Sesión 3: EDOs de Primer Orden

Dr. Juan Rosales García
Departamento de Ingeniería Eléctrica, DICIS-UGTO.

Dr. Juan Rosales García
Departamento de Ingeniería Eléctrica,
DICIS-UGTO.

Competencias:

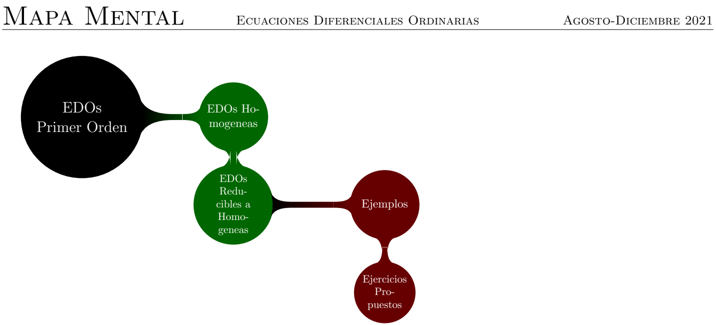
- Verifica el orden de homogeneidad de una función.
- Identifica y resuelve las EDOs homogéneas y reducibles a ellas

Contenido de la Sesión 3:

- $F(\lambda x, \lambda y) = \lambda^n F(x, y)$ función homogénea de orden n.
- $M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0$, ED homogénea.
- EDOs reducibles a homogéneas del tipo $y' = f\left(\frac{ax+by+c}{a_1x+b_1y+c_1}\right)$
- Ejemplos.
- Ejercicios propuestos.

Mapa Mental

Dr. Juan Rosales García
Departamento de Ingeniería Eléctrica, DICIS-UGTO.



EDOs de Primer Orden

Dr. Juan Rosales García
Departamento de Ingeniería Eléctrica,
DICIS-UGTO.

Una EDO de primer orden, en forma general, se escribe como

$$F(x, y, y') = 0 \tag{1}$$

Otra forma de escribirla es:

$$M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0 \tag{2}$$

Vamos a partir de la ecuación (2). Antes de definir una ecuación diferencial homogénea, necesitamos introducir la definición de función homogénea:

Dr. Juan Rosales García
Departamento de Ingeniería Eléctrica, DICIS-UGTO.

Función homogénea

Definición: Una función $F(x,\ y)$ es homogénea de grado n, si para todo $\lambda > 0$ se cumple la relación

$$\boxed{F(\lambda x, \lambda y) = \lambda^n F(x,\ y)} \tag{3}$$

Analizar si la función dada es homogénea y de qué grado.

$$F(x,\ y) = x^2 + y^2 \tag{4}$$

Solución: De la definición, tenemos:

$$F(\lambda x,\ \lambda y) = (\lambda x)^2 + (\lambda y)^2 = \lambda^2(x^2 + y^2) = \lambda^2 F(x, y) \tag{5}$$

Es decir, la función (4) es homogénea de grado 2.

Sea la función

$$F(x,\ y) = \frac{x^2 + y}{x} \tag{6}$$

analizar si es o no homogénea.

Solución:

Aplicando la definición, tenemos:

$$\begin{aligned} F(\lambda x,\ \lambda y) &= \frac{(\lambda x)^2 + \lambda y}{\lambda x} = \frac{\lambda^2 x^2 + \lambda y}{\lambda x} = \frac{\lambda(\lambda x + y)}{\lambda x} \\ &= \frac{\lambda x + y}{x} \end{aligned} \tag{7}$$

la cual, no cumple con la condición (3) y, por consiguiente, no es homogénea.

Verificar que la función

$$F(x,\, y) = \frac{x^4 + y^4}{y^4} \tag{8}$$

es homogénea de grado cero.

Solución:

De la definición, tenemos:

$$\begin{aligned} F(\lambda x,\, \lambda y) &= \frac{(\lambda x)^4 + (\lambda y)^4}{(\lambda y)^4} = \frac{\lambda^4 x^4 + \lambda^4 y^4}{\lambda^4 y^4} \\ &= \frac{\lambda^4}{\lambda^4} F(x, y) = \lambda^0 F(x, y) = F(x, y) \end{aligned} \tag{9}$$

Esto muestra que $n = 0$ y por lo tanto, la función (8) es homogénea de grado cero.

Ecuación diferencial homogénea

Dr. Juan Rosales García
Departamento de Ingeniería Eléctrica, DICIS-UGTO.

Definición: Toda ecuación diferencial de la forma

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = f(x,\, y)} \tag{10}$$

se llama ecuación diferencial homogénea, si la función $f(x,\, y)$ es homogénea de grado cero.

Definición: De una forma equivalente, toda ecuación diferencial de la forma

$$\boxed{M(x,\, y)\mathrm{d}x + N(x,\, y)\mathrm{d}y = 0,} \tag{11}$$

será homogénea, si y sólo si, las funciones $M(x,\, y)$ y $N(x,\, y)$ son funciones homogéneas del mismo grado.

Postulado: Toda ecuación diferencial homogénea se reduce a una ecuación diferencial con variables separables mediante la sustitución

$$\boxed{y = z(x)x} \tag{12}$$

Demostración: Para demostrar lo anterior, supongamos que las funciones $M(x,\, y)$ y $N(x,\, y)$ en (11) son funciones homogéneas del mismo grado y, por consiguiente, tiene lugar la sustitución (12). Entonces, tenemos que el diferencial $\mathrm{d}y$ en (12) se expresa como:

$$\mathrm{d}y = z\mathrm{d}x + x\mathrm{d}z \tag{13}$$

Sustituyendo en la ecuación (11), obtenemos:

$$M(x,\, zx)\mathrm{d}x + N(x,\, zx)[z\mathrm{d}x + x\mathrm{d}z] = 0 \tag{14}$$

acomodando términos, resulta:

$$[xM(1,\, z) + zxN(1,\, z)]\mathrm{d}x + x^2 N(1,\, z)\mathrm{d}z = 0 \tag{15}$$

Luego, dividiendo entre $x \neq 0$ llegamos a la relación:

$$[M(1,\, z) + zN(1,\, z)]\mathrm{d}x + xN(1,\, z)\mathrm{d}z = 0 \tag{16}$$

Por último, separando variables e integrando ambas partes de (16), obtenemos implícitamente la solución general de la ecuación (16)

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{x} + \int \frac{N(1,\, z)}{M(1,\, z) + zN(1, z)}\mathrm{d}z = c \tag{17}$$

donde c es la constante de integración.

Dr. Juan Rosales García
Departamento de Ingeniería Eléctrica, DICIS-UGTO.

Al integrar (17) tendremos la solución representada como $z(x) = \chi(x,\, c)$ de donde, debemos recordar el cambio $z = y/x$ para tener la solución $y(x) = \phi(x,\, c)$ que será la solución general de la ecuación (11).

Ecuaciones diferenciales reducibles a homogéneas

Dr. Juan Rosales García
Departamento de Ingeniería Eléctrica, DICIS-UGTO.

Mediante una transformación lineal apropiada, toda ecuación

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = f\left(\frac{ax+by+c}{a_1x+b_1y+c_1}\right)} \tag{18}$$

se reduce a una ecuación homogénea, la cual, a su vez, con la sustitución que vimos anteriormente $y = z(x)x$, se reduce a una ecuación con variables separables.

En la ecuación (18), las ecuaciones

$$g(x,\, y) = ax + by + c = 0 \tag{19}$$
$$g_1(x,\, y) = a_1x + b_1y + c_1 = 0 \tag{20}$$

definen dos rectas que cuando $c = c_1 = 0$ pasan por el origen de coordenadas y en tal caso (18) es una ecuación homogénea que se reduce a una ecuación con variables separables. Supongamos que al menos uno de los parámetros c o c_1, o ambos son diferentes de cero, entonces, la ecuación (18) no es una ecuación diferencial homogénea.

En tal caso, de las ecuaciones (19) y (20) podemos hallar el punto de intersección de las rectas (x_0, y_0) a donde debemos trasladar el origen del nuevo sistema de coordenadas X, Y, obteniendo de esta manera la transformación lineal

$$\boxed{x = X + x_0; \quad y = Y + y_0} \tag{21}$$

donde x_0, y_0 son ciertas constantes arbitrarias y diferentes de cero. Entonces, tenemos

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}Y}{\mathrm{d}X} \tag{22}$$

Dr. Juan Rosales García
Departamento de Ingeniería Eléctrica, DICIS-UGTO.

Sustituyendo en la ecuación (18) las expresiones (21) y (22), obtenemos

$$\frac{\mathrm{d}Y}{\mathrm{d}X} = f\left(\frac{aX + bY + ax_0 + by_0 + c}{a_1X + b_1Y + a_1x_0 + b_1y_0 + c_1}\right) \tag{23}$$

Luego, debido a que los puntos x_0 y y_0 son tales que cumplen las relaciones

$$\begin{aligned} ax_0 + by_0 + c &= 0 \\ a_1x_0 + b_1y_0 + c_1 &= 0 \end{aligned} \tag{24}$$

Bajo esta condición la ecuación (23) tendrá la forma

$$\frac{\mathrm{d}Y}{\mathrm{d}X} = f\left(\frac{aX + bY}{a_1X + b_1Y}\right) \tag{25}$$

Está claro que esta ecuación es homogénea según (3).

Mediante la sustitución $Y = z(X)X$ la ecuación (25) se reduce a una ecuación con variables separables. Al resolver la ecuación (25) y regresando a las variables x y y [de (21) se tiene $X = x - x_0$, $Y = y - y_0$], obtenemos la solución general de la ecuación (18).

El sistema de ecuaciones (24) no tendrá solución si su determinante es cero, esto significa que las rectas son paralelas y no se intersectan en ningún punto. En tal caso, $ab_1 = a_1 b$. No obstante, se puede notar que en tal caso $\frac{a_1}{a} = \frac{b_1}{b} = \lambda$, es decir, $a_1 = \lambda a$, $b_1 = \lambda b$ y, como consecuencia, la ecuación (18) se transforma en

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = f\left(\frac{(ax + by) + c}{\lambda(ax + by) + c_1}\right) \tag{26}$$

Luego, haciendo la sustitución

$$z = ax + by \tag{27}$$

en (26), ésta se reduce a una ecuación con variables separables. Veamos que la hipótesis es cierta. Derivando (27) respecto a x, obtenemos

$$\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x} = a + b\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}, \quad \rightarrow \quad \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{1}{b}\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x} - \frac{a}{b} \tag{28}$$

Sustituyendo las expresiones (27) y (28) en (26), obtenemos, finalmente

$$\frac{1}{b}\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x} - \frac{a}{b} = f\left(\frac{z + c}{\lambda z + c_1}\right) \tag{29}$$

La ecuación (29) es una ecuación con variables separables

$$\int \frac{\mathrm{d}z}{f\left(\frac{z+c}{\lambda z+c_1}\right)+\frac{a}{b}} = b\int \mathrm{d}x + C \qquad (30)$$

donde c y c_1 son constantes dadas y C es la constante de integración.

Ejemplo 1

Dr. Juan Rosales García
Departamento de Ingeniería Eléctrica, DICIS-UGTO.

Resolver la ecuación diferencial

$$x\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} - y = (x+y)\ln\left|\frac{x+y}{x}\right| \tag{31}$$

Solución: Escribamos esta ecuación de la siguiente manera:

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{y}{x} + \left(\frac{x+y}{x}\right)\ln\left|\frac{x+y}{x}\right| \tag{32}$$

Es homogénea,hacemos la sustitución

$$\boxed{z = \frac{y}{x}} \tag{33}$$

Diferenciando respecto a x, tenemos

$$\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x} = \frac{x\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} - y}{x^2} \;\rightarrow\; \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = x\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x} + z \qquad (34)$$

Sustituyendo en la ecuación (32), obtenemos

$$x\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x} = (1+z)\ln|1+z| \qquad (35)$$

Como podemos ver, esta ecuación es de variables separables

$$\int \frac{\mathrm{d}z}{(1+z)\ln|1+z|} = \int \frac{\mathrm{d}x}{x} \qquad (36)$$

notamos que $\mathrm{d}\ln|z+1| = \frac{1}{z+1}\mathrm{d}z$, así

$$\int \frac{\mathrm{d}\ln|1+z|}{\ln|1+z|} = \int \frac{\mathrm{d}x}{x} \tag{37}$$

El resultado de integrar es

$$\ln\left|\ln|1+z|\right| = \ln|cx| \tag{38}$$

Usando las propiedades de los logaritmos, tenemos que

$$\ln|1+z| = cx \tag{39}$$

Ahora, regresando a las variables y, x, tenemos la solución general

$$\ln\left|\frac{x+y}{x}\right| = cx \tag{40}$$

Ejemplo 2

Resolver la ecuación diferencial

$$xy' = y - xe^{y/x}. \tag{41}$$

Solución: Como podemos ver, ésta es una ecuación homogénea, por lo tanto, podemos reducirla a una ecuación con variables separables mediante la sustitución

$$z = \frac{y}{x} \;\rightarrow\; y = xz \tag{42}$$

Diferenciando respecto a x el último término de la expresión (42), obtenemos

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = z + x\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x} \tag{43}$$

Sustituyendo en la ecuación original (41) tenemos la siguiente ecuación:

$$z + x\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x} = z - e^{z} \;\rightarrow\; x\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x} = -e^{z} \tag{44}$$

Separando variables

$$\int e^{-z}\mathrm{d}z = -\int \frac{\mathrm{d}x}{x} \tag{45}$$

Integrando, tenemos

$$-e^{-z} = -\ln|x| - \ln|c| \;\rightarrow\; e^{-z} = \ln|x| + \ln|c| \tag{46}$$

$$e^{-z} = \ln|cx| \tag{47}$$

Ahora recordamos que hicimos el cambio $z = y/x$, lo sustituimos en la última ecuación de (47) y obtenemos

$$\ln|cx| = e^{-y/x} \tag{48}$$

Esta expresión la podemos escribir como

$$y = -x \ln|\ln|cx|| \tag{49}$$

Ejemplo 3

Dr. Juan Rosales García
Departamento de Ingeniería Eléctrica, DICIS-UGTO.

Resolver la ecuación

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{y - x + 1}{y - x} \tag{50}$$

Solución: Esta ecuación tiene la forma de (26). Hagamos la sustitución,

$$z = y - x \;\rightarrow\; \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} - 1 \;\rightarrow\; \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = 1 + \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x} \tag{51}$$

Sustituyendo en (50), resulta

$$1 + \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x} = \frac{z+1}{z} \;\rightarrow\; \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x} = \frac{z+1}{z} - 1 = \frac{z+1-z}{z} = \frac{1}{z} \tag{52}$$

Separando las variables e integrando, obtenemos

$$\int z\mathrm{d}z = \int \mathrm{d}x \;\rightarrow\; \frac{z^2}{2} = x + \frac{c}{2} \;\rightarrow\; z^2 = 2x + c \quad (53)$$

donde hemos escogido a $c/2$ como la constante de integración. Ahora, recordemos la sustitución $z = y - x$ en (51) y poniéndola en la última expresión de (53), obtenemos el resultado final

$$(y - x)^2 = 2x + c \quad (54)$$

Ejemplo 4

Dr. Juan Rosales García
Departamento de Ingeniería Eléctrica, DICIS-UGTO.

Hallar la solución general de la ecuación

$$(x-y+6)\mathrm{d}x-(x+y+8)\mathrm{d}y=0 \tag{55}$$

Solución: Para encontrar el punto de intersección de las rectas debemos resolver el sistema de ecuaciones

$$\begin{aligned} x-y+6 &= 0 \\ -x-y-8 &= 0 \end{aligned} \tag{56}$$

El punto de intersección es $x_0=-7$ y $y_0=-1$. Entonces, haciendo el desplazamiento

$$x=X-7, \quad y=Y-1 \tag{57}$$

Sustituyendo en (55), tenemos

$$(X-Y)\mathrm{d}X-(X+Y)\mathrm{d}Y=0 \tag{58}$$

Esta ecuación es homogénea y la podemos resolver haciendo la sustitución $Y = zX$. Sin embargo, es más fácil escribirla de la siguiente manera:

$$X\mathrm{d}X - Y\mathrm{d}X - X\mathrm{d}Y - Y\mathrm{d}Y = 0 \tag{59}$$

$$X\mathrm{d}X - Y\mathrm{d}Y - \mathrm{d}(XY) = 0 \tag{60}$$

donde $\mathrm{d}(XY) = Y\mathrm{d}X + X\mathrm{d}Y$.

Integrando

$$\int X\mathrm{d}X - \int Y\mathrm{d}Y - \int \mathrm{d}(XY) = \frac{1}{2}c. \tag{61}$$

$$\frac{1}{2}X^2 - \frac{1}{2}Y^2 - YX = \frac{1}{2}c \tag{62}$$

De la ecuación (57) podemos regresar a las variables x y y, sustituyendo

$$X = x + 7, \quad Y = y + 1 \tag{63}$$

en el resultado (62), obtenemos la solución general de (55)

$$(x+7)^2 - (y+1)^2 - 2(y+1)(x+7) = c \tag{64}$$

Ejercicios Propuestos

Usar el método adecuacdo para resolver las siguientes EDOs.

1. $y' - \frac{y}{x} = 1$
2. $y' = \frac{y}{x} + \frac{y^2}{x^2}$
3. $y' = \frac{2x+5y}{2x-y}$
4. $(x - 4y)dx + (3x - 2y)dy = 0$
5. $(x + 2y)dx = xdy$
6. $(x^2 + y^2)dx - xydy = 0$
7. $x \ln\left(\frac{y}{x}\right)y' - x = y \ln\left(\frac{y}{x}\right)$
8. $(2x + y - 1)dx + (x - 2y + 3)dy = 0$
9. $(x + y - 2)dx = (y - x - 4)dy$
10. $(3x + 3y - 1)dx + (2x + 2y)dy = 0, \qquad y(0) = 2$