Sesión 27. Sistema de EDOs: Métodos de Solución

Dr. J. Juan Rosales García
Departamento de Ingeniería Eléctrica, DICIS-UGTO.

Competencias:

Dr. J. Juan Rosales García
Departamento de Ingeniería Eléctrica, DICIS-UGTO.

- Resuelve sistemas de EDOs. mediante combinaciones integrables

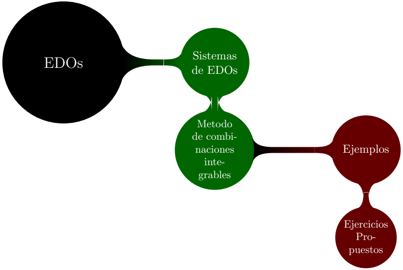
Contenido de la Sesión 27:

Dr. J. Juan Rosales García
Departamento de Ingeniería Eléctrica, DICIS-UGTO.

- Método de combinaciones integrables.

Mapa Mental

Dr. J. Juan Rosales García
Departamento de Ingeniería Eléctrica, DICIS-UGTO.



Solución de sistemas de ED mediante combinaciones integrables.

En algunos casos, combinando las ecuaciones del sistema de ecuaciones diferenciales (no necesariamente lineales), después de algunas operaciones (suma, resta, división, etc.) es posible obtener ecuaciones fácilmente integrables. éstas tienen la forma

$$F\left(t,\, u,\, \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}\right) = 0 \tag{1}$$

donde u es una función de las funciones buscadas $x_1(t)$, $x_2(t)$, ..., $x_n(t)$. Este método se llama *método de combinaciones integrables*.

Resolver el sistema de ecuaciones

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} &= \frac{y^2}{x}\\ \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} &= \frac{x^2}{y}\end{aligned} \tag{2}$$

Solución:

éste es un sistema no lineal. Escribiendo el sistema (2) de la siguiente manera:

$$\begin{aligned}x\mathrm{d}x &= y^2\mathrm{d}t\\ y\mathrm{d}y &= x^2\mathrm{d}t\end{aligned} \tag{3}$$

Sumando término a término, resulta

$$x\mathrm{d}x + y\mathrm{d}y = (x^2+y^2)\mathrm{d}t \quad \to \quad \frac{\mathrm{d}(x^2+y^2)}{2(x^2+y^2)} = \mathrm{d}t \tag{4}$$

Dr. J. Juan
Rosales García
Departamento de
Ingeniería
Eléctrica,
DICIS-UGTO.

Integrando la última expresión

$$\int \frac{\mathrm{d}(x^2+y^2)}{x^2+y^2} = \int 2\mathrm{d}t \quad \rightarrow \quad \ln(x^2+y^2) = 2t + \ln c_1 \tag{5}$$

Esta última expresión la podemos escribir como

$$x^2 + y^2 = c_1 e^{2t} \tag{6}$$

Ahora, restando término a término la segunda ecuación de la primera en (3), obtenemos

$$x\mathrm{d}x - y\mathrm{d}y = (y^2 - x^2)dt \quad \rightarrow \quad \frac{\mathrm{d}(x^2-y^2)}{x^2-y^2} = -2\mathrm{d}t \tag{7}$$

Integrando

$$\int \frac{\mathrm{d}(x^2 - y^2)}{x^2 - y^2} = -2 \int \mathrm{d}t \tag{8}$$

se obtiene

$$x^2 - y^2 = c_2 e^{-2t} \tag{9}$$

Entonces, tenemos el siguiente sistema de ecuaciones algebraicas

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 &= c_1 e^{2t} \\ x^2 - y^2 &= c_2 e^{-2t} \end{aligned} \tag{10}$$

Es fácil resolver este sistema mediante suma y resta. El resultado es

$$\begin{aligned} x(t) &= \pm\sqrt{\tilde{c}_1 e^{2t} + \tilde{c}_2 e^{-2t}} \\ y(t) &= \pm\sqrt{\tilde{c}_1 e^{2t} - \tilde{c}_2 e^{-2t}} \end{aligned} \tag{11}$$

donde, $\tilde{c}_1 = \frac{c_1}{2}$, y $\tilde{c}_2 = \frac{c_2}{2}$. Las expresiones en (11) son las soluciones del sistema.

Ejemplo:

Dr. J. Juan
Rosales García
Departamento de
Ingeniería
Eléctrica,
DICIS-UGTO.

Resolver el sistema de ecuaciones

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} &= \frac{1}{y} \\ \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} &= \frac{1}{x} \end{aligned} \tag{12}$$

Solución: Escribamos el sistema de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} y\mathrm{d}x &= \mathrm{d}t, \\ x\mathrm{d}y &= \mathrm{d}t \end{aligned} \tag{13}$$

Sumando las dos ecuaciones resulta

$$y\mathrm{d}x + x\mathrm{d}y = 2\mathrm{d}t \quad \to \quad \mathrm{d}(xy) = 2\mathrm{d}t \tag{14}$$

Integrando

$$\int \mathrm{d}(xy) = 2\int \mathrm{d}t \quad \rightarrow \quad xy = 2t + c_1 \tag{15}$$

Ahora, restando una ecuación de la otra del sistema (13), obtenemos

$$y\mathrm{d}x - x\mathrm{d}y = 0 \quad \rightarrow \quad \frac{\mathrm{d}x}{x} - \frac{\mathrm{d}y}{y} = 0 \tag{16}$$

Integrando

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{x} = \int \frac{\mathrm{d}y}{y} \quad \rightarrow \quad y = c_2 x \tag{17}$$

Entonces, tenemos el sistema de ecuaciones algebraicas

$$\begin{aligned} xy &= 2t + c_1 \\ y &= c_2 x \end{aligned} \tag{18}$$

Sustituyendo la segunda ecuación de (18) en la primera, obtenemos

$$x(t) = \sqrt{\frac{2t + c_1}{c_2}} \tag{19}$$

Dr. J. Juan
Rosales García
Departamento de
Ingeniería
Eléctrica,
DICIS-UGTO.

Luego, poniendo este resultado en la segunda ecuación de (18), se tiene

$$y(t) = c_2\sqrt{\frac{2t+c_1}{c_2}} = \sqrt{c_2(2t+c_1)} \tag{20}$$

Finalmente, las soluciones del sistema dado son

$$\begin{aligned} x(t) &= \sqrt{\frac{2t+c_1}{c_2}} \\ y(t) &= \sqrt{c_2(2t+c_1)} \end{aligned} \tag{21}$$

Ejemplo:

Dr. J. Juan
Rosales García
Departamento de
Ingeniería
Eléctrica,
DICIS-UGTO.

Resolver el sistema de ecuaciones diferenciales con valores iniciales

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} &= \frac{x}{x+y} \\ \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} &= \frac{y}{x+y} \quad x(0)=1 \ y(0)=2. \end{aligned} \tag{22}$$

Solución:

Dividiendo la primera ecuación entre la segunda, resulta

$$\frac{\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}}{\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}} = \frac{\frac{x}{x+y}}{\frac{y}{x+y}} = \frac{x}{y} \quad \rightarrow \quad \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y} = \frac{x}{y} \tag{23}$$

Dr. J. Juan Rosales García
Departamento de Ingeniería Eléctrica, DICIS-UGTO.

Esta última ecuación es de variables separables.
Separando las variables e integrando

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{x} = \int \frac{\mathrm{d}y}{y} \quad \rightarrow \quad \ln x = \ln y + \ln c_1 \quad \rightarrow \quad x = c_1 y \tag{24}$$

Ahora, sumando las dos ecuaciones del sistema (22) se tiene

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} + \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = \frac{x}{x+y} + \frac{y}{x+y} = 1 \quad \rightarrow \quad \mathrm{d}x + \mathrm{d}y = \mathrm{d}t \tag{25}$$

Integrando la última ecuación de (25)

$$\int \mathrm{d}x + \int \mathrm{d}y = \int \mathrm{d}t \rightarrow x + y = t + c_2 \tag{26}$$

Entonces, hemos obtenido el sistema de ecuaciones algebraicas

$$\begin{aligned} x &= c_1 y \\ x + y &= t + c_2 \end{aligned} \tag{27}$$

Resolviendo este sistema simultáneamente, obtenemos las funciones $x(t)$ y $y(t)$, las cuales tienen la forma

$$\begin{aligned} x(t) &= \frac{c_1(t+c_2)}{c_1+1} \\ y(t) &= \frac{t+c_2}{c_1+1} \end{aligned} \tag{28}$$

Estas funciones constituyen las soluciones generales del sistema (22). Ahora nos queda por encontrar una solución particular que cumpla con las condiciones iniciales dadas en (22). Esto es, cuando $t=0$, $x=1$ y cuando $t=0$, $y=2$.

Sustituyendo estas condiciones en (28), obtenemos el sistema de ecuaciones algebraicas

$$\begin{aligned} c_1 + 1 &= c_1 c_2, \\ 2(c_1 + 1) &= c_2 \end{aligned} \tag{29}$$

Multiplicando la primera ecuación por dos y restando la segunda a la primera ecuación, obtenemos

$$2c_1 c_2 - c_2 = 0, \ \rightarrow \ c_2(2c_1 - 1) = 0, \ \rightarrow \ c_2 = 0, \ c_1 = \frac{1}{2} \tag{30}$$

Sustituyendo los valores encontrados de las constantes c_1 y c_2 en las soluciones generales (28), finalmente tenemos la solución del problema (22), ésta es

$$\begin{aligned} x(t) &= \frac{1}{3}t \\ y(t) &= \frac{2}{3}t \end{aligned} \tag{31}$$

Ejercicios Propuestos

Dr. J. Juan Rosales García
Departamento de Ingeniería Eléctrica, DICIS-UGTO.

1. $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = 3 - 2y, \quad \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = 2x - 2t$
2. $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = -3x - y, \quad \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = x - y$
3. $\mathrm{m}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = 2x - 9y, \quad \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = x + 8y$
4. $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = y + z, \quad \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = 3x + z, \quad \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t} = 3x + y$
5. $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = 8y, \quad \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = -2z, \quad \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t} = 2x + 8y - 2z$