Sesión 28. Sistema de EDOs: Método de variación del parámetro y valores propios

Dr. J. Juan Rosales García
Departamento de Ingeniería Eléctrica, DICIS-UGTO.

Competencias:

- Aplica el método de variación de parámetros para resolver sistemas de EDOs.
- Aplica el método de valores y vectores propios para resolver sistemas de EDOs.

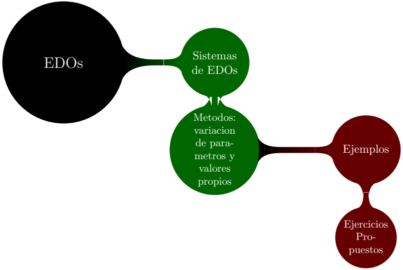
Contenido de la Sesión 28:

Dr. J. Juan Rosales García
Departamento de Ingeniería Eléctrica, DICIS-UGTO.

- Método de variación de parámetros para resolver sistemas de EDOs.
- Método de valores y vectores propios para resolver sistemas de EDOs.

Mapa Mental

Dr. J. Juan Rosales García
Departamento de Ingeniería Eléctrica, DICIS-UGTO.



Variación de los parámetros

Dr. J. Juan Rosales García
Departamento de Ingeniería Eléctrica, DICIS-UGTO.

Sin perder generalidad, este método lo ilustraremos para el caso de un sistema de tres ecuaciones diferenciales. Sea el sistema no homogéneo

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} + a_1x + b_1y + e_1z &= f_1(t) \\ \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} + a_2x + b_2y + e_2z &= f_2(t) \\ \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t} + a_3x + b_3y + e_3z &= f_3(t) \end{aligned} \tag{1}$$

Supongamos que la solución general del sistema homogéneo ya la conocemos, y tiene la forma

$$\begin{aligned} x(t) &= c_1 x_1 + c_2 x_2 + c_3 x_3 \\ y(t) &= c_1 y_1 + c_2 y_2 + c_3 y_3 \\ z(t) &= c_1 z_1 + c_2 z_2 + c_3 z_3 \end{aligned} \tag{2}$$

Nos queda por buscar una solución particular del sistema no homogéneo (2).

El método de variación de los parámetros consiste en ver a las constantes c_1, c_2 y c_3 de (3) como parámetros que dependen de la variable independiente t. Es decir, la solución particular tiene la forma

$$\begin{aligned} x(t) &= c_1(t)x_1 + c_2(t)x_2 + c_3(t)x_3 \\ y(t) &= c_1(t)y_1 + c_2(t)y_2 + c_3(t)y_3 \\ z(t) &= c_1(t)z_1 + c_2(t)z_2 + c_3(t)z_3 \end{aligned} \qquad (3)$$

donde $c_1(t)$, $c_2(t)$ y $c_3(t)$ son ahora funciones que debemos hallar. Estas funciones las podemos encontrar al sustituir (4) en (2).

Sustituyendo (4) en la primera ecuación de (2), tenemos

$$
\begin{aligned}
c_1'x_1 + c_2'x_2 + c_3'x_3 + \quad & + \quad c_1(x_1' + a_1x_1 + b_1y_1 + e_1z_1) \\
& + \quad c_2(x_2' + a_1x_2 + b_1y_2 + e_1z_2)\ (4) \\
& + \quad c_3(x_3' + a_1x_3 + b_1y_3 + e_1z_3) = \\
& = \quad f_1(t)
\end{aligned}
$$

Todas las sumas que están dentro de los paréntesis son cero, (ya que el sistema (4) es solución de la ecuación homogénea correspondiente).

Por consiguiente, tendremos

$$c_1'x_1 + c_2'x_2 + c_3'x_3 = f_1(t) \tag{5}$$

De manera análoga, al sustituir (4) en la segunda y tercera ecuación de (2), obtendremos el siguiente sistema de ecuaciones para las c_1', c_2' y c_3', éstas son

$$\begin{aligned} c_1'x_1 + c_2'x_2 + c_3'x_3 &= f_1(t) \\ c_1'y_1 + c_2'y_2 + c_3'y_3 &= f_2(t) \\ c_1'z_1 + c_2'z_2 + c_3'z_3 &= f_3(t) \end{aligned} \tag{6}$$

Este sistema es lineal respecto a c_1', c_2', c_3' y tiene solución, puesto que su determinante

$$\det\begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ z_1 & z_2 & z_3 \end{pmatrix} \neq 0 \tag{7}$$

debido a la independencia lineal de las soluciones del sistema homogéneo correspondiente. Una vez conocidas c_1', c_2' y c_3' e integrando, hallamos $c_1(t), c_2(t)$ y $c_3(t)$, y por consiguiente, la solución de (4) del sistema no homogéneo (2).

Ejemplo 1:

Dr. J. Juan Rosales García
Departamento de Ingeniería Eléctrica, DICIS-UGTO.

Resolver el siguiente sistema de ecuaciones no homogéneas con las condiciones iniciales dadas

$$\begin{aligned} 2\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} - 6x + y &= -6t^2 - t + 3 \\ \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} - 2y &= -2t - 1, \quad x(0) = 2,\ y(0) = 3 \end{aligned} \tag{8}$$

Solución:

Primero resolvemos el sistema homogéneo correspondiente. Esto es, el sistema

$$\begin{aligned} 2\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} - 6x + y &= 0 \\ \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} - 2y &= 0 \end{aligned} \tag{9}$$

Derivamos la primera ecuación de (9), obtenemos

$$2\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2} - 6\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} + \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = 0 \tag{10}$$

Luego, sustituyendo la segunda ecuación en (10), resulta

$$2\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2} - 6\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} + 2y = 0 \quad \rightarrow \quad \frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2} - 3\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} + y = 0 \tag{11}$$

Despejando y de la primera ecuación de (9), se obtiene

$$y = 6x - 2\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} \tag{12}$$

Luego, sustituyendo y en (11), tenemos

$$\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2} - 5\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} + 6x = 0 \tag{13}$$

ésta es una ecuación lineal con coeficientes constantes.

Sea $x(t) = e^{mt}$ la solución. Sustituyéndola en (13), resulta la ecuación característica

$$m^2 - 5m + 6 = 0 \rightarrow (m-3)(m-2) = 0 \rightarrow m_1 = 3, \quad m_2 = 2 \tag{14}$$

Entonces, la solución general de la ecuación (13) es

$$x(t) = c_1 e^{3t} + c_2 e^{2t} \tag{15}$$

Derivamos respecto a t esta expresión

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = 3c_1 e^{3t} + 2c_2 e^{2t} \tag{16}$$

Poniendo las expresiones (16) y (15) en (12), obtenemos la expresión para $y(t)$. Esto es

$$y(t) = 6\left(c_1 e^{3t} + c_2 e^{2t}\right) - 2\left(3c_1 e^{3t} + 2c_2 e^{2t}\right) = 2c_2 e^{2t} \tag{17}$$

Por consiguiente, tenemos las soluciones generales del sistema homogéneo

$$\begin{aligned} x_h(t) &= c_1 e^{3t} + c_2 e^{2t}, \\ y_h(t) &= 2c_2 e^{2t} \end{aligned} \tag{18}$$

El método de variación de los parámetros consiste en tomar a las constantes de las soluciones homogéneas como funciones de t, y sustituirlas en la ecuación no homogénea con el propósito de hallar a las funciones $c_1(t)$ y $c_2(t)$. De (18) tenemos el siguiente sistema:

$$\begin{aligned} x_p(t) &= c_1(t)e^{3t} + c_2(t)e^{2t} \\ y_p(t) &= 2c_2(t)e^{2t} \end{aligned} \tag{19}$$

Derivando este sistema, obtenemos

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}x_p}{\mathrm{d}t} &= c_1'e^{3t} + 3c_1e^{3t} + c_2'e^{2t} + 2c_2e^{2t}\\ \frac{\mathrm{d}y_p}{\mathrm{d}t} &= 2c_2'e^{2t} + 4c_2e^{2t}\end{aligned} \tag{20}$$

Sustituyendo estos resultados en el sistema no homogéneo (8), obtenemos el sistema

$$\begin{aligned}c_1'e^{3t} + c_2'e^{2t} &= -3t^2 - \frac{1}{2}t + \frac{3}{2}\\ 2c_2'e^{2t} &= -2t - 1\end{aligned} \tag{21}$$

Resolviendo respecto a c_1' y c_2', tenemos

$$\begin{aligned} c_1' &= \left(\frac{1}{2}t - 3t^2 + 2\right) e^{-3t} \\ c_2' &= \left(-t - \frac{1}{2}\right) e^{-2t} \end{aligned} \tag{22}$$

Integrando la primera ecuación, tenemos

$$c_1(t) = \int \left(\frac{1}{2}t - 3t^2 + 2\right) e^{-3t} \mathrm{d}t \tag{23}$$

Esta integral se calcula por partes y el resultado es

$$c_1(t) = \left(t^2 - \frac{1}{2}t - \frac{1}{2}\right) e^{-3t} \tag{24}$$

De la segunda ecuación en (22) tenemos la integral

$$c_2(t) = \int \left(-t - \frac{1}{2}\right) e^{-2t} \mathrm{d}t \tag{25}$$

Esta integral se calcula fácilmente, y el resultado es

$$c_2(t) = \frac{1}{2}\,(t+1)\, e^{-2t} \tag{26}$$

Sustituyendo las funciones $c_1(t)$ y $c_2(t)$ en la expresión (19) tenemos la solución particular de la ecuación no homogénea (8)

$$\begin{aligned} x_p(t) &= t^2 + t \\ y_p(t) &= t + 1 \end{aligned} \tag{27}$$

La solución general de (8) estará dada por la suma de las soluciones homogéneas (18) y las soluciones particulares (27). Esto es

$$\begin{aligned} x(t) &= c_1 e^{3t} + c_2 e^{2t} + t^2 + t \\ y(t) &= 2c_2 e^{2t} + t + 1 \end{aligned} \tag{28}$$

Ahora nos queda por encontrar las soluciones que satisfacen las condiciones iniciales. Sustituyendo las condiciones iniciales en las soluciones (28), obtenemos el sistema

$$\begin{aligned} c_1 + c_2 &= 4 \\ 2c_2 + 1 &= 3 \end{aligned} \tag{29}$$

Resolviendo este sistema hallamos los valores de las constantes, éstos son $c_1 = 3$ y $c_2 = 1$. Poniendo estos valores en (28), obtenemos finalmente la solución del problema (8)

$$\begin{aligned} x(t) &= 3e^{3t} + e^{2t} + t^2 + t \\ y(t) &= 2e^{2t} + t + 1 \end{aligned} \tag{30}$$

Ejemplo 2:

Dr. J. Juan Rosales García
Departamento de Ingeniería Eléctrica, DICIS-UGTO.

Resolver el sistema de ecuaciones

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} + 2x + 4y &= 4t + 1 \\ \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} + x - y &= \frac{3}{2}t^2 \end{aligned} \tag{31}$$

Solución:

El sistema homogéneo correspondiente tiene la forma

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} + 2x + 4y &= 0 \\ \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} + x - y &= 0 \end{aligned} \tag{32}$$

Dr. J. Juan
Rosales García
Departamento de
Ingeniería
Eléctrica,
DICIS-UGTO.

Derivando la primera ecuación de (32), obtenemos

$$\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2} + 2\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} + 4\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = 0 \tag{33}$$

Sustituyendo la segunda ecuación de (32) en (33), resulta

$$\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2} + 2\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} - 4x + 4y = 0 \tag{34}$$

Luego, de la primera ecuación en (32) despejamos y

$$y = -\frac{1}{2}x - \frac{1}{4}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} \tag{35}$$

Sustituyendo esta expresión en (34), obtenemos la siguiente ecuación diferencial:

$$\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2} + \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} - 6x = 0 \tag{36}$$

Supongamos la solución $x(t) = e^{mt}$. Sustituyéndola en (36), obtenemos la ecuación característica con sus correspondientes raíces

$$m^2+m-6 = 0 \rightarrow (m+3)(m-2) = 0 \rightarrow m_1 = -3, \;\; m_2 = 2 \tag{37}$$

Entonces, la solución de la ecuación homogénea (36) es

$$x_h(t) = c_1 e^{-3t} + c_2 e^{2t} \tag{38}$$

Derivando esta expresión respecto a t, obtenemos

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = -3c_1 e^{-3t} + 2c_2 e^{2t} \tag{39}$$

Sustituyendo las expresiones (39) y (38) en (35), obtenemos

$$y_h(t) = \frac{c_1}{4} e^{-3t} - c_2 e^{2t} \tag{40}$$

Finalmente, tenemos las soluciones de la ecuación homogénea (32). éstas son

$$\begin{aligned} x_h(t) &= 4c_1 e^{-3t} + c_2 e^{2t} \\ y_h(t) &= c_1 e^{-3t} - c_2 e^{2t} \end{aligned} \tag{41}$$

donde hemos hecho el cambio $c_1 \to c_1/4$. Para encontrar la solución general del sistema (31), se supone a las constates c_1 y c_2 como funciones de t en (41), esto es

$$\begin{aligned} x_p(t) &= 4c_1(t) e^{-3t} + c_2(t) e^{2t} \\ y_p(t) &= c_1(t) e^{-3t} - c_2(t) e^{2t} \end{aligned} \tag{42}$$

Al sustituir el sistema (42) en la ecuación no homogénea (31), obtenemos el siguiente sistema:

$$\begin{aligned} 4c_1'e^{-3t} + c_2'e^{2t} &= 4t + 1 \\ c_1'e^{-3t} - c_2'e^{2t} &= \frac{3}{2}t^2 \end{aligned} \tag{43}$$

Al resolver este sistema respecto a $c_1'(t)$ y $c_2'(t)$, tenemos

$$\begin{aligned} c_1' &= \left(\frac{3}{10}t^2 + \frac{4}{5}t + \frac{1}{5}\right)e^{3t} \\ c_2' &= \left(-\frac{6}{5}t^2 + \frac{4}{5}t + \frac{1}{5}\right)e^{-2t} \end{aligned} \tag{44}$$

Ahora nos queda integrar este sistema. Las integraciones se hacen por partes y el resultado es

$$\begin{aligned} c_1(t) &= \left(\frac{t}{5} + \frac{t^2}{10}\right) e^{3t} \\ c_2(t) &= \left(\frac{t}{5} + \frac{3t^2}{5}\right) e^{-2t} \end{aligned} \tag{45}$$

Sustituyendo estos resultados en el sistema (42), obtenemos las soluciones particulares

$$\begin{aligned} x_p(t) &= t^2 + t \\ y_p(t) &= -\frac{1}{2}t^2 \end{aligned} \tag{46}$$

Finalmente, sumando las soluciones particulares (46) a las homogéneas (41), obtenemos la solución general del sistema no homogéneo (31)

$$\begin{aligned} x(t) &= 4c_1e^{-3t} + c_2e^{2t} + t^2 + t \\ y(t) &= c_1e^{-3t} - c_2e^{2t} - \frac{1}{2}t^2 \end{aligned} \tag{47}$$

donde c_1 y c_2 son ciertas constantes arbitrarias que dependen de las condiciones iniciales.

Valores propios y vectores propios

Dr. J. Juan Rosales García
Departamento de Ingeniería Eléctrica, DICIS-UGTO.

Supongamos que tenemos la ecuación

$$AY = \lambda Y \tag{48}$$

donde, A es una matriz dada, λ es un número (es decir, es un escalar) real o imaginario por determinarse, y Y es un vector también por determinar. De la ecuación (48) tenemos que para toda λ, una solución es $Y = 0$. A un escalar λ, tal que para cierto vector $Y \neq 0$ la ecuación (48) se cumple, se le llama valor propio de la matriz A y al correspondiente vector $Y \neq 0$ se le conoce como vector propio de A.

Dr. J. Juan Rosales García Departamento de Ingeniería Eléctrica, DICIS-UGTO.

La ecuación (48) podemos escribirla de la siguiente manera:

$$\mathsf{A}\mathsf{Y} - \lambda \mathsf{Y} = 0 \iff (\mathsf{A} - \lambda \mathsf{I})\mathsf{Y} = 0 \tag{49}$$

donde I representa la matriz identidad (la matriz identidad tiene todos sus elementos ceros excepto los diagonales que son unos). La ecuación (49) representa n ecuaciones algebraicas lineales con n incógnitas $y_1, y_2, \ldots, y_n$, que son las componentes del vector Y.

Para que estas ecuaciones tengan solución no trivial, es decir, para que $Y \neq 0$, es necesario que el determinante formado por la matriz $(A - \lambda I)$ sea cero, es decir, que se cumpla la relación

$$\det(A - \lambda I) = 0 \tag{50}$$

A este determinante se le conoce como *determinante característico* de la matriz A. Supongamos que la matriz A, en la ecuación (49), es de 2×2, entonces

$$\begin{aligned} (a_{11} - \lambda) y_1 + a_{12} y_2 &= 0 \\ a_{21} y_1 + (a_{22} - \lambda) y_2 &= 0 \end{aligned} \tag{51}$$

El determinante característico es

$$\begin{aligned} \det(A-\lambda I) &= \det\begin{pmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda \end{pmatrix} = \\ &= (a_{11}-\lambda)(a_{22}-\lambda)-a_{12}a_{21} \qquad (52) \\ &= \lambda^2-(a_{11}+a_{22})\lambda+a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}=0 \end{aligned}$$

A esta ecuación se le conoce con el nombre de ecuación característica de A. Sus soluciones son los valores propios λ_1 y λ_2 de A.

El procedimiento para encontrar los valores propios y los vectores propios del sistema (48), es el siguiente:

- Resolver la ecuación característica (52) para determinan los valores propios λ_1, λ_2.
- Sustituyendo el valor de λ_1 en la ecuación (51), se determina su correspondiente vector propio Y_1 de A. Después se sustituye el valor de λ_2 en (51) y se determina el correspondiente vector propio Y_2 de A.

Ejemplo 3:

Dr. J. Juan Rosales García Departamento de Ingeniería Eléctrica, DICIS-UGTO.

Hallar los valores propios y vectores propios de la siguiente matriz

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \tag{53}$$

Solución:

Sustituyendo los valores de la matriz A en la expresión (51), resulta el sistema de ecuaciones

$$\begin{aligned} (2-\lambda)y_1 + 4y_2 &= 0 \\ y_1 + (2-\lambda)y_2 &= 0 \end{aligned} \tag{54}$$

El determinante característico para la matriz A, es

$$\begin{aligned} \det(A - \lambda I) &= \det \begin{pmatrix} 2-\lambda & 4 \\ 1 & 2-\lambda \end{pmatrix} = \\ &= (2-\lambda)(2-\lambda) - 4 \\ &= \lambda(\lambda - 4) = 0 \end{aligned} \tag{55}$$

De donde obtenemos las raíces $\lambda_1 = 0$ y $\lambda_2 = 4$.

Luego, tenemos que para $\lambda = 0$, el sistema (54), es

$$\begin{aligned} 2y_1 + 4y_2 &= 0 \\ y_1 + 2y_2 &= 0 \end{aligned} \tag{56}$$

De la segunda ecuación, tenemos

$$y_1 = -2y_2 \tag{57}$$

Entonces, podemos darle un valor arbitrario a y_2 y de esta manera encontrar a y_1. Eligiendo $y_2 = 1$, entonces, tenemos que $y_1 = -2$.

Luego el vector Y_1 tiene las componentes

$$Y_1 = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} \tag{58}$$

Para el caso en que $\lambda = 4$, de la ecuación (54), tenemos

$$\begin{aligned} (2-4)y_1 + 4y_2 &= 0 \\ y_1 + (2-4)y_2 &= 0 \end{aligned} \tag{59}$$

Esto es

$$\begin{aligned} -2y_1 + 4y_2 &= 0 \\ y_1 - 2y_2 &= 0 \end{aligned} \tag{60}$$

De la segunda ecuación tenemos $y_1 = 2y_2$. Eligiendo $\lambda_2 = 1$, resulta que $\lambda_1 = 2$. El vector propio Y_2 tiene las componentes

$$\mathrm{Y}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \tag{61}$$

Ejemplo 4:

Dr. J. Juan Rosales García Departamento de Ingeniería Eléctrica, DICIS-UGTO.

Hallar los valores propios y los vectores propios de la siguiente matriz

$$A = \begin{pmatrix} 6 & -12 & -1 \\ 1 & -3 & -1 \\ -4 & 12 & 3 \end{pmatrix} \tag{62}$$

Solución:

De la ecuación (49), para encontrar los valores y vectores propios, tenemos el sistema de ecuaciones

$$\begin{aligned} (6-\lambda)y_1 - 12y_2 - y_3 &= 0 \\ y_1 + (-3-\lambda)y_2 - y_3 &= 0 \\ -4y_1 + 12y_2 + (3-\lambda)y_3 &= 0 \end{aligned} \tag{63}$$

El determinante característico para la matriz A, es

$$
\begin{aligned}
\det(A - \lambda I) = \det \begin{pmatrix} 6-\lambda & -12 & -1 \\ 1 & -3-\lambda & -1 \\ -4 & 12 & 3-\lambda \end{pmatrix} = \\
= \quad & (6-\lambda)(\lambda^2 - 9) - \\
- \quad & 48 - 12 + 12 + 4\lambda + 72 - 12\lambda + 36 - 12\lambda = \\
= \quad & \lambda^3 - 6\lambda^2 + 11\lambda - 6 = 0
\end{aligned}
\tag{64}
$$

Las raíces de esta ecuación, es decir, los valores propios son $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 2$ y $\lambda_3 = 3$. Eligiendo el primer valor propio, es decir, para $\lambda_1 = 1$, tenemos el sistema de ecuaciones

$$\begin{aligned} 5y_1 - 12y_2 - y_3 &= 0 \\ y_1 - 4y_2 - y_3 &= 0 \\ -4y_1 + 12y_2 + 2y_3 &= 0 \end{aligned} \tag{65}$$

Para resolver este sistema, dividimos la tercera ecuación entre 2 y sumando la segunda y la tercera ecuación, obtenemos

$$y_1 = 2y_2 \tag{66}$$

Le damos un valor arbitrario a y_2, elijamos $y_2 = 1$, entonces, de (66) tenemos que $y_1 = 2$. Después, sustituyendo estos valores en la segunda ecuación, obtendremos el valor de y_3, esto es

$$y_3 = y_1 - 4y_2 \quad \rightarrow \quad y_3 = 2 - 4 = 2 \tag{67}$$

Entonces, tenemos que para el valor propio $\lambda_1 = 1$, el vector propio es

$$Y_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} \tag{68}$$

Para el segundo valor propio, $\lambda_2 = 2$, de (64) resulta el sistema de ecuaciones

$$\begin{aligned} 4y_1 - 12y_2 - y_3 &= 0 \\ y_1 - 5y_2 - y_3 &= 0 \\ -4y_1 + 12y_2 + y_3 &= 0 \end{aligned} \tag{69}$$

A la primera ecuación le restamos la segunda, obtenemos

$$y_1 = \frac{7}{3} y_2 \tag{70}$$

Eligiendo $y_2 = 3$, tenemos que $\lambda_1 = 7$. Sustituyendo estos valores en la segunda ecuación de (69), resulta

$$y_3 = y_1 - 5y_2 = 28 - 36 \quad \rightarrow \quad y_3 = -8 \tag{71}$$

Entonces, para el valor propio $y_1 = 2$, tenemos el vector propio

$$Y_1 = \begin{pmatrix} 7 \\ 3 \\ -8 \end{pmatrix} \tag{72}$$

Para el caso $\lambda_3 = 3$, tenemos el sistema

$$\begin{aligned} 3y_1 - 12y_2 - y_3 &= 0 \\ y_1 - 6y_2 - y_3 &= 0 \\ -4y_1 + 12y_2 + 0 &= 0 \end{aligned} \tag{73}$$

De la tercera ecuación, tenemos

$$y_1 = 3y_2 \tag{74}$$

Eligiendo $y_2 = 1$, tenemos que $y_1 = 3$. Sustituyendo estos valores en la primer ecuación de (73), hallamos el valor de y_3

$$y_3 = 3y_1 - 12y_2 = 9 - 12 = -3 \quad \rightarrow \quad y_3 = -3 \tag{75}$$

Finalmente, el vector propio correspondiente a λ_3, es

$$\mathrm{Y}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -3 \end{pmatrix} \tag{76}$$

Podemos concluir, que los valores propios de la matriz (62) son $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 2$ y $\lambda_3 = 3$, y sus correspondientes vectores propios están dados por las expresiones (68, 72, 76).

Ejemplo 5:

Hallar la solución general del siguiente sistema

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} &= 2x + y \\ \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} &= 3x + 4y \end{aligned} \tag{77}$$

Solución:

La matriz A correspondiente al sistema (77) tiene la forma

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \tag{78}$$

Luego, la ecuación característica está dada por la expresión

$$
\begin{aligned}
\det(A - \lambda I) &= \det\begin{pmatrix} 2-\lambda & 1 \\ 3 & 4-\lambda \end{pmatrix} = \\
&= \lambda^2 - 6\lambda + 5 = (\lambda - 5)(\lambda - 1) = 0
\end{aligned}
\tag{79}
$$

De esta expresión obtenemos los valores propios, estos son: $\lambda_1 = 5$ y $\lambda_2 = 1$.

Las componentes de los vectores propios los hallamos resolviendo el sistema

$$\begin{pmatrix} 2-\lambda & 1 \\ 3 & 4-\lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 0 \tag{80}$$

para cada valor de λ.

Para el primer caso, $\lambda_1 = 5$, de (80) resulta el sistema

$$\begin{aligned} -3x + y &= 0 \\ 3x - y &= 0 \end{aligned} \tag{81}$$

Las soluciones de este sistema son: $x = 1$, y $y = 3$. éstas vienen siendo las componentes del vector propio que representaremos como

$$\mathrm{V} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} \tag{82}$$

Para el segundo caso, $\lambda_2 = 1$, tenemos el sistema

$$\begin{aligned} x + y &= 0 \\ 3x + 3y &= 0 \end{aligned} \tag{83}$$

Las soluciones son $y = 1$ y $x = -1$. Entonces, el vector propio correspondiente es

$$V = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} \tag{84}$$

Finalmente, el resultado lo podemos escribir en forma matricial

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = c_1 V_1 e^{5t} + c_2 V_2 e^{t} = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} e^{5t} + c_2 \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{t} \tag{85}$$

Esta misma expresión la podemos escribir en sus componentes

$$\begin{aligned} x(t) &= c_1 e^{5t} - c_2 e^{t} \\ y(t) &= 3c_1 e^{5t} + c_2 e^{t} \end{aligned} \tag{86}$$

Las constantes c_1 y c_2 son constates arbitrarias y se obtienen de las condiciones iniciales.

Ejemplo 6:

Dr. J. Juan Rosales García
Departamento de Ingeniería Eléctrica, DICIS-UGTO.

Hallar las soluciones del siguiente sistema de ecuaciones

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} &= 2x + y + z \\ \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} &= -2x - z \\ \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t} &= 2x + y + 2z \end{aligned} \tag{87}$$

Solución:

La matriz correspondiente al sistema (87) tiene la forma

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -2 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix} \tag{88}$$

Para obtener los valores propios debemos resolver la ecuación característica

$$
\begin{aligned}
\det(A-\lambda I) &= \det\begin{pmatrix} 2-\lambda & 1 & 1 \\ -2 & -\lambda & -1 \\ 2 & 1 & 2-\lambda \end{pmatrix} = \\
&= \lambda^3 - 4\lambda^2 + 5\lambda - 2 = 0 \qquad (89)
\end{aligned}
$$

Obtenemos los valores propios $\lambda_1 = 2$, y $\lambda_2 = \lambda_3 = 1$.

Para hallar los vectores propios debemos resolver el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{aligned} (2-\lambda)x + y + z &= 0 \\ -2x - \lambda y - z &= 0 \\ 2x + y + (2-\lambda)z &= 0 \end{aligned} \tag{90}$$

Primer caso: $\lambda_1 = 2$, tenemos el sistema

$$\begin{aligned} y + z &= 0 \\ -2x - 2y - z &= 0 \\ 2x + y &= 0 \end{aligned} \tag{91}$$

Las soluciones de este sistema, es decir, las componentes del vector propio V_1, son:

$$V_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} \tag{92}$$

Entonces

$$\begin{aligned} x(t) &= e^{2t} \\ y(t) &= -2e^{2t} \\ z(t) &= 2e^{2t} \end{aligned} \tag{93}$$

es una solución particular del sistema (87).

Segundo caso: $\lambda_2 = \lambda_3 = 1$, debemos definir el número de vectores propios linealmente independientes. Si $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$, del sistema (90) tenemos la matriz

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -2 & -1 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \tag{94}$$

El orden de la matriz es 3 y el rango $r = 2$. Entonces, el número de vectores propios linealmente independientes es igual a $m = n - r = 1$. Luego, la raíz $\lambda_1 = 1$ tiene multiplicidad $k = 2$ (es decir, se repite dos veces).

Debido a que $k > m$, entonces, la solución debemos buscarla como el producto de un polinomio de orden $k - m = 1$ multiplicado por $e^{\lambda t}$, es decir, de la forma

$$\begin{aligned} x(t) &= (a + bt)e^{t} \\ y(t) &= (c + dt)e^{t} \\ z(t) &= (f + gt)e^{t} \end{aligned} \tag{95}$$

Para hallar los coeficientes a, b, c, d, f y g pongamos (95) en el sistema (87) e igualando los coeficientes con términos iguales, obtenemos el sistema

$$\begin{aligned} b + d + g &= 0 \qquad b = a + c + f \\ -2b - d - g &= 0 \qquad d = -2a - c - f \\ 2b + d + g &= 0 \qquad g = 2a + c + f \end{aligned} \tag{96}$$

Hallemos las soluciones generales de este sistema. De las dos ecuaciones de la izquierda, tenemos $b = 0$, $g = -d$. Sustituyendo estos resultados en las otras ecuaciones, resulta

$$a + c + f = 0, \quad d = -2a - c - f \tag{97}$$

Las otras ecuaciones son consecuencia de éstas. Resolvemos el sistema (97) respecto a y f;

$$a = -d, \qquad f = d - c \tag{98}$$

De esta manera, todas las incógnitas se expresan a través de c y d. Pongamos $c = C_1$, $d = C_2$, tenemos $a = -C_2$, $b = 0$, $f = C_2 - C_1$, $g = -C_2$. Hemos encontrado la solución general del sistema.

Poniendo los valores encontrados de a, b, .., en (95) y tomando en cuenta la solución (93), multiplicada por C_3, obtenemos la solución general del sistema (87), ésta tiene la forma

$$\begin{aligned} x(t) &= -C_2e^t + C_3e^{2t} \\ y(t) &= (C_1 + C_2t)e^t - 2C_3e^{2t} \\ z(t) &= (C_2 - C_1 - C_2t)e^t + 2C_3e^{2t} \end{aligned} \qquad (99)$$

Sistema masa-resorte

Dr. J. Juan
Rosales García
Departamento de
Ingeniería
Eléctrica,
DICIS-UGTO.

Sean m_1 y m_2, las masas de los cuerpos, k_1 y k_2 las constantes de los resortes, figura. Escriba el sistema de EDs que describen el comportamiento del sistema.

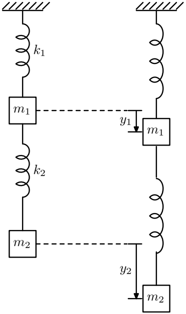


Figure: Sistema masas-resortes.

Solución:

Dr. J. Juan Rosales García Departamento de Ingeniería Eléctrica, DICIS-UGTO.

En este caso, tenemos el siguiente sistema de ecuaciones acopladas

$$\begin{aligned} m_1 \frac{\mathrm{d}^2 y_1}{\mathrm{d}t^2} &= -k_1 y_1 + k_2(y_2 - y_1) \\ m_2 \frac{\mathrm{d}^2 y_2}{\mathrm{d}t^2} &= -k_2(y_2 - y_1) \end{aligned} \tag{100}$$

donde $y_1(t)$ y $y_2(t)$ son los desplazamientos desconocidos de las masas m_1 y m_2, respectivamente. Las fuerzas que actúan sobre la primera masa dan la primer ecuación y las fuerzas que actúan sobre la segunda masa nos dan la segunda ecuación en (100).

Analizar el comportamiento del sistema masa-resorte

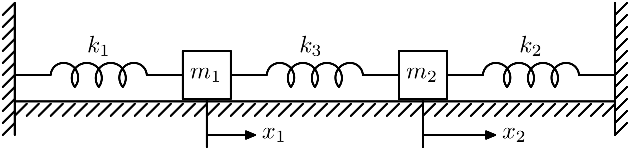


Figure: Sistema de masas-resortes.

Solución:

Las ecuaciones que describen el comportamiento del sistema son las siguientes:

$$
\begin{aligned}
m_1 \frac{\mathrm{d}^2 x_1}{\mathrm{d}t^2} &= -k_1 x_1 - k_3(x_1 - x_2) \\
m_2 \frac{\mathrm{d}^2 x_2}{\mathrm{d}t^2} &= -k_2 x_2 - k_3(x_2 - x_1)
\end{aligned} \qquad (101)
$$

Supongamos las soluciones de la forma

$$x_1 = \alpha_1 e^{\lambda t} \qquad \text{y} \qquad x_2 = \alpha_2 e^{\lambda t} \tag{102}$$

Para sustituir en (101) debemos calcular las derivadas

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}x_1}{\mathrm{d}t} &= \alpha_1 \lambda e^{\lambda t}, \qquad \frac{\mathrm{d}^2 x_1}{\mathrm{d}t^2} = \alpha_1 \lambda^2 e^{\lambda t}, \\ \frac{\mathrm{d}x_2}{\mathrm{d}t} &= \alpha_2 \lambda e^{\lambda t}, \qquad \frac{\mathrm{d}^2 x_2}{\mathrm{d}t^2} = \alpha_2 \lambda^2 e^{\lambda t} \end{aligned} \tag{103}$$

Sustituyendo en (101), obtenemos

$$\begin{aligned} m_1\alpha_1\lambda^2 e^{\lambda t} &= -k_1\alpha_1 e^{\lambda t} - k_3(\alpha_1 e^{\lambda t} - \alpha_2 e^{\lambda t}), \\ m_2\alpha_2\lambda^2 e^{\lambda t} &= -k_2\alpha_2 e^{\lambda t} - k_3(\alpha_2 e^{\lambda t} - \alpha_2 e^{\lambda t}) \end{aligned} \tag{104}$$

Eliminando la función exponencial, podemos escribir el sistema de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} (m_1\lambda^2 + k_1 + k_3)\alpha_1 - k_3\alpha_2 &= 0 \\ -k_3\alpha_1 + (m_2\lambda^2 + k_2 + k_3)\alpha_2 &= 0 \end{aligned} \tag{105}$$

Este mismo sistema lo podemos escribir en forma matricial, es decir, como

$$\begin{pmatrix} \left(\frac{k_1+k_3}{m_1}+\lambda^2\right) & -\frac{k_3}{m_1} \\ -\frac{k_3}{m_2} & \left(\frac{k_2+k_3}{m_2}+\lambda^2\right) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{pmatrix} = 0 \qquad (106)$$

Para que este sistema tenga solución no trivial es necesario que se cumpla la relación

$$\det\begin{pmatrix} \left(\frac{k_1+k_3}{m_1}+\lambda^2\right) & -\frac{k_3}{m_1} \\ -\frac{k_3}{m_2} & \left(\frac{k_2+k_3}{m_2}+\lambda^2\right) \end{pmatrix} = 0 \qquad (107)$$

Esto nos lleva a la siguiente ecuación:

$$(m_1\lambda^2 + k_1 + k_3)(m_2\lambda^2 + k_2 + k_3) - k_3^2 = 0 \qquad (108)$$

ésta es una ecuación cuadrática respecto a λ^2, y determina las frecuencias de las oscilaciones del sistema. Desarrollando los paréntesis, resulta

$$\begin{aligned} & m_1 m_2\lambda^4 + (m_1 k_2 + m_1 k_3 + m_2 k_1 + m_2 k_3)\lambda^2 + k_1 k_2 + \\ + \quad & k_1 k_3 + k_2 k_3 = 0 \qquad (109) \end{aligned}$$

Esta ecuación la podemos escribir como

$$A\lambda^4 + B\lambda^2 + C = 0 \tag{110}$$

donde, hemos definido

$$A = m_1 m_2, \qquad B = m_1 k_2 + m_1 k_3 + m_2 k_1 + m_2 k_3, \qquad C = k_1 \tag{111}$$

Hagamos en (110) la sustitución

$$\eta = \lambda^2 \tag{112}$$

entonces, tenemos

$$A\eta^2 + B\eta + C = 0 \tag{113}$$

Las raíces de (112) son

$$\eta_{1,2} = -\frac{B}{2A} \pm \frac{\sqrt{B^2 - 4AC}}{2A} \tag{114}$$

Regresando a la expresión (112), resulta

$$\lambda^2 = \eta_{1,2} = -\frac{B}{2A} \pm \frac{\sqrt{B^2 - 4AC}}{2A} \tag{115}$$

De donde, resulta

$$\lambda = \pm\sqrt{-\frac{B}{2A} \pm \frac{\sqrt{B^2 - 4AC}}{2A}} \tag{116}$$

De aquí obtenemos cuatro raíces, las cuales representaremos como $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ y λ_4.

Ejercicios Propuestos

Dr. J. Juan Rosales García
Departamento de Ingeniería Eléctrica, DICIS-UGTO.

1. $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = 2x - y + z, \quad \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = x + 2y - z, \quad \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t} = x - y + 2z$
2. $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = y + z, \quad \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = 3x + z, \quad \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t} = 3x + y$
3. $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = 8y, \quad \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = -2z, \quad \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t} = 2x + 8y - 2z$
4. $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = 4x - 5y, \quad \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = x, \quad x(0) = 0, \ y(0) = 1$
5. $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = \frac{1}{y}, \quad \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = \frac{1}{x}$