Sesión 25. Ecuaciones de Hermite y de Bessel

Dr. J. Juan Rosales García
Departamento de Ingeniería Eléctrica, DICIS-UGTO.

Competencias:

Dr. J. Juan Rosales García
Departamento de Ingeniería Eléctrica, DICIS-UGTO.

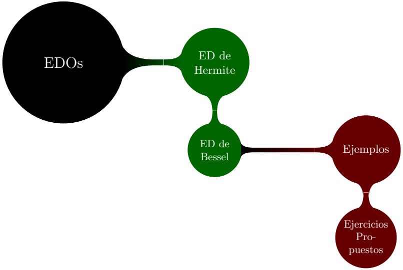
- Reconoce la importancia de la ED de Hermite.
- Reconoce la importancia de la ED de Bessel

Contenido de la Sesión 25:

Dr. J. Juan Rosales García
Departamento de Ingeniería Eléctrica, DICIS-UGTO.

- ED de Hermite.
- Polinomios de Hermite.
- ED de Bessel.
- Funciones de Bessel

Mapa Mental


EDOs
ED de Hermite
ED de Bessel
Ejemplos
Ejercicios Pro- puestos

Ecuación diferencial de Hermite

Dr. J. Juan Rosales García
Departamento de Ingeniería Eléctrica, DICIS-UGTO.

Una de las ecuaciones que tienen interés práctico es la ecuación de Hermite. La ecuación de Hermite de orden n tiene la forma

$$\boxed{y'' - 2xy' + 2ny = 0} \tag{1}$$

donde n es, usualmente, un entero no negativo, $n \geq 0$.

Solución:

Esta ecuación tiene solución en serie de potencias alrededor de $x_0 = 0$, es decir, de la forma

$$y(x) = \sum_{m=0}^{\infty} a_m x^m \tag{2}$$

Luego, derivando (2), obtenemos

$$y' = \sum_{m=1}^{\infty} m a_m x^{m-1}, \qquad y'' = \sum_{m=2}^{\infty} m(m-1) a_m x^{m-2} \tag{3}$$

Poniendo estos resultados en la ecuación (1) se tiene

$$\sum_{m=2}^{\infty} m(m-1) a_m x^{m-2} - 2x \sum_{m=1}^{\infty} m a_m x^{m-1} + 2n \sum_{m=0}^{\infty} a_m x^m = 0 \tag{4}$$

Esta misma ecuación la podemos escribir en su forma equivalente

$$\sum_{m=2}^{\infty} m(m-1)a_m x^{m-2} - \sum_{m=1}^{\infty} 2ma_m x^m + \sum_{m=0}^{\infty} 2na_m x^m = 0 \tag{5}$$

Para factorizar las sumas y los exponentes de x, hagamos $s = m - 2,\ m = s + 2$ en la primer suma de (5), en las otras dos sumas es suficiente cambiar el índice m por s sin que las sumas se alteren.

Entonces, tenemos

$$\sum_{s=0}^{\infty}(s+2)(s+1)a_{s+2}x^s-\sum_{s=1}^{\infty}2sa_sx^s+\sum_{s=0}^{\infty}2na_sx^s=0 \quad (6)$$

Para factorizar x^s debemos hacer que las tres sumas empiecen en un mismo valor, a decir, en $s=1$. Para esto desplazamos las otras dos sumas una unidad

$$2a_2+2na_0+\sum_{s=1}^{\infty}\left[(s+2)(s+1)a_{s+2}-2(s-n)a_s\right]x^s=0 \quad (7)$$

Debido a que $x^s \neq 0$, lo que debe ser cero son las expresiones

$$\begin{aligned} 2a_2 + 2na_0 &= 0, \quad a_2 = -na_0 \\ (s+2)(s+1)a_{s+2} - 2(s-n)a_s &= 0, \quad s = 1,\ 2,\ 3, \ldots \end{aligned} \tag{8}$$

La primera de las ecuaciones en (8) nos da el coeficiente a_2 en función de a_0 y la segunda ecuación es la ecuación de recurrencia, la cual podemos escribir como

$$a_{s+2} = \frac{2(s-n)}{(s+2)(s+1)} a_s, \qquad s = 1, 2, 3, \ldots \tag{9}$$

Demos algunos valores a s para encontrar algunos coeficientes a

$$
\begin{aligned}
s &= 1 \quad \rightarrow \quad a_3 = \frac{2(1-n)}{3\cdot 2}a_1 \\
s &= 2 \quad \rightarrow \quad a_4 = \frac{2(2-n)}{4\cdot 3}a_2 = -\frac{2(2-n)n}{4\cdot 3}a_0 \\
s &= 3 \quad \rightarrow \quad a_5 = \frac{2(3-n)}{5\cdot 4}a_3 = \frac{2(3-n)2(1-n)}{5\cdot 4\cdot 3\cdot 2}a_1 \\
s &= 4 \quad \rightarrow \quad a_6 = \frac{2(4-n)}{6\cdot 5}a_4 = -\frac{2(4-n)2(2-n)n}{6\cdot 5\cdot 4\cdot 3}a_0 \\
s &= 5 \quad \rightarrow \quad a_7 = \frac{2(5-n)}{7\cdot 6}a_5 = \\
&= \frac{2(5-n)2(3-n)2(1-n)}{7\cdot 6\cdot 5\cdot 4\cdot 3\cdot 2}a_1
\end{aligned}
$$

Dr. J. Juan Rosales García Departamento de Ingeniería Eléctrica, DICIS-UGTO.

$$\begin{aligned} s &= 6 \quad \rightarrow \quad a_8 = \frac{2(6-n)}{8\cdot 7} a_6 = \\ &= -\frac{2(6-n)2(4-n)2(2-n)n}{8\cdot 7\cdot 6\cdot 5\cdot 4\cdot 3} a_0 \end{aligned}$$

Ahora sustituyendo estos resultados en la serie (2), obtenemos

$$
\begin{aligned}
y(x) &= a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + a_4 x^4 + a_5 x^5 + \\
&+ a_6 x^6 + a_7 x^7 + a_8 x^8 + \dots \\
&= a_0 + a_1 x - n a_0 x^2 + \frac{2(1-n)}{3 \cdot 2} a_1 x^3 - \\
&- \frac{2(2-n)n}{4 \cdot 3} a_0 x^4 + \frac{2^2(3-n)(1-n)}{5!} a_1 x^5 - \\
&- \frac{2^2(4-n)(2-n)n}{6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3} a_0 x^6 + \\
&+ \frac{2^3(5-n)(3-n)(1-n)}{7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2} a_1 x^7 \qquad (10)
\end{aligned}
$$

Finalmente, esta solución la podemos escribir como

$$\begin{aligned} y(x) &= a_0\left[1+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{2^k(-n)\ldots(-n+2k-2)}{(2k)!}x^{2k}\right] \\ &+ a_1\left[x+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{2^k(1-n)\ldots(1-n+2k-2)}{(2k+1)!}x^{2k+1}\right] \end{aligned} \tag{11}$$

Polinomios de Hermite

Dr. J. Juan Rosales García
Departamento de Ingeniería Eléctrica, DICIS-UGTO.

La ecuación de Hermite (1) tiene mayor importancia para el caso en que $n \geq 0$. Si n es un entero par, entonces el coeficiente de a_0 en (12) termina, siendo cada término igual a cero, para $k \geq \frac{1}{2}(n+2)$. Si n es entero impar, entonces el coeficiente a_1 en (12) termina, siendo cero cada término para $k \geq \frac{1}{2}(n+1)$. Por consiguiente, la ecuación de Hermite admite siempre una solución polinomial de grado n, para $n \geq 0$.

Una expresión simple para la solución polinomial la dan los *polinomios de Hermite*. Estos polinomios tienen la forma

$$\boxed{H_n = \sum_{k=0}^{\frac{n}{2}} \frac{(-1)^k n!(2x)^{n-2k}}{k!(n-2k)!}} \tag{12}$$

en donde $\frac{n}{2}$ representa el mayor número entero $\leq \frac{n}{2}$. Entonces, $y = H_n(x)$ es una solución de la ecuación de Hermite.

Condiciones suficientes para la existencia de soluciones en series de potencias

Dr. J. Juan Rosales García
Departamento de Ingeniería Eléctrica, DICIS-UGTO.

Hemos probado que una ecuación con coeficientes constantes, así como con coeficientes variables, admite soluciones en forma de series de potencias de $(x - x_0)$.Es lógico preguntarnos si cualquier ecuación con coeficientes variables tiene solución en forma de series de potencias.

Condiciones suficientes para la existencia de soluciones en serie de potencias

.

Theorem

Sea

$$\boxed{y'' + P(x)y' + Q(x)y = 0} \tag{13}$$

donde los coeficientes $P(x)$ y $Q(x)$ pueden ser desarrollados en una serie de potencias para $|x| < R$. Entonces, cada solución $y(x)$ puede ser expandida en una serie de potencias para $|x| < R$.

Series generalizadas: método de Frobenius

El método de Frobenius es una herramienta para resolver ED lineales con coeficientes variables, sin embargo, este método se aplica a ecuaciones más generales para las que el método de series de potencias no es aplicable. De aquí que el método de Frobenius tenga gran importancia práctica.

Un punto $x = x_0$ en el que los coeficientes $P(x)$ y $Q(x)$ de la ecuación

$$\boxed{y'' + P(x)y' + Q(x)y = 0} \tag{14}$$

son analíticos (admiten desarrollo en series de Taylor) se llama punto ordinario de la ecuación. Un punto que no es ordinario se llama punto singular de la ecuación.

Si $x = x_0$ es un punto ordinario de la ecuación (14), entonces el método de las series de potencias es aplicable y nos da las soluciones en forma de potencias de $x - x_0$, como se vio anteriormente. Sin embargo, si $x = x_0$ es un punto singular el método de las series de potencias deja de ser aplicable ya que la ecuación puede no tener una solución en serie de potencias de $x - x_0$.
Afortunadamente, el comportamiento de los coeficientes de una ecuación en un punto singular a veces no es tan malo como se cree y para tal caso tenemos el siguiente teorema.

Método de Frobenius

.

Toda ecuación diferencial de la forma

$$\boxed{y'' + \frac{b(x)}{x}y' + \frac{c(x)}{x^2}y = 0} \tag{15}$$

donde las funciones $b(x)$ y $c(x)$ son analíticas en $x = 0$, tiene al menos una solución que puede representarse en la forma

$$\boxed{\begin{array}{c} y(x) = x^{\rho}\sum_{m=0}^{\infty} a_m x^m = \sum_{m=0}^{\infty} a_m x^{m+\rho} \\ = x^{\rho}(a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots), \qquad a_0 \neq 0 \end{array}} \tag{16}$$

donde el exponente ρ puede ser un número cualquiera (real o complejo) y $a_0 \neq 0$.

Ecuación indicial

Para resolver la ecuación (15) la escribimos de la siguiente manera:

$$x^2y'' + xb(x)y' + c(x)y = 0 \tag{17}$$

Luego, desarrollamos $b(x)$ y $c(x)$ en series de potencias, es decir,

$$b(x) = b_0 + b_1x + b_2x^2 + \dots, \qquad c(x) = c_0 + c_1x + c_2x^2 + \dots \tag{18}$$

Después derivamos la expresión (16), obtenemos

$$
\begin{aligned}
y'(x) &= \Sigma_{m=0}^{\infty}(m+\rho)a_m x^{m+\rho-1} = \\
&= x^{\rho-1}[\rho a_0 + (\rho+1)a_1 x + \ldots] \\
y''(x) &= \Sigma_{m=0}^{\infty}(m+\rho)(m+\rho-1)a_m x^{m+\rho-2} \\
&= x^{\rho-2}[\rho(\rho-1)a_0 + (\rho+1)\rho a_1 x + \ldots](19)
\end{aligned}
$$

Sustituyendo estas series en la ecuación (17), obtenemos

$$
\begin{aligned}
x^{\rho}[\rho(\rho-1)a_0+\ldots] &+ (b_0+b_1x+\ldots)x^{\rho}(\rho a_0+\ldots)\\
&+ (c_0+c_1x+\ldots)x^{\rho}(a_0+a_1x+\ldots)
\end{aligned}
$$

Luego, se igualan a cero las sumas de los coeficientes de cada potencia de x. De esta manera obtenemos un sistema de ecuaciones que incluyen los coeficientes desconocidos a_m. Si la menor potencia es x^r, entonces su ecuación correspondiente será

$$[\rho(\rho-1)+b_0\rho+c_0]a_0=0 \tag{21}$$

Por suposición $a_0 \neq 0$, entonces, la expresión que será cero es

$$\rho(\rho-1)+b_0\rho+c_0 \tag{22}$$

Esta ecuación cuadrática es de gran importancia y se conoce como *ecuación indicial* de la ecuación diferencial (15).

Theorem

(*Método de Frobenious. Base de soluciones*). *Suponga que la ecuación diferencial* (15) *cumple los requisitos del teorema* $(5.13.1)$ *y sean* ρ_1 *y* ρ_2 *las raíces de la ecuación indicial* (22). *Entonces, se tienen los siguientes tres casos posibles.*

Caso I:

Raíces distintas que no difieren por un entero

. Una base será

$$y_1(x) = x^{\rho_1}(a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots) \tag{23}$$

y

$$y_2(x) = x^{\rho_2}(A_0 + A_1 x + A_2 x^2 + \ldots) \tag{24}$$

con coeficientes obtenidos sucesivamente a partir de (20) con $\rho = \rho_1$ y $\rho = \rho_2$, respectivamente.

Caso II:

Raíz doble $\rho_1 = \rho_2 = \rho$

. En este caso una base será

$$y_1(x) = x^\rho(a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots) \qquad \rho = \frac{1}{2}(1 - b_0) \quad (25)$$

y

$$y_2(x) = y_1(x)\ln x + x^\rho(A_1 x + A_2 x^2 + \dots) \quad (x > 0) \quad (26)$$

Caso III:

Raíces que difieren por un entero.

En este caso la base es

$$y_1(x) = x^{\rho_1}(a_0 + a_1 x + a_3 x^2 + \ldots) \tag{27}$$

y

$$y_2(x) = \lambda y_1(x) \ln x + x^{\rho_2}(A_0 + A_1 x + A_2 x^2 + \ldots) \tag{28}$$

donde las raíces son tales que $\rho_1 - \rho_2 > 0$ y λ puede ser cero.

Ecuación diferencial de Bessel

Dr. J. Juan Rosales García
Departamento de Ingeniería Eléctrica, DICIS-UGTO.

Una de las ecuaciones que se pueden resolver usando el método de Frobenius es la importantísima ecuación llamada *ecuación diferencial de Bessel*. Esta ecuación tuvo sus orígenes cuando el matemático F.W. Bessel analizaba el movimiento planetario. Las *funciones de Bessel*, las cuales son soluciones de la ecuación de Bessel son muy importantes en el estudio de las vibraciones de cadenas, propagación de corrientes eléctricas en conductores cilíndricos, flujo de calor en cilindros, vibración de membranas circulares y en muchos más problemas de las matemáticas aplicadas.

Ecuación de Bessel

Toda ecuación diferencial de la forma

$$\boxed{x^2y'' + xy' + (x^2 - \nu^2)y = 0} \tag{29}$$

donde ν es un parámetro constante, se llama *ecuación diferencial de Bessel*.

Solución:

Dr. J. Juan Rosales García
Departamento de Ingeniería Eléctrica, DICIS-UGTO.

Dividiendo la ecuación entre x^2, tenemos las funciones

$$P(x) = \frac{1}{x}, \quad Q(x) = \frac{x^2 - \nu^2}{x^2}, \tag{30}$$

las cuales tienen un punto singular en $x = 0$.

Escribiendo la ecuación (29) como

$$y'' + \frac{1}{x}y' + \left(\frac{x^2 - \nu^2}{x^2}\right) y = 0 \tag{31}$$

de donde podemos identificar a $b(x) = 1$ y $c(x) = x^2 - \nu^2$, las cuales son analíticas en $x = 0$, y por lo tanto el teorema de Frobenius es aplicable. Entonces, buscamos la solución de la ecuación de Bessel (29) de la forma

$$y(x) = \sum_{m=0}^{\infty} a_m x^{m+\rho} \tag{32}$$

Derivando, se tiene

$$
\begin{aligned}
y'(x) &= \sum_{m=0}^{\infty}(m+\rho)a_m x^{m+\rho-1} \\
y''(x) &= \sum_{m=0}^{\infty}(m+\rho-1)(m+\rho)a_m x^{m+\rho-2} \qquad (33)
\end{aligned}
$$

Sustituyendo (33) en (29), obtenemos

$$x^2\sum_{m=0}^{\infty}(m+\rho-1)(m+\rho)a_m x^{m+\rho-2}+$$

$$+x\sum_{m=0}^{\infty}(m+\rho)a_m x^{m+\rho-1}+$$

$$+x^2\sum_{m=0}^{\infty}a_m x^{m+\rho}-\nu^2\sum_{m=0}^{\infty}a_m x^{m+\rho}=0 \qquad (34)$$

Esta misma ecuación la podemos escribir como

$$\sum_{m=0}^{\infty}(m+\rho-1)(m+\rho)a_m x^{m+\rho}+$$
$$+\sum_{m=0}^{\infty}(m+\rho)a_m x^{m+\rho}+$$
$$+\sum_{m=2}^{\infty}a_{m-2}x^{m+\rho}-\nu^2\sum_{m=0}^{\infty}a_m x^{m+\rho}=0 \qquad (35)$$

Desplazando los primeros dos lugares de las sumas en los términos primero, segundo y cuarto, obtenemos

$$(\rho^2-\nu^2)a_0x^{0+\rho}+[(\rho+1)^2-\nu^2]a_1x^{1+\rho}+ \\ +\sum_{m=2}^{\infty}\left[\left[(m+\rho)^2-\nu^2\right]a_m+a_{m-2}\right]x^{m+\rho}=0 \tag{36}$$

Igualando a cero los coeficientes de cada potencia de x, obtenemos

$$\begin{aligned} (\rho^2-\nu^2)a_0 &= 0,\ (m=0) \\ \left[(\rho+1)^2-\nu^2\right]a_1 &= 0,\ (m=1) \\ \left[(m+\rho)^2-\nu^2\right]a_m + a_{m-2} &= 0,\ (m=2,3,\ldots) \end{aligned} \tag{37}$$

Debido a que $a_0 \neq 0$, de la primer ecuación en (38) se obtiene

$$\rho(\rho-1)+\rho-\nu^2 = 0 \quad \rightarrow \quad (\rho+\nu)(\rho-\nu)=0 \tag{38}$$

Las raíces son $\rho_1 = \nu$ y $\rho_2 = -\nu$.
Para $\rho = \rho_1 = \nu$ de la segunda ecuación de (38) se obtiene $a_1 = 0$. La tercera ecuación se puede escribir como

$$(m + \rho + \nu)(m + \rho - \nu)a_m + a_{m-2} = 0 \qquad (39)$$

y para el caso $\rho_2 = \nu$ esta expresión toma la forma

$$(m + 2\nu)ma_m + a_{m-2} = 0. \qquad (40)$$

Puesto que $a_1 = 0$ y $\nu > 0$, se sigue que $a_3 = 0, a_5 = 0$, sucesivamente. Si hacemos $m = 2s$ en (40) para los demás coeficientes se obtiene

$$a_{2s} = -\frac{1}{2^2 s(\nu + s)} a_{2s-2}, \qquad s = 1, 2, \ldots \tag{41}$$

y es posible determinar sucesivamente los coeficientes $a_2,\ a_4,\ a_6, \ldots$ De esta manera obtenemos

$$\begin{aligned} a_2 &= -\frac{a_0}{2^2(\nu + 1)} \\ a_4 &= -\frac{a_2}{2^2 2(\nu + 2)} = \frac{a_0}{2^4 2!(\nu + 1)(\nu + 2)} \end{aligned} \tag{42}$$

En general, tenemos

$$a_{2s} = \frac{(-1)^s a_0}{2^{2s} s!(\nu+1)(\nu+2)\dots(\nu+s)}, \qquad s = 1, 2, \dots \tag{43}$$

Funciones de Bessel

Dr. J. Juan Rosales García
Departamento de Ingeniería Eléctrica, DICIS-UGTO.

Los valores enteros de ν se representan por n. Para $\nu = n$ la relación (43) da como resultado

$$a_{2s} = \frac{(-1)^s a_0}{2^{2s} s!(n+1)(n+2)\dots(n+s)}, \qquad s = 1, 2, \dots \tag{44}$$

donde a_0 sigue siendo arbitraria.

Debido a la arbitrariedad vamos a elegir en lugar de $a_0 = 1$ a

$$a_0 = \frac{1}{2^n n!} \tag{45}$$

Con esta elección de (44), tenemos

$$a_{2s} = \frac{(-1)^s}{2^{2s+n} n! s! (n+s)}, \qquad s = 1, 2, \ldots \tag{46}$$

Con estos coeficientes y $\rho_1 = \nu = n$ obtenemos a partir de (32) una solución particular de (29) que se representa por $J_n(x)$

$$\boxed{J_n(x) = x^n \sum_{s=0}^{\infty} \frac{(-1)^s x^{2s}}{2^{2s+n} n! s! (n+s)!}} \tag{47}$$

Esta expresión se conoce con el nombre de función de Bessel de primera clase y de orden n. Esta serie converge para toda x, y además converge con bastante rapidez debido a los factoriales en el denominador.

Para $n = 0$, de la ecuación (47) obtenemos la función de Bessel de orden cero

$$J_0(x) = \sum_{s=0}^{\infty} \frac{(-1)^s x^{2s}}{2^{2s} s!(n+s)!} = 1 - \frac{x^2}{2^2(1!)^2} + \frac{x^4}{2^4(2!)^2} - \frac{x^6}{2^6(3!)^2} + \tag{48}$$

Para $n = 1$, de la ecuación (47) obtenemos la función de Bessel de orden uno. ésta tiene la forma

$$J_1(x) = \sum_{s=0}^{\infty} \frac{(-1)^s x^{2s+1}}{2^{2s+1} s!(s+1)!} = \frac{x}{2} - \frac{x^3}{2^3 1!2!} + \frac{x^5}{2^5 2!3!} - \frac{x^7}{2^7 3!4!} + \tag{49}$$

Se puede demostrar que para x grande, se tiene

$$\boxed{J_n(x) \approx \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \cos\left(x - \frac{n\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right)} \tag{50}$$

Ahora veamos el caso en que $\nu > 0$. Para esto es conveniente usar algunas fórmulas obtenidas de la función Gamma.

Por definición la función Gamma representada por $\Gamma(\nu)$ es

$$\Gamma(\nu) = \int_0^\infty e^{-t} t^{\nu-1} \mathrm{d}t \tag{51}$$

Luego, se cumplen la relaciones

$$\Gamma(\nu+1) = \nu\Gamma(\nu), \quad \Gamma(n+1) = n!, \quad (n = 0, 1, 2, \ldots) \tag{52}$$

La función Gamma generaliza la función factorial conocida en el cálculo elemental.

Ahora podemos escribir la expresión (45) como

$$a_0 = \frac{1}{2^{\nu}\Gamma(\nu+1)} \tag{53}$$

Entonces la expresión (43) toma la forma

$$a_{2s} = \frac{(-1)^s}{2^{2s+\nu}s!(\nu+1)(\nu+2)\cdots(\nu+s)\Gamma(\nu+1)} \tag{54}$$

Luego, tomando en cuenta (52)

$$(\nu+1)\Gamma(\nu+1) = \Gamma(\nu+2), \quad (\nu+2)\Gamma(\nu+2) = \Gamma(\nu+3) \tag{55}$$

Siguiendo estos razonamientos tenemos que en general

$$(\nu+1)(\nu+2)\cdots(\nu+s)\Gamma(\nu+1)=\Gamma(\nu+s+1) \quad (56)$$

De tal manera que los coeficientes vienen dados por la expresión

$$a_{2s}=\frac{(-1)^s}{2^{2s+\nu}s!\Gamma(\nu+s+1)} \quad (57)$$

Sustituyendo estos coeficientes en la expresión (32) se obtiene una solución particular de la ecuación (29) representada por $J_\nu(x)$

$$\boxed{J_\nu(x) = x^\nu \sum_{s=0}^{\infty} \frac{(-1)^s x^{2s}}{2^{2s+\nu} s!\Gamma(\nu+s+1)}} \tag{58}$$

A esta función se le conoce con el nombre de *función de Bessel de primera clase y de orden ν*. La serie (58) converge para todo x.

Hasta el momento hemos obtenido una solución particular $J_\nu(x)$ de la ecuación de Bessel. Ahora nos queda por obtener la solución general de la ecuación de Bessel. Para esto debemos hallar una segunda solución linealmente independiente.

Al sustituir ν por $-\nu$ en la ecuación (58), obtenemos

$$\boxed{J_{-\nu}(x) = x^{-\nu} \sum_{s=0}^{\infty} \frac{(-1)^s x^{2s}}{2^{2s-\nu} s! \Gamma(s-\nu+1)}} \tag{59}$$

Esto es debido a que la ecuación de Bessel incluye a ν^2, las funciones $J_\nu(x)$ y $J_{-\nu}(x)$ son soluciones de la misma ecuación para el mismo ν. Si ν no es entero, estas soluciones son linealmente independientes, ya que el primer término en (58) y el primero de (59) son múltiplos finitos diferentes de cero de x^ν y $x^{-\nu}$, respectivamente. Entonces, tenemos los siguientes teoremas:

Theorem

Si ν no es un entero, una solución general de la ecuación de Bessel para todo $x \neq 0$ es

$$\boxed{y(x) = c_1 J_\nu(x) + c_2 J_{-\nu}(x)} \tag{60}$$

donde $J_\nu(x)$ y $J_{-\nu}(x)$ están definidas en (58) y (59), respectivamente. Sin embargo, si ν es un entero, entonces (60) no es una solución general de la ecuación de Bessel. En este caso las dos soluciones de (60) serán linealmente dependientes.

Theorem

(Dependencia lineal de las funciones de Bessel). Si $\nu = n$ *es un entero, entonces las funciones de Bessel* $J_n(x)$ *y* $J_{-n}(x)$ *son linealmente dependientes, debido a que*

$$\boxed{J_{-n}(x) = (-1)^n J_n(x) \qquad n = 1, 2, \cdots} \tag{61}$$

Ejemplo 1:

Resolver la siguiente ecuación diferencial

$$x^2y'' + xy' + \left(4x^2 - \frac{1}{4}\right) y = 0. \tag{62}$$

Solución:
La ecuación (62) es muy parecida a la ecuación de Bessel (29). Para que estas dos ecuaciones sean iguales debemos hacer $4x^2 = t^2 \quad \rightarrow \quad t = 2x$, donde t es una nueva variable independiente.

Es decir, en la ecuación (62) debemos hacer la sustitución $t = 2x$

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x} = 2\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}, \ \frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(2\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\right) = 2\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\right)\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x} = 4\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2} \quad (63)$$

Donde hemos aplicado la regla de la cadena. Ahora sustituimos estos resultados en la ecuación (62) y obtenemos la siguiente ecuación diferencial

$$t^2\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2}+t\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}+\left(t^2-\frac{1}{4}\right)y=0 \tag{64}$$

Esta ecuación es una ecuación de Bessel con $\nu^2=1/4$ o bien $\nu=1/2$.

Entonces, como ν no es un entero, tenemos por el teorema 5.16.1 que la solución general es

$$y(t) = c_1 J_{1/2}(t) + c_2 J_{-1/2}(t) \tag{65}$$

Luego, recordando la sustitución $t = 2x$, tenemos la solución general de la ecuación (62)

$$y(x) = c_1 J_{1/2}(2x) + c_2 J_{-1/2}(2x) \tag{66}$$

Ejemplo 2:

Dr. J. Juan Rosales García
Departamento de Ingeniería Eléctrica, DICIS-UGTO.

Resolver la ecuación

$$x^2y'' + xy' + 4(x^4 - 2)y = 0 \tag{67}$$

Solución:

Si hacemos la sustitución

$$t = x^2 \tag{68}$$

y aplicando la regla de la cadena, tenemos

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} &= \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x} = 2x\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = 2t^{1/2}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} \\
\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2} &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(2t^{1/2}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\right)\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(2t^{1/2}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\right) \\
&= \left(t^{-1/2}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} + 2t^{1/2}\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2}\right)2t^{1/2} = 2\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} + 4t\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2}
\end{aligned}$$

Sustituyendo en (67), obtenemos

$$t\left(2\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}+4t\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2}\right)+t^{1/2}\left(2t^{1/2}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\right)+4(t^2-2)y=0 \tag{70}$$

Simplificando, obtenemos la siguiente ecuación de Bessel

$$t^2\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2} + t\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} + (t^2 - 2)y = 0 \tag{71}$$

donde $\nu = \sqrt{2}$. Entonces por el teorema 5.16.1, tenemos la solución general de (71)

$$y(t) = c_1 J_{\sqrt{2}}(t) + c_2 J_{-\sqrt{2}}(t) \tag{72}$$

Por consiguiente, la solución general de la ecuación (67) tiene la forma

$$y(x) = c_1 J_{\sqrt{2}}(x^2) + c_2 J_{-\sqrt{2}}(x^2) \tag{73}$$

Propiedades de la función $J_\nu(x)$

Dr. J. Juan Rosales García Departamento de Ingeniería Eléctrica, DICIS-UGTO.

Al multiplicar (58) por x^ν se obtiene

$$x^\nu J_\nu(x) = \sum_{s=0}^{\infty} \frac{(-1)^s x^{2s+2\nu}}{2^{2s+\nu} s! \Gamma(\nu + s + 1)} \tag{74}$$

Ahora, derivando esta expresión respecto a x, resulta

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}[x^\nu J_\nu(x)] &= \sum_{s=0}^{\infty} \frac{(-1)^s 2(s+\nu) x^{2s+2\nu-1}}{2^{2s+\nu} s! \Gamma(\nu + s + 1)} \\ &= x^\nu x^{\nu-1} \sum_{s=0}^{\infty} \frac{(-1)^s x^{2s}}{2^{2s+\nu-1} s! \Gamma(\nu + s)} \end{aligned} \tag{75}$$

De la ecuación (58) podemos observar que el segundo término es $x^{\nu} J_{\nu-1}(x)$. Con esto hallamos otra relación útil

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}[x^{\nu} J_{\nu}(x)] = x^{\nu} J_{\nu-1}(x)} \tag{76}$$

De manera similar, multiplicando (58) por $x^{-\nu}$, tomando la derivada y haciendo un cambio de índice se obtiene

$$\frac{d}{dx}[x^{-\nu}J_\nu(x)] = \sum_{s=1}^{\infty} \frac{(-1)^s x^{2s-1}}{2^{2s+\nu-1}(s-1)!\Gamma(\nu+s+1)} =$$

$$= \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^{m+1} x^{2m+1}}{2^{2m+\nu+1} m!\Gamma(\nu+m+2)} \tag{77}$$

donde $s = m+1$. Usando (58), la expresión del segundo término es $-x^{-\nu}J_{\nu-1}(x)$.

De esta manera obtenemos la relación

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dx}}[x^{-\nu}J_\nu(x) = -x^{-\nu}J_{\nu-1}(x)} \qquad (78)$$

Al desarrollar las fórmulas (76), (78) y multiplicar (30) por $x^{2\nu}$, obtenemos

$$\nu x^{\nu-1}J_\nu + x^\nu \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}J_\nu(x) = x^\nu J_{\nu-1}(x) \qquad (79)$$

$$-\nu x^{\nu-1}J_\nu + x^\nu \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}J_\nu(x) = -x^\nu J_{\nu+1}(x) \qquad (80)$$

Al restar (80) de (80) y dividir el resultado entre x^ν, obtenemos la primer relación de recurrencia

$$\boxed{J_{\nu-1}(x) + J_{\nu+1}(x) = \frac{2\nu}{x} J_\nu(x)} \tag{81}$$

Luego, al sumar (80), (80) y dividir el resultado entre x^ν, obtenemos la segunda relación de recurrencia

$$\boxed{J_{\nu-1}(x) - J_{\nu+1}(x) = 2\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}[J_\nu(x)]} \tag{82}$$

Estas dos últimas relaciones tienen una importancia práctica sobre todo en el trabajo numérico, donde la expresión (81) puede usarse para expresar funciones de Bessel de órdenes inferiores, las cuales permiten el uso de tablas

Funciones de Bessel fraccionarias $\nu = \pm\frac{1}{2}, \pm\frac{3}{2}, \pm\frac{5}{2}$

Dr. J. Juan Rosales García
Departamento de Ingeniería Eléctrica, DICIS-UGTO.

Para $\nu = \frac{1}{2}$, de la ecuación (58), tenemos

$$
\begin{aligned}
J_{1/2}(x) &= \sqrt{x}\sum_{s=0}^{\infty}\frac{(-1)^s x^{2s}}{2^{2s+1/2}s!\Gamma(s+\frac{3}{2})} = \\
&= \sqrt{\frac{2}{x}}\sum_{s=0}^{\infty}\frac{(-1)^s x^{2s+1}}{2^{2s+1}s!\Gamma(s+\frac{3}{2})} \qquad (83)
\end{aligned}
$$

Recordando las relaciones

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}, \quad \Gamma(\nu+1) = \nu\Gamma(\nu) \tag{84}$$

Usando estas expresiones en el denominador se tiene

$$\begin{aligned}
\Gamma\left(s+\frac{3}{2}\right) &= \left(s+\frac{1}{2}\right)\left(s-\frac{1}{2}\right)\ldots\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{2}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) \\
&= 2^{-(s+1)}(2s+1)(2s-1)\ldots 3\cdot\sqrt{\pi}
\end{aligned}$$

Además, en el denominador se tiene

$$2^{2s+1}s! = 2^{2s+1}s(s-1)\dots 2\cdot 1 = 2^{2s+1}2s(2s-2)\dots 4\cdot 2 \tag{85}$$

El denominador queda como $(2s+1)!\sqrt{\pi}$, de donde

$$J_{1/2}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}}\sum_{s=0}^{\infty}\frac{(-1)^s x^{2s+1}}{(2s+1)!} \tag{86}$$

ésta es la serie de Maclaurin de la función $\sin x$. Por consecuencia

$$\boxed{J_{1/2}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}}\sin x} \tag{87}$$

Ahora derivando (87), obtenemos

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}[\sqrt{x}J_{1/2}(x)] = x^{1/2}J_{-1/2}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\cos x \qquad (88)$$

de donde, obtenemos el resultado final

$$\boxed{J_{-1/2}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}}\cos x} \qquad (89)$$

Verificar que las siguientes relaciones son válidas:

$$
\begin{aligned}
J_{3/2}(x) &= \frac{1}{x}J_{1/2}(x) - J_{-1/2}(x) = \\
&= \sqrt{\frac{2}{\pi x}}\left(\frac{\sin x}{x} - \cos x\right) \qquad (90)\\
J_{-3/2}(x) &= -\frac{1}{x}J_{-1/2}(x) - J_{1/2}(x) = \\
& -\sqrt{\frac{2}{\pi x}}\left(\frac{\cos x}{x} + \sin x\right) \qquad (91)
\end{aligned}
$$

Ejemplo 3:

Resolver la ecuación

$$x^2y'' + xy' + \left(x^2 - \frac{1}{4}\right) y = 0. \tag{92}$$

Solución:
La ecuación (92) es una ecuación de Bessel con $\nu = 1/2$. Entonces, la solución general está dada por la función

$$y(x) = c_1 J_{1/2}(x) + c_2 J_{-1/2}(x) \tag{93}$$

Luego, tomando en cuenta los resultados obtenidos en (87) y (89) la solución (93) la podemos escribir de la siguiente manera:

$$y(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}}\,(c_1 \sin x + c_2 \cos x) \tag{94}$$

Ejemplo 4:

Dr. J. Juan Rosales García
Departamento de Ingeniería Eléctrica, DICIS-UGTO.

Resolver la ecuación

$$x^2 y'' + xy' + \left(x^2 - \frac{9}{4}\right) y = 0. \tag{95}$$

Solución:

La ecuación (95) es una ecuación de Bessel con $\nu = 3/2$. Entonces, la solución general es

$$y(x) = c_1 J_{3/2}(x) + c_2 J_{-3/2}(x). \tag{96}$$

Tomando en cuenta las expresiones (91) y (91) podemos escribir la solución general (96) de la siguiente manera

$$y(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \left[c_1 \left(\frac{\sin x}{x} - \cos x \right) + c_2 \left(\frac{\cos x}{x} + \sin x \right) \right] \tag{97}$$

Ejercicios Propuestos

Dr. J. Juan Rosales García
Departamento de Ingeniería Eléctrica, DICIS-UGTO.

1. $y'' + \frac{1}{x}y' + \left(1 - \frac{1}{9x^2}\right)y = 0$
2. $4x^2y'' + 4xy' + (100x^2 - 9)y = 0$
3. $x^2y'' + xy' + \left(4x^4 - \frac{16}{9}\right)y = 0$
4. $x^2y'' + xy' + (x^2 - 4)y = 0$
5. $xy'' + y' + \frac{1}{4}y = 0$