Sesión 26. Sistemas de Ecuaciones Diferenciales

Dr. J. Juan Rosales García
Departamento de Ingeniería Eléctrica, DICIS-UGTO.

Competencias:

- Desarrolla habilidades para resolver sistemas de EDs.
- Interpreta los resultados obtenidos.
- Analiza sistemas físicos descritos por un sistema de EDOs.

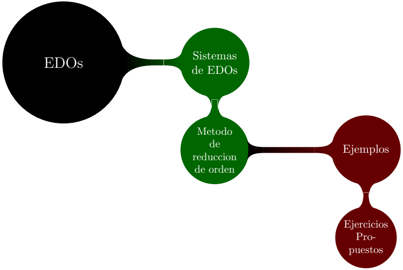
Contenido de la Sesión 26:

Dr. J. Juan Rosales García
Departamento de Ingeniería Eléctrica, DICIS-UGTO.

- Sistemas de EDs.
- Método de reducción de orden.

Mapa Mental

MAPA MENTAL — ECUACIONES DIFERENCIALES ORDINARIAS — AGOSTO-DICIEMBRE 2021



Resúmen

Dr. J. Juan Rosales García
Departamento de Ingeniería Eléctrica, DICIS-UGTO.

Hemos aprendido diferentes métodos para resolver ecuaciones diferenciales ordinarias considerándolas individualmente. Sin embargo, en la práctica es muy probable que se necesite más de una ecuación diferencial para modelar un proceso dado.
En esta sesión analizaremos situaciones en las cuales dos o más funciones desconocidas están relacionadas mediante un conjunto de ecuaciones diferenciales.

Sistemas de ecuaciones diferenciales ordinarias

En general, un sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}y_1}{\mathrm{d}t} &= f_1(t,\, y_1,\, y_2, \dots,\, y_n) \\ \frac{\mathrm{d}y_2}{\mathrm{d}t} &= f_2(t,\, y_1,\, y_2, \dots,\, y_n) \\ &\vdots \\ \frac{\mathrm{d}y_n}{\mathrm{d}t} &= f_n(t,\, y_1,\, y_2, \dots,\, y_n) \end{aligned} \tag{1}$$

donde, $y_1,\, y_2, \dots,\, y_n$ son funciones desconocidas de la variable t, se llama sistema normal. Si la parte derecha del sistema normal son funciones lineales respecto a $y_1, y_2, \dots, y_n$, entonces, el sistema de ecuaciones diferenciales se llama sistema lineal.

Un sistema de EDs de primer orden es lineal, si tiene la forma

$$
\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}y_1}{\mathrm{d}t} &= a_{11}(t)y_1(t) + a_{12}(t)y_2(t) + \ldots + a_{1n}(t)y_n(t) + \\
&+ f_1(t) \\
\frac{\mathrm{d}y_2}{\mathrm{d}t} &= a_{21}(t)y_1(t) + a_{22}(t)y_2(t) + \ldots + a_{2n}(t)y_n(t) + \\
&+ f_2(t) \qquad (2) \\
&\vdots \\
\frac{\mathrm{d}y_n}{\mathrm{d}t} &= a_{n1}(t)y_1(t) + a_{n2}(t)y_2(t) + \ldots + a_{nn}(t)y_n(t) + \\
&+ f_n(t)
\end{aligned}
$$

Dr. J. Juan Rosales García
Departamento de Ingeniería Eléctrica, DICIS-UGTO.

Recordando el álgebra de matrices, tenemos que el sistema (3) lo podemos escribir como

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}(t) & a_{12}(t) & \dots & a_{1n}(t) \\ a_{21}(t) & a_{22}(t) & \dots & a_{2n}(t) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1}(t) & a_{2n}(t) & \dots & a_{nn}(t) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} + + \begin{pmatrix} f_1(t) \\ f_2(t) \\ \vdots \\ f_n(t) \end{pmatrix} \tag{3}$$

La forma matricial (3) se puede escribir de una forma más compacta usando la forma vectorial

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}Y(t)}{\mathrm{d}t} = A(t)\mathrm{Y(t)} + \mathrm{F}(t)} \tag{4}$$

donde hemos hecho las siguientes definiciones:

$$\mathrm{Y}(t) = \begin{pmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \\ \vdots \\ y_n(t) \end{pmatrix}, \; A(t) = \begin{pmatrix} a_{11}(t) & a_{12}(t) & \dots & a_{1n}(t) \\ a_{21}(t) & a_{22}(t) & \dots & a_{2n}(t) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1}(t) & a_{2n}(t) & \dots & a_{nn}(t) \end{pmatrix}, \tag{5}$$

A la matriz $A(t)$ se le conoce como *matriz de coeficientes*, y a $\mathrm{F}(t)$ como la *función de excitación* o *fuente*. Se supone que $A(t)$ y $\mathrm{F}(t)$ son continuas si sus elementos son continuos en algún intervalo (a, b). Si la función de excitación $\mathrm{F}(t) = 0$, entonces decimos que el sistema (4) es un *sistema homogéneo*. El sistema dado por (4) es un sistema no homogéneo si $\mathrm{F}(t) \neq 0$.

Un vector solución en un intervalo $I \in (a, b)$ es cualquier matriz columna

$$\mathrm{Y}(t) = \begin{pmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \\ \vdots \\ y_n(t) \end{pmatrix} \tag{6}$$

cuyos elementos son funciones diferenciables y satisfacen el sistema de ecuaciones (3), o (4) en el intervalo dado.

Dr. J. Juan Rosales García
Departamento de Ingeniería Eléctrica, DICIS-UGTO.

Supongamos que t_0 es un punto en el intervalo $I \in (a,\ b)$, y sean

$$\mathrm{Y}(t_0) = \begin{pmatrix} y_1(t_0) \\ y_2(t_0) \\ \vdots \\ y_n(t_0) \end{pmatrix} \quad \rightarrow \quad \mathrm{Y}_0 = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix} \tag{7}$$

donde, c_i, $(i = 1,\ 2, ...,\ n)$ son constantes dadas.

Entonces, el problema

$$
\begin{aligned}
\text{Resolver:} \quad \frac{d\mathsf{Y}}{dt} &= A(t)\mathsf{Y} + \mathsf{F}(\mathsf{t}) \\
\text{Sujeto a:} \quad \mathsf{Y}(\mathsf{t}_0) &= \mathsf{Y}_0
\end{aligned} \tag{8}
$$

es un *problema de valor inicial* en el intervalo dado. Ahora, podemos hacernos la siguiente pregunta: ¿Cuáles serán las condiciones suficientes para que el problema de valor inicial (8) tenga solución? La respuesta la da el siguiente teorema.

Theorem

Sean las componentes a_{ij} y las f_i del sistema (5) funciones continuas de t en un intervalo abierto $a < t < b$ que contiene al punto $t = t_0$. Entonces, existe una solución del problema de valor inicial (8). Esta solución, además, es única.

Estudiaremos cuatro de los métodos más comunes en la solución de los sistemas de ecuaciones diferenciales lineales con coeficientes constantes (8).

Reducción de un sistema de ecuaciones a una ecuación de orden n

En ocasiones, un sistema de ecuaciones diferenciales (3) se puede transformar a una ecuación diferencial de orden n, la cual contiene una función desconocida. Esto se puede realizar diferenciando una de las ecuaciones del sistema y eliminando todas las otras desconocidas. Este método se conoce como método de eliminación.

Sin perder generalidad, analizaremos este método para el caso de un sistema de dos ecuaciones diferenciales. Sea el sistema

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} &= ax + by + f(t) \\ \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} &= cx + dy + g(t) \end{aligned} \tag{9}$$

donde a, b, c y d son ciertas constantes, $f(t)$, $g(t)$ son funciones dadas, y $x(t)$, $y(t)$ son las funciones desconocidas.

De la primera ecuación de (9) despejamos $y(t)$

$$y(t) = \frac{1}{b}\left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} - ax - f(t)\right) \tag{10}$$

Derivando esta función respecto a t, obtenemos

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = \frac{1}{b}\left(\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2} - a\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} - \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}t}\right) \tag{11}$$

Sustituyendo las expresiones (10) y (11) en la segunda ecuación del sistema (9) resulta

$$\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}-(a+d)\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}-(bc-da)x=\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}t}-f(t)d+bg(t) \quad (12)$$

Esta misma expresión la podemos escribir de una manera más general

$$A\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}+B\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}+Cx=P(t) \quad (13)$$

Al resolver esta ecuación tendremos una solución de la forma

$$x(t) = x(t,\, c_1,\, c_2) \tag{14}$$

Luego, derivando la expresión obtenida respecto a t y sustituyendo en la ecuación (10) hallamos $y(t)$. De esta manera obtenemos las soluciones $x(t)$ y $y(t)$ del sistema de ecuaciones (9).

Ejemplo 1:

Dr. J. Juan Rosales García
Departamento de Ingeniería Eléctrica, DICIS-UGTO.

Resolver el siguiente sistema de ecuaciones diferenciales

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} &= 2y \\ \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} &= x \end{aligned} \tag{15}$$

Solución:

Una forma para resolver este sistema es darnos cuenta que, derivando la primera ecuación de la expresión (15) respecto al tiempo t (no necesariamente t es el tiempo) y después tomando en cuenta la segunda ecuación obtenemos una ecuación lineal de segundo orden, esto es

$$\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2} = 2\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} \tag{16}$$

Luego, sustituyendo en (16) el valor $\mathrm{d}y/\mathrm{d}t = x$ de la segunda ecuación de (15), obtenemos

$$\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2} = 2x \tag{17}$$

La ecuación (17) se puede escribir como

$$\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2} - 2x = 0 \tag{18}$$

Esta ecuación es una ecuación diferencial lineal homogénea de segundo orden con coeficientes constantes.

Suponiendo una solución de la forma $x(t) = e^{mt}$, entonces tenemos que la correspondiente ecuación característica y sus raíces están dadas por

$$m^2 - 2 = 0 \quad \rightarrow \quad m = \pm\sqrt{2} \tag{19}$$

Entonces, la solución general de la ecuación (18) está dada por

$$x(t) = c_1 e^{\sqrt{2}t} + c_2 e^{-\sqrt{2}t} \tag{20}$$

De la primera ecuación de (15) tenemos $y(t) = \frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}$. Luego, derivando la expresión (20) respecto a t, tenemos

$$y(t) = \frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = \frac{c_1\sqrt{2}}{2}e^{\sqrt{2}t} - \frac{c_2\sqrt{2}}{2}e^{-\sqrt{2}t} \tag{21}$$

De tal manera que la solución general del sistema (15) es

$$\begin{aligned} x(t) &= c_1 e^{\sqrt{2}t} + c_2 e^{-\sqrt{2}t} \\ y(t) &= \tilde{c}_1 e^{\sqrt{2}t} - \tilde{c}_2 e^{-\sqrt{2}t} \end{aligned} \tag{22}$$

donde $\tilde{c}_1 = \frac{c_1\sqrt{2}}{2}$, $\tilde{c}_2 = \frac{c_2\sqrt{2}}{2}$. El sistema de ecuaciones (15) también puede ser resuelto de la siguiente manera; usando la regla de la cadena, tenemos

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x} = \frac{x}{2y} \tag{23}$$

Esta ecuación es una ecuación de primer orden y de variables separables. Separando las variables e integrando, obtenemos

$$2y^2 - x^2 = c \tag{24}$$

En principio, las dos soluciones obtenidas (22) y (24) son las mismas, nada más que la primera está en forma paramétrica y la segunda no.

Ejemplo 2:

Dr. J. Juan Rosales García Departamento de Ingeniería Eléctrica, DICIS-UGTO.

Resolver el sistema de ecuaciones diferenciales

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} &= x\cos t \\ \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} &= xe^{-\sin t} \end{aligned} \tag{25}$$

Solución:

La primera ecuación no depende de y, y por lo tanto, la podemos integrar separando las variables

$$\begin{aligned} \int \frac{\mathrm{d}x}{x} &= \int \cos t\,\mathrm{d}t \;\rightarrow\; \ln\left(\frac{x}{c_1}\right) = \sin t, \\ x(t) &= c_1 e^{\sin t} \end{aligned} \tag{26}$$

Sustituyendo el valor de $x(t)$ en la segunda ecuación del sistema (25), obtenemos

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = c_1 e^{\sin t} e^{-\sin t} = c_1 \quad \rightarrow \quad \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = c_1 \tag{27}$$

Integrando, tenemos la solución

$$y(t) = c_1 t + c_2 \tag{28}$$

donde c_1 y c_2 son constantes de integración.

Por consiguiente, la solución general del sistema de ecuaciones (25) tiene la forma

$$\begin{aligned} x(t) &= c_1 e^{\sin t} \\ y(t) &= c_1 t + c_2 \end{aligned} \tag{29}$$

Ejemplo 3:

Dr. J. Juan Rosales García
Departamento de Ingeniería Eléctrica, DICIS-UGTO.

Resolver el sistema de ecuaciones

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} &= ax + y \\ \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} &= -x + ay \end{aligned} \tag{30}$$

Solución:

Derivando, respecto a t, la primera ecuación del sistema (30), tenemos

$$\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2} = a\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} + \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} \tag{31}$$

Dr. J. Juan Rosales García
Departamento de Ingeniería Eléctrica, DICIS-UGTO.

Luego, sustituyendo la segunda ecuación de (30) en (31), obtenemos

$$\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2} = a\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} - x + ay \tag{32}$$

De la primera ecuación de (30) despejamos y

$$y = -ax + \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} \tag{33}$$

y sustituyéndola en (32), obtenemos la ecuación diferencial

$$\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2} - 2a\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} + (a^2+1)x = 0 \tag{34}$$

Dr. J. Juan
Rosales García
Departamento de
Ingeniería
Eléctrica,
DICIS-UGTO.

Ahora, nos queda por resolver esta ecuación que es de segundo orden con coeficientes constantes. Supongamos la solución $x(t) = e^{mt}$, entonces la ecuación característica tiene la forma

$$m^2 - 2am + (a^2 + 1) = 0 \tag{35}$$

Las raíces de esta ecuación son

$$m_{1,2} = a \pm i \tag{36}$$

La solución general tiene la forma

$$x(t) = e^{at}\left(c_1 \cos t + c_2 \sin t\right) \tag{37}$$

Dr. J. Juan Rosales García
Departamento de Ingeniería Eléctrica, DICIS-UGTO.

Luego, sustituyendo esta expresión en (33), tenemos

$$\begin{aligned} y(t) &= \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} - ax = ae^{at}\left(c_1\cos t + c_2\sin t\right) + \\ &+ e^{at}\left(-c_1\sin t + c_2\cos t\right) \\ &- ae^{at}\left(c_1\cos t + c_2\sin t\right) = \\ &= e^{at}\left(-c_1\sin t + c_2\cos t\right) \end{aligned} \tag{38}$$

Entonces, las soluciones del sistema están dadas por las expresiones

$$\begin{aligned} x(t) &= e^{at}\left(c_1\cos t + c_2\sin t\right) \\ y(t) &= e^{at}\left(-c_1\sin t + c_2\cos t\right) \end{aligned} \tag{39}$$

Ejemplo 4:

Dr. J. Juan Rosales García
Departamento de Ingeniería Eléctrica, DICIS-UGTO.

Resolver el siguiente sistema de ecuaciones

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} &= e^{3t} - y \\ \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} &= 2e^{3t} - x \end{aligned} \tag{40}$$

Solución:

Diferenciando respecto a t la primera ecuación del sistema, obtenemos

$$\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2} = 3e^{3t} - \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} \tag{41}$$

Sustituyendo en (41) la segunda ecuación del sistema (40), resulta la ecuación

$$\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2} = 3e^{3t} - 2e^{3t} + x = e^{3t} + x \quad \rightarrow \quad \frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2} - x = e^{3t} \tag{42}$$

Esta última ecuación es una ecuación lineal no homogénea de segundo orden.

La ecuación homogénea correspondiente a (42) es

$$\frac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t^2} - x = 0 \tag{43}$$

Supongamos la solución $x(t) = e^{mt}$, sustituyendo en (43), obtenemos la ecuación característica y sus raíces

$$m^2 - 1 = 0 \quad \rightarrow \quad m = \pm 1 \tag{44}$$

Por consiguiente, la solución homogénea de la ecuación (43) está dada por

$$x_h(t) = c_1 e^t + c_2 e^{-t} \tag{45}$$

Luego, suponemos una solución particular x_p de la ecuación (42)

$$x_p = Ae^{3t} \tag{46}$$

Sustituyendo en la ecuación (42), resulta

$$9Ae^{3t} - Ae^{3t} = 8e^{3t} \quad \rightarrow \quad A = \frac{1}{8} \tag{47}$$

Entonces, la solución particular es

$$x_p(t) = \frac{1}{8}e^{3t} \tag{48}$$

Luego, la solución general de la ecuación (42) es

$$x(t) = c_1 e^{t} + c_2 e^{-t} + \frac{1}{8}e^{3t} \tag{49}$$

De la segunda ecuación del sistema (40) podemos despejar y

$$y(t) = e^{3t} - \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} \tag{50}$$

Ahora, derivamos respecto a t la solución (49) y sustituyéndola en (50), obtenemos

$$y(t) = e^{3t} - \left(c_1 e^{t} - c_2 e^{-t} + \frac{3}{8} e^{3t} \right) = -c_1 e^{t} + c_2 e^{-t} + \frac{5}{8} e^{3t} \tag{51}$$

Finalmente, la solución general del sistema (40) está dado por las expresiones

$$\begin{aligned} x(t) &= c_1 e^{t} + c_2 e^{-t} + \frac{1}{8} e^{3t} \\ y(t) &= -c_1 e^{t} + c_2 e^{-t} + \frac{5}{8} e^{3t} \end{aligned} \tag{52}$$

Ejemplo 5:

Dr. J. Juan Rosales García
Departamento de Ingeniería Eléctrica, DICIS-UGTO.

Resolver el sistema de ecuaciones

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} &= 2y \\ \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} &= 2z \\ \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t} &= 2x \end{aligned} \tag{53}$$

Solución:

Diferenciando respecto a t la primera ecuación de (54), obtenemos

$$\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2} = 2\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} \tag{54}$$

Sustituyendo la segunda ecuación de (54) en (54), se tiene

$$\frac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t^2} = 4z \tag{55}$$

Dr. J. Juan
Rosales García
Departamento de
Ingeniería
Eléctrica,
DICIS-UGTO.

Derivando esta ecuación respecto a t, resulta

$$\frac{\mathrm{d}^3 x}{\mathrm{d}t^3} = 4\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t} \tag{56}$$

Sustituyendo la tercera ecuación de (54) en (56), obtenemos la ecuación homogénea de tercer orden

$$\frac{\mathrm{d}^3 x}{\mathrm{d}t^3} = 8x \quad \to \quad \frac{\mathrm{d}^3 x}{\mathrm{d}t^3} - 8x = 0 \tag{57}$$

La solución general de esta ecuación es

$$x(t) = c_1 e^{2t} + e^{-t}\left(c_2 \cos\sqrt{3}t + c_3 \sin\sqrt{3}t\right) \tag{58}$$

De (54) obtenemos la solución general

$$\begin{aligned} y(t) &= \frac{1}{2}\Big[2c_1 e^{2t} - e^{-t}\left(c_2\cos\sqrt{3}t + c_3\sin\sqrt{3}t\right) \\ &+ \sqrt{3}e^{-t}\left(c_3\cos\sqrt{3}t - c_2\sin\sqrt{3}t\right)\Big] \\ &= \frac{1}{2}e^{-t}\left[\left(\sqrt{3}c_3 + c_2\right)\cos\sqrt{3}t\right] - \\ &- \frac{1}{2}e^{-t}\left[\left(\sqrt{3}c_2 + c_3\right)\sin\sqrt{3}t\right] + \\ &+ c_1 e^{2t} \end{aligned} \tag{59}$$

De la segunda ecuación del sistema (54), obtenemos la función $z(t)$

$$\begin{aligned} z(t) &= c_1 e^{2t} - \frac{1}{2}e^{-t}\left[\left(\sqrt{3}c_3 + c_2\right)\cos\sqrt{3}t\right] - \\ &- \frac{1}{2}e^{-t}\left[\left(\sqrt{3}c_2 - c_3\right)\sin\sqrt{3}t\right] \end{aligned} \tag{60}$$

Finalmente, tenemos las soluciones

$$
\begin{aligned}
x(t) &= c_1 e^{2t} + e^{-t}\left(c_2 \cos\sqrt{3}t + c_3 \sin\sqrt{3}t\right) \qquad (61)\\
y(t) &= c_1 e^{2t} + \frac{1}{2}e^{-t}\left(\sqrt{3}c_3 + c_2\right)\cos\sqrt{3}t - \\
&- \frac{1}{2}e^{-t}\left(\sqrt{3}c_2 + c_3\right)\sin\sqrt{3}t \\
z(t) &= c_1 e^{2t} - \frac{1}{2}e^{-t}\left(\sqrt{3}c_3 + c_2\right)\cos\sqrt{3}t - \\
&- \frac{1}{2}e^{-t}\left(\sqrt{3}c_2 - c_3\right)\sin\sqrt{3}t
\end{aligned}
$$

Ejemplo 6:

Dr. J. Juan Rosales García Departamento de Ingeniería Eléctrica, DICIS-UGTO.

Resolver el siguiente sistema de ecuaciones con las condiciones dadas

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} &= 3x + 8y \\ \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} &= -3y - x, \quad x(0) = 6,\ y(0) = -2 \end{aligned} \tag{62}$$

Solución:

Derivamos la primera ecuación del sistema (62) respecto a t

$$\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2} = 3\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} + 8\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} \tag{63}$$

Sustituyendo en (63) la segunda ecuación del sistema (62), obtenemos

$$\frac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t^2} = 3\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} + 8\left(-3y - x\right) = 3\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} - 24y - 8x \qquad (64)$$

De la primera ecuación del sistema (62) despejamos y

$$y = \frac{1}{8}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} - \frac{3}{8}x \tag{65}$$

y sustituyéndola en (64), resulta

$$\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2} = 3\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} - 8x - 24\left(\frac{1}{8}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} - \frac{3}{8}x\right) = -8x + 9x = x \tag{66}$$

Dr. J. Juan Rosales García
Departamento de Ingeniería Eléctrica, DICIS-UGTO.

Hemos obtenido la ecuación

$$\frac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t^2} - x = 0 \tag{67}$$

ésta es una ecuación lineal respecto a x, de segundo orden con coeficientes constantes. Sustituyendo la solución $x(t) = e^{mt}$ en (67), obtenemos la ecuación característica y sus respectivas raíces

$$m^2 - 1 = 0 \quad \rightarrow \quad m = \pm 1 \tag{68}$$

Entonces, la solución general de (67) es

$$x(t) = c_1 e^{t} + c_2 e^{-t} \tag{69}$$

Para encontrar la solución $y(t)$, es necesario usar la expresión (65). Para esto derivamos respecto a t la expresión (69)

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = c_1 e^{t} - c_2 e^{-t} \tag{70}$$

Sustituyendo en (65) las expresiones (70) y (69), obtenemos

$$y(t) = \frac{c_1}{8}e^{t} - \frac{c_2}{8}e^{-t} - \frac{3}{8}\left(c_1 e^{t} + c_2 e^{-t}\right) = -\frac{c_1}{4}e^{t} - \frac{c_2}{2}e^{-t} \tag{71}$$

Es decir, las soluciones generales del sistema (62) son (69) y (71)

$$\begin{aligned} x(t) &= c_1 e^{t} + c_2 e^{-t} \\ y(t) &= -\frac{c_1}{4}e^{t} - \frac{c_2}{2}e^{-t} \end{aligned} \tag{72}$$

Ahora sólo nos queda hallar las constantes c_1 y c_2 de las condiciones iniciales dadas. Esto es, cuando $t = 0$, $x = 6$, y cuando $t = 0$, $y = -2$. Sustituyendo estos valores en el sistema (72), obtenemos

$$\begin{aligned} c_1 + 2c_2 &= 8 \\ c_1 + c_2 &= 6 \end{aligned} \qquad (73)$$

Resolviendo este sistema hallamos los valores $c_1 = 4$ y $c_2 = 2$.

Entonces, poniendo estos valores en la solución general (72), obtenemos la solución particular

$$\begin{aligned} x(t) &= 4e^{t} + 2e^{-t} \\ y(t) &= -e^{t} - e^{-t} \end{aligned} \tag{74}$$

Estas soluciones particulares, obtenidas de las soluciones generales (72), cumplen las condiciones dadas $x(0) = 6$, y $y(0) = -2$.

Ejercicios Propuestos

Dr. J. Juan Rosales García
Departamento de Ingeniería Eléctrica, DICIS-UGTO.

1. $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = -x + 8y, \quad \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = x + y$
2. $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = x - 3y, \quad \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = 3x + y$
3. $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = 2x + y, \quad \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = 3x + 4y$
4. $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = x - 3y, \quad \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = 3x + y$
5. $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = 2y - 3x, \quad \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = y - 2x$