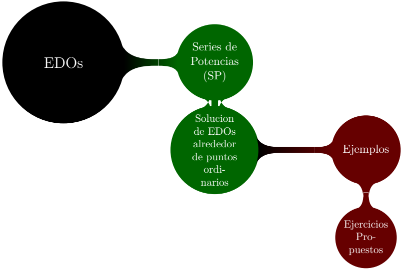
Dr. J. Juan Rosales García Departamento de Ingeniería Eléctrica, DICIS-UGTO.

- Puntos ordinarios e irregulares
- Solución de EDOs alrededor de puntos ordinarios.

Mapa Mental

Dr. J. Juan Rosales García
Departamento de Ingeniería Eléctrica, DICIS-UGTO.

Mapa Mental — Ecuaciones Diferenciales Ordinarias — Agosto-Diciembre 2021



Soluciones alrededor de puntos ordinarios

Dr. J. Juan Rosales García Departamento de Ingeniería Eléctrica, DICIS-UGTO.

Supongamos que tenemos la ecuación diferencial lineal de segundo orden con coeficientes variables

$$\boxed{y'' + P(x)y' + Q(x)y = 0} \tag{1}$$

Se dice que un punto x_0 es un *punto ordinario* de la ecuación (1) si $P(x)$ y $Q(x)$ son funciones analíticas en x_0 (una función $f(x)$ es analítica en el punto x_0 si puede ser desarrollada en serie de potencias de $x - x_0$, con un radio de convergencia positivo $R > 0$). A todo punto que no es ordinario le llamaremos *punto singular* de la ecuación (1).

Ejemplo 1:

Dr. J. Juan Rosales García
Departamento de Ingeniería Eléctrica, DICIS-UGTO.

Analizar los puntos ordinarios o singulares de la ecuación

$$xy'' + (\sin x)y = 0 \tag{2}$$

Solución: La ecuación (2) tiene un punto ordinario en $x = 0$, ya que la función

$$Q(x) = \frac{\sin x}{x} \tag{3}$$

se puede desarrollar en serie de potencias, esto es

$$Q(x) = 1 - \frac{x^2}{3!} + \frac{x^4}{5!} - \frac{x^6}{7!} + \cdots, \tag{4}$$

la cual converge para todos los valores de x.

Ejemplo 2:

Hallar los puntos ordinarios y singulares de la ecuación diferencial

$$y'' + (\ln x)y = 0 \tag{5}$$

Solución: La ecuación (5) tiene un punto singular en $x = 0$ debido a que la función

$$Q(x) = \ln x \tag{6}$$

no se puede desarrollar en serie de potencias en x.

Ejemplo 3:

Sea la ecuación

$$(x^2-1)y''+2xy'+6y=0 \tag{7}$$

hallar los puntos ordinarios y singulares si es que existen.
Solución: Tenemos

$$P(x)=\frac{2x}{x^2-1} \tag{8}$$

Los puntos singulares de la ecuación (7) son aquellos que satisfacen la ecuación

$$x^2-1=0 \tag{9}$$

Esto es, $x_1=1$ y $x_2=-1$. Todos los demás valores finitos de x, son puntos ordinarios.

La ecuación (7) puede ser desarrollada en serie de potencias para los valores de $|x| < 1$, es decir, para $-1 < x < 1$.

Teorema: Existencia de las soluciones en series de potencias

Dr. J. Juan Rosales García
Departamento de Ingeniería Eléctrica,
DICIS-UGTO.

Theorem

Si $x = x_0$ es un punto ordinario de la ecuación (1), entonces, se pueden encontrar siempre dos soluciones linealmente independientes en forma de series de potencias centradas en, $x = x_0$

$$\boxed{y = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (x - x_0)^n} \tag{10}$$

Una solución en series converge al menos para $|x - x_0| < R$, donde R es la distancia (el radio) desde x_0 al punto singular más cercano (real o complejo).

Ejemplo 4:

Dr. J. Juan Rosales García
Departamento de Ingeniería Eléctrica, DICIS-UGTO.

Dada la ecuación diferencial lineal con coeficientes variables

$$y'' - 2xy' + y = 0 \tag{11}$$

encontrar dos soluciones en serie de potencias linealmente independientes alrededor del punto ordinario $x = x_0 = 0$.

Solución: Supongamos que la solución está dada en serie de potencias alrededor de $x_0 = 0$, entonces, la solución tiene la forma

$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \tag{12}$$

El objetivo es encontrar los valores de los coeficientes a_n. Para esto, derivamos la solución (12)

$$y'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1}, \quad y''(x) = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) a_n x^{n-2} \tag{13}$$

Sustituyendo en la ecuación (11), tenemos

$$\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) a_n x^{n-2} - 2\sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^n + \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = 0 \tag{14}$$

Dr. J. Juan Rosales García
Departamento de Ingeniería Eléctrica,
DICIS-UGTO.

Como podemos ver, en el segundo y tercer término podemos factorizar x^n siempre y cuando tomemos una iteración. Para poner todos los términos de las series de tal manera que podamos factorizarlos, hacemos el desplazamiento de índices en la serie del primer término. Finalmente, nos queda lo siguiente:

$$2a_2+a_0+\sum_{m=1}^{\infty}\left[(m+2)(m+1)a_{m+2}-2ma_m+a_m\right]x^m=0 \tag{15}$$

Esta relación se cumple siempre y cuando

$$2a_2+a_0=0, \qquad (m+2)(m+1)a_{m+2}=2ma_m-a_m,\ \forall m\geq 1 \tag{16}$$

Estas dos condiciones se pueden obtener de la relación

$$a_{m+2}=\frac{(2m-1)}{(m+2)(m+1)}a_m, \qquad \forall m\geq 0 \tag{17}$$

Hagamos unas cuantas iteraciones en (17):

Para $m = 1$,

$$a_3 = \frac{a_1}{6} \tag{18}$$

Para $m = 2$,

$$a_4 = \frac{3}{12} a_2 = -\frac{3}{12 \cdot 2} a_0 \tag{19}$$

Para $m = 3$

$$a_5 = \frac{5}{20} a_3 = \frac{5}{20 \cdot 6} a_1 = \frac{5}{120} a_1 = \frac{5}{5!} a_1 \tag{20}$$

Para $m = 4$,

$$a_6 = \frac{7}{30} a_4 = -\frac{7}{30}\frac{3}{24} a_0 = \frac{21}{6!} a_0 \tag{21}$$

Sustituyendo los coeficientes a_i en la solución (12), obtenemos

$$\begin{aligned} y(x) &= a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + a_4 x^4 + \ldots = \\ &= a_0 \left[1 - \frac{1}{2!}x^2 - \frac{3}{4!}x^4 - \frac{21}{6!}x^6 - \ldots \right] + \\ &+ a_1 \left[x + \frac{1}{3!}x^3 + \frac{5}{5!}x^5 + \ldots \right] \end{aligned} \tag{22}$$

Las constantes a_0 y a_1 vienen siendo las constantes de integración, las cuales dependen de los valores iniciales del problema.

Ejemplo 5:

Resolver la ecuación

$$y'' + (x-1)^2 y' - (x-1)y = 0 \tag{23}$$

Solución: Como podemos ver, el punto $x_0 = 1$ es un punto ordinario de la ecuación (23). Obtengamos una solución en serie de potencias de $x - 1$.

Para esto y por comodidad, hagamos que el cero sea un punto ordinario de la ecuación (23), esto se obtiene haciendo el siguiente cambio de variable

$$t = x - 1 \tag{24}$$

Entonces, la ecuación (23), se transforma en

$$y'' + t^2 y' - ty = 0 \tag{25}$$

No olvidemos que ahora las derivadas de la función $y = y(t)$ son respecto a la variable independiente t. Supongamos que la solución de la ecuación (25) es la serie de potencias

$$y(t) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n \tag{26}$$

Derivando y sustituyendo en la ecuación (25), tenemos

$$\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)a_n t^{n-2} + t^2 \sum_{n=1}^{\infty} n a_n t^{n-1} - t \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n = 0 \tag{27}$$

Esta misma ecuación la podemos escribir de la siguiente manera:

$$\sum_{n=0}^{\infty}(n+2)(n+1)a_{n+2}t^n+\sum_{n=2}^{\infty}(n-1)a_{n-1}t^n-\sum_{n=1}^{\infty}a_{n-1}t^n=0 \tag{28}$$

Ahora debemos tomar las iteraciones necesarias para dejar que todas las sumas comiencen con $n=2$, agrupando nos queda la relación

$$\begin{aligned} & 2a_2+(3)(2)a_3t-a_0t+ \\ + & \sum_{n=2}^{\infty}\left[(n+2)(n+1)a_{n+2}+(n-2)a_{n-1}\right]t^n \end{aligned} \tag{29}$$

Se deben cumplir las relaciones

$$\begin{aligned} 2a_2 &= 0 \\ (3)(2)a_3 - a_0 &= 0 \\ (n+2)(n+1)a_{n+2} + (n-2)a_{n-1} &= 0 \quad \forall n \geq 2. \end{aligned} \tag{30}$$

Resolviendo, tenemos

$$\begin{aligned} a_2 &= 0 \\ a_{n+2} &= -\frac{(n-2)}{(n+2)(n+1)} a_{n-1}, \quad \forall n \geq 1 \end{aligned}$$

Dr. J. Juan Rosales García Departamento de Ingeniería Eléctrica, DICIS-UGTO.

Hagamos unas cuantas iteraciones para ver la forma de la solución

$$
\begin{aligned}
n &= 1 &\rightarrow\quad & a_3 = \frac{a_0}{3\cdot 2}\\
n &= 2 &\rightarrow\quad & a_4 = 0\\
n &= 3 &\rightarrow\quad & a_5 = -\frac{1}{5\cdot 4}a_2 = 0\\
n &= 4 &\rightarrow\quad & a_6 = -\frac{2}{6\cdot 5}a_3 = -\frac{a_0}{90} - \frac{2}{6\cdot 5\cdot 3\cdot 2}a_0\\
n &= 5 &\rightarrow\quad & a_7 = 0\\
n &= 6 &\rightarrow\quad & a_8 = 0\\
n &= 7 &\rightarrow\quad & a_9 = -\frac{5}{9\cdot 8}\left(-\frac{1}{90}a_0\right) = \frac{a_0}{1296}
\end{aligned} \tag{31}
$$

Observamos que $a_n = 0$ cuando $n \neq 3k$, donde $k = 1, 2, 3...$ Debemos recordar que hicimos el cambio de variable $t = x - 1$, tomando esto en cuenta, la solución general es

$$\begin{aligned} y(x) &= a_1(x-1) + \\ &+ a_0\left[1 + \frac{1}{6}(x-1)^3 - \frac{1}{90}(x-1)^6 + \right] \\ &+ a_0\left[\frac{1}{1296}(x-1)^9 - ....\right] \qquad (32) \end{aligned}$$

Ejemplo 6:

Dr. J. Juan Rosales García Departamento de Ingeniería Eléctrica, DICIS-UGTO.

Resolver la ecuación

$$y'' - xy' + y = 0 \tag{33}$$

Solución: Supongamos la solución en forma de serie de potencias alrededor de $x_0 = 0$. Esto es

$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \tag{34}$$

Dr. J. Juan Rosales García
Departamento de Ingeniería Eléctrica, DICIS-UGTO.

Para sustituir en (33) debemos derivar dos veces la expresión (34), tenemos

$$y'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1}, \quad y''(x) = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) a_n x^{n-2} \tag{35}$$

Sustituyendo en (33), resulta

$$\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) a_n x^{n-2} - x \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = 0 \tag{36}$$

Esta misma expresión la podemos escribir como

$$\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)a_n x^{n-2} - \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^n + \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = 0 \quad (37)$$

Luego, la idea es que los exponentes en x deben ser del mismo orden y las sumas deben empezar en el mismo número m, esto es para poder factorizar. Para el primer término en (37) podemos desplazar el índice n como sigue; $m = n - 2, \quad n = m + 2$, entonces m empezará de 0.

Esto es

$$\sum_{m=0}^{\infty}(m+2)(m+1)a_{m+2}x^m - \sum_{m=1}^{\infty} m a_m x^m + \sum_{m=0}^{\infty} a_m x^m = 0 \tag{38}$$

Ahora, para poder factorizar las sumas, debemos hacer que éstas empiecen en el mismo valor de m.

Para esto desplazamos una unidad, la primer y tercer suma

$$2a_2 + a_0 + \sum_{m=1}^{\infty} \left[(m+2)(m+1)a_{m+2} - ma_m + a_m\right] x^m = 0 \tag{39}$$

Entonces, obtenemos las expresiones

$$\begin{aligned} 2a_2 + a_0 &= 0 \\ (m+2)(m+1)a_{m+2} - ma_m + a_m &= 0, \end{aligned} \tag{40}$$

De donde obtenemos

$$a_{m+2} = \frac{(m-1)}{(m+2)(m+1)} a_m, \quad \forall m > 1 \qquad (41)$$

Podemos darle valores a m y obtener diferentes valores de a_m.

Obtengamos algunos valores para darnos una idea de cómo será la serie

$$
\begin{aligned}
m &= 0 & \rightarrow \quad & a_2 = -\frac{a_0}{2!} \\
m &= 1 & \rightarrow \quad & a_3 = 0 \\
m &= 2 & \rightarrow \quad & a_4 = \frac{a_2}{4\cdot 3} = -\frac{1}{4!}a_0 \\
m &= 3 & \rightarrow \quad & a_5 = \frac{2a_3}{5\cdot 4} = 0 \\
m &= 4 & \rightarrow \quad & a_6 = \frac{3\cdot a_4}{6\cdot 5}a_4 = -\frac{3}{6!}a_0 \\
m &= 5 & \rightarrow \quad & a_7 = \frac{4}{6\cdot 6} = 0 \\
m &= 6 & \rightarrow \quad & a_8 = \frac{5}{8\cdot 7}a_6 = -\frac{5\cdot 3}{8!}a_0
\end{aligned}
\tag{42}
$$

Entonces, de (34), tenemos

$$\begin{aligned} y(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + a_4 x^4 + \\ &+ a_5 x^5 + a_6 x^6 + a_7 x^7 + a_8 x^8 + \dots \end{aligned} \tag{43}$$

Sustituyendo en (43) los valores obtenidos en (43), tenemos

$$\begin{aligned} y(x) &= a_0 \left(1 - \frac{x^2}{2!} - \frac{x^4}{4!} - \frac{1 \cdot 3}{6!} x^6 - \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{8!} x^8 - \dots \right) + \\ &+ a_1 x \end{aligned} \tag{44}$$

donde a_0 y a_1 son constantes arbitrarias. La solución es válida para $-\infty < x < \infty$.

Ejercicios Propuestos

Dr. J. Juan Rosales García
Departamento de Ingeniería Eléctrica, DICIS-UGTO.

1. $y'' + xy' + y = 0$
2. $y'' - xy = 0$
3. $(x-1)y'' + y' + 2xy = 0$
4. $y'' - 2xy' + y = 0$
5. $y'' + x^2y' + xy = 0$
6. $y'' - 6xy' - 2y = 0$