Sesión 31. Introducción a las EDP: Soluciones Directas

Dr. J. Juan Rosales García
Departamento de Ingeniería Eléctrica, DICIS-UGTO.

Competencias:

Dr. J. Juan Rosales García
Departamento de Ingeniería Eléctrica, DICIS-UGTO.

- Comprende y analiza las EDP
- Resueve EDP de forma directa.

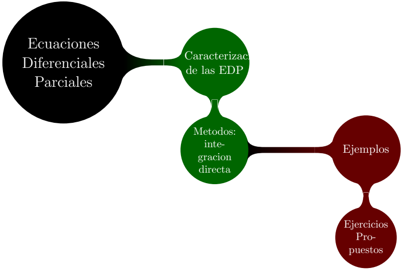
Contenido de la Sesión 31:

- Introducción a las EDP.
- Método directo de solución de las EDP

Mapa Mental

Sesión 31. Introducción a las EDP: Soluciones Directas

Dr. J. Juan Rosales García Departamento de Ingeniería Eléctrica, DICIS-UGTO.



Ecuaciones Diferenciales Parciales: Conceptos Básicos

Dr. J. Juan Rosales García
Departamento de Ingeniería Eléctrica, DICIS-UGTO.

En el curso de cálculo de muchas variables aprendimos que si tenemos una función de más de una variable, por ejemplo $u = u(x, t)$, las derivadas parciales respecto a cada una de las variables independientes se representan como

$$\boxed{\frac{\partial u}{\partial x} = u_x \quad \frac{\partial u}{\partial t} = u_t \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = u_{xx}, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = u_{tt} \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial t} = u_{xt}} \tag{1}$$

Estas dos notaciones las usaremos sin distinción a lo largo de este capítulo.

Definiciones y caracterización de las EDP

Dr. J. Juan Rosales García
Departamento de Ingeniería Eléctrica, DICIS-UGTO.

Una ecuación diferencial en derivadas parciales (EDP) es una expresión que relaciona las variables independientes $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n$, $n > 1$, la función dependiente $u(x_1, x_2, \ldots x_n)$ y sus derivadas parciales hasta el orden m, donde m es un número entero tal que $m \geq 1$.

En general, una EDP se escribe como:

$$\boxed{F\left(x_1,\, x_2, \ldots, x_n, \frac{\partial u}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial u}{\partial x_n}, \ldots, \frac{\partial^m u}{\partial x_1^{k_1} \partial x_2^{k_2} \ldots \partial x_n^{k_n}}\right) = 0} \tag{2}$$

donde los superíndices $k_1,\, k_2, \ldots,\, k_n$ son números enteros no negativos tales que $k_1 + k_2 + \ldots + k_n = m$ y F es una función dada de sus argumentos.

Se llama *orden de una EDP* al orden superior de las derivadas parciales que aparecen en la ecuación.

Se llama *solución de una EDP de orden m*, del tipo (2) en un cierto dominio D de las variables independientes $x_1, x_2, x_3, \ldots x_n$, a una cierta función $u = u(x_1, x_2. \ldots, x_n)$ tal que sustituyéndola en la ecuación (2) se obtenga una identidad. A menudo, se requiere tan solo que la función solución sea continua en la frontera del dominio D, tenga las derivadas en el interior de D y satisfaga la EDP en el interior del dominio D.

En general, la totalidad de las soluciones de una EDP es muy grande, ya que pueden existir funciones muy diferentes entre sí que satisfagan la misma EDP. La solución de una EDP correspondiente a un problema físico dado se obtiene con ayuda de condiciones adicionales que surgen del problema, por ejemplo, las condiciones iniciales y las condiciones en la frontera (estos son valores que toma la función solución en la frontera de la región considerada).
Una EDP se llama lineal, si ésta es lineal respecto a la función desconocida y todas sus derivadas parciales que forman parte de la ecuación; en caso contrario la EDP se llama EDP no lineal.

Ejemplo 1:

Caracterizar las siguientes EDP:

- $\frac{\partial u}{\partial t} + a\frac{\partial u}{\partial x} = 0$
- $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$
- $y\frac{\partial u}{\partial x} - x\frac{\partial u}{\partial y} + u^2 = 0$
- $u\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial u}{\partial y} = x^2 y$

Las dos primeras EDP son lineales, mientras que las dos últimas son no lineales. La primera y la tercera son de primer orden, la segunda y cuarta son de segundo orden.

Interpretación de las soluciones de las EDP

Sea dada una función de dos variables

$$z = f(x, y) \tag{3}$$

La ecuación (3) se interpreta como una superficie en un sistema de coordenadas rectangular x, y, z. La superficie estará formada por los puntos con coordenadas x, y, z que cumplan la ecuación (3).

Entonces, podemos decir que la solución general de una EDP representa una familia de superficies. Podemos imaginar que la función depende no solo de dos variables si no de tres. En tal caso, podemos escribir

$$u = f(x_1, x_2, x_3) \tag{4}$$

Geométricamente no podremos visualizar la expresión (4) como en el caso de dos variables independientes (3).

Sin embargo, podremos imaginarlo como un cuádruplo de números (x_1, x_2, x_3, u) que representa a un punto en un espacio tetradimensional y entonces, referirnos a (4) como una superficie tridimensional o hypersuperficie.

Como ejemplo clásico tenemos la esfera de radio R representada por $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$ en el espacio tridimensional, entonces la esfera en un espacio tetradimensional estará representada por la expresión $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + u^2 = C^2$ a esta esfera se le llama *hyperesfera*.

En general, las EDP se clasifican según:

- El número de variables independientes
- El orden de la EDP
- Los coeficientes (constantes ó variables)
- La homogeneidad
- La linealidad

Métodos de solución de las EDP

Dr. J. Juan Rosales García Departamento de Ingeniería Eléctrica, DICIS-UGTO.

Al igual que en las EDOs, existen muchos métodos y técnicas para resolver las EDP. Algunos métodos son:

1. *Integración directa*.
2. *Separación de variables*.
3. *Transformación de la variable dependiente*: Este método transforma la función desconocida de la EDP en una nueva función desconocida que es más fácil de encontrar.
4. *Métodos numéricos*: Estos métodos cambian una EDP a un sistema de ecuaciones en diferencias que pueden ser resueltos usando técnicas iteractivas en una computadora.

Integración directa de las EDP

Dr. J. Juan Rosales García Departamento de Ingeniería Eléctrica, DICIS-UGTO.

Este método se aplica en ciertas EDP sencillas y lo ilustraremos resolviendo algunos ejercicios.

Ejemplo 2:

Hallar la solución $u = u(x, y)$ de la EDP de primer orden

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 0 \tag{5}$$

Solución: Observamos que la función $u(x, y)$ no depende de x (debido a que la derivada respecto a x es cero). Sin embargo, puede depender de la variable y, esta dependencia la escribiremos como una función de y, es decir

$$u(x, y) = \phi(y) \tag{6}$$

esta es la solución de (5), la cual contiene una función arbitraria de y.

Ejemplo 3:

Hallar la solución $u = u(x, y)$ de la EDP de segundo orden

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = 0 \tag{7}$$

Solución: Sea $v = \frac{\partial u}{\partial y}$, entonces $\frac{\partial v}{\partial x} = 0$, la solución de esta última ecuación es $v = f(y)$,

$$\frac{\partial u}{\partial y} = f(y) \tag{8}$$

Integrando la expresión (8) respecto a y, resulta

$$\int \frac{\partial u}{\partial y} \mathrm{d}y = \int f(y) \mathrm{d}y \quad \rightarrow \quad u(x, y) = \int f(y) \mathrm{d}y + G(x) \tag{9}$$

donde $G(x)$ es una función arbitraria de x. La integral de una función arbitraria será una función arbitraria, por lo tanto, la expresión (9) se escribe como

$$u(x, y) = F(y) + G(x) \tag{10}$$

Esta es la solución general de (7). Para hallar una solución particular, algunas condiciones de frontera serán necesarias para determinar las funciones $F(y)$ y $G(x)$, estas condiciones dependen del problema a resolver.

Ejemplo 4:

Dr. J. Juan Rosales García
Departamento de Ingeniería Eléctrica, DICIS-UGTO.

Hallar la función $u = u(x, y)$ que satisface el problema de valores a la frontera

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = x + y^2 \tag{11}$$

$$u(1, y) = y \tag{12}$$

$$u(x, 1) = x + 8 \tag{13}$$

Solución: Sea $v(x, y) = \frac{\partial u}{\partial y}$, entonces

$$\frac{\partial v(x, y)}{\partial x} = x + y^2 \tag{14}$$

Dr. J. Juan Rosales García
Departamento de Ingeniería Eléctrica, DICIS-UGTO.

Integrando respecto a x, se tiene

$$\int \frac{\partial v(x,\,y)}{\partial x}\mathrm{d}x = \int (x+y^2)\mathrm{d}x, \;\; v(x,\,y) = \frac{x^2}{2}+y^2x+g(y) \tag{15}$$

donde $g(y)$ es una función arbitraria de y. Luego, recordando la relación de v con u e integrando respecto a y, Tenemos

$$\int \frac{\partial u}{\partial y}\mathrm{d}y = \int \left(\frac{x^2}{2} + y^2 x + g(y)\right)\mathrm{d}y + F(x), \tag{16}$$

$$u(x,\, y) = \frac{x^2 y}{2} + \frac{xy^3}{3} + G(y) + F(x) \tag{17}$$

Ahora necesitamos obtener la solución particular usando las condiciones de frontera dadas en (12) y (13).

De la condición $u(1,\, y) = y$, se tiene

$$y = \frac{1}{2}y + \frac{1}{3}y^3 + G(y) + F(1) \tag{18}$$

De aquí podemos hallar a la función $G(y)$, que tiene la forma

$$G(y) = y - \frac{1}{2}y - \frac{1}{3}y^3 - F(1) \tag{19}$$

Sustituyendo esta última expresión en (17), resulta

$$u(x,\, y) = \frac{1}{2}x^2y + \frac{1}{3}xy^3 + \frac{y}{2} - \frac{1}{3}y^3 - F(1) + F(x) \tag{20}$$

De la segunda condición $u(x, 1) = x + 8$ se tiene

$$x + 8 = \frac{x^2}{2} + \frac{x}{3} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} - F(1) + F(x) \qquad (21)$$

De donde

$$F(x) = x + 8 - \frac{x^2}{2} - \frac{x}{3} - \frac{1}{6} + F(1) \qquad (22)$$

Sustituyendo este valor de $F(x)$ en (20), finalmente tenemos

$$u(x,\ y) = \frac{1}{2}x^2(y-1) + \frac{1}{3}y^3(x-1) + \frac{1}{2}y + \frac{2}{3}x + \frac{47}{6} \quad (23)$$

Ejemplo 5:

Dr. J. Juan Rosales García
Departamento de Ingeniería Eléctrica, DICIS-UGTO.

Resolver la ecuación

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = 2x + 4y \tag{24}$$

Solución: Podemos escribir la ecuación dada como

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right) = 2x + 4y \tag{25}$$

Integramos la ecuación (25) respecto a x, esto es

$$\int \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right) \mathrm{d}x = \int (2x + 4y)\mathrm{d}x \tag{26}$$

De aquí resulta

$$\frac{\partial u}{\partial y} = x^2 + 4yx + g(y) \tag{27}$$

Integrando (27) respecto a y

$$\int \frac{\partial u}{\partial y} \mathrm{d}y = \int \left(x^2 + 4yx + g(y)\right) \mathrm{d}y \tag{28}$$

obtenemos la solución general

$$u(x,\ y) = x^2 y + 2y^2 x + G(y) + F(x) \tag{29}$$

donde $G(y)$ y $F(x)$ son ciertas funciones arbitrarias.

Ejemplo 6:

Dr. J. Juan Rosales García Departamento de Ingeniería Eléctrica, DICIS-UGTO.

Hallar la solución particular de la ecuación

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} &= x^2 \cos y \qquad (30)\\ u(x,\,0) &= 0\\ u(x,\,\pi/2) &= 0 \end{aligned}$$

Solución: Integrando la ecuación (30) respecto a y

$$\int \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)\mathrm{d}y = \int x^2 \cos y\,\mathrm{d}y \qquad (31)$$

resulta

$$\frac{\partial u}{\partial y} = x^2 \mathrm{sen} y + F(x) \tag{32}$$

Integrando una vez más respecto a y, se tiene

$$\begin{aligned} u(x,\, y) &= \int \left(x^2 \mathrm{sen} y + F(x)\right) \mathrm{d}y = \\ &= -x^2 \cos y + yF(x) + G(x) \end{aligned} \tag{33}$$

donde $F(x)$ y $G(x)$ son dos funciones arbitrarias de x. Usando la primera condición a la frontera, tenemos

$$0 = -x^2 + G(x) \qquad \rightarrow \qquad G(x) = x^2 \tag{34}$$

Sustituyendo este resultado en (33)

$$u(x,\ y) = -x^2 \cos y + yF(x) + x^2 \tag{35}$$

Para determinar la función $F(x)$ usaremos la segunda condición

$$0 = x^2 + \frac{\pi}{2}F(x) \qquad \rightarrow \qquad F(x) = -\frac{2x^2}{\pi} \tag{36}$$

Sustituyendo en (35) tenemos la solución particular que satisface las condiciones de frontera dadas

$$u(x,\ y) = x^2(1 - \cos y) - \frac{2}{\pi}x^2 y \tag{37}$$

Ejemplo 7:

Dr. J. Juan Rosales García
Departamento de Ingeniería Eléctrica, DICIS-UGTO.

Hallar una solución al problema de valor a la frontera

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = \frac{\partial u}{\partial x} + 2 \qquad u(0, y) = 0 \qquad u_x(x, 0) = x^2 \quad (38)$$

Solución:

La ecuación (38) la podemos escribir como

$$\frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{\partial u}{\partial y} - u\right] = 2 \qquad (39)$$

Integrando respecto a x

$$\int \frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{\partial u}{\partial y} - u\right] \mathrm{d}x = \int 2\mathrm{d}x \tag{40}$$

resulta

$$\frac{\partial u}{\partial y} - u = 2x + f(y) \tag{41}$$

Para una x dada, esta es una ecuación lineal respecto a y y se puede resolver como una EDO.

Dr. J. Juan
Rosales García
Departamento de
Ingeniería
Eléctrica,
DICIS-UGTO.

Usando el factor integrante $\mu(y) = e^{\int P(y)\mathrm{d}y} = e^{-y}$, se tiene la integral

$$\begin{aligned} \int \frac{\partial}{\partial y}\left[e^{-y}u\right]\mathrm{d}y &= \int \left(2x + f(y)\right)e^{-y}\mathrm{d}y = \\ &= \int \left(2xe^{-y} + e^{-y}f(y)\right)\mathrm{d}y + G(x) \end{aligned} \tag{42}$$

Resolviendo las integrales y multiplicado por e^{y}, nos da como resultado

$$u(x,\, y) = -2x + F(y) + e^{y}G(x) \tag{43}$$

De la primer condición $u(0,\, y) = 0$, se tiene

$$0 = F(y) + e^y G(0) \qquad F(y) = -e^y G(0) \tag{44}$$

Sustituyendo en (43) obtenemos

$$u(x,\, y) = -2x - e^y G(0) + e^y G(x) \tag{45}$$

Dr. J. Juan Rosales García
Departamento de Ingeniería Eléctrica, DICIS-UGTO.

Para hacer uso de la segunda condición, primero debemos calcular la derivada respecto a x de (45)

$$\frac{\partial u}{\partial x} = -2 + e^y G'(x) \tag{46}$$

Ahora, la condición $u_x(x, 0) = x^2$ nos da

$$x^2 = -2 + G'(x) \qquad G'(x) = x^2 + 2 \tag{47}$$

Integrando la útima expresión de (47) se tiene $G(x) = \frac{x^3}{3} + 2x$ de aquí resulta $G(0) = 0$. Sustituyendo estos resultados en (45) obtenemos la función $u(x, y)$ que satisface el problema planteado

$$u(x, y) = -2x + e^y \left(\frac{x^3}{3} + 2x \right) \tag{48}$$

Ejemplo 8:

Dr. J. Juan Rosales García Departamento de Ingeniería Eléctrica, DICIS-UGTO.

Hallar una EDP de primer orden que tenga como solución general a la función

$$u(x, y) = yF(x) - x + 4y^2 \tag{49}$$

donde $F(x)$ es una función arbitraria de x.
Solución: Si derivamos la ecuación (49) respecto a y se tiene

$$\frac{\partial u}{\partial y} = F(x) + 8y \tag{50}$$

Esta es una EDP de primer orden, sin embargo aparece la función arbitraria $F(x)$.

De la expresión (49) podemos despejar $F(x)$

$$F(x) = \frac{u + x - 4y^2}{y} \tag{51}$$

Sustituyendo (51) en (50) y acomodando términos, resulta la EDP de primer orden.

$$y\frac{\partial u}{\partial y} - u = x + 4y^2 \tag{52}$$

Ejemplo 9:

Dr. J. Juan Rosales García
Departamento de Ingeniería Eléctrica, DICIS-UGTO.

Hallar una EDP de primer orden que tenga como solución general a la función

$$u = u(ax - by) \tag{53}$$

Solución: Sea

$$z = ax - by \tag{54}$$

Entonces

$$u = u(z) \tag{55}$$

Derivando respecto a x, resulta

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial x} = a\frac{\partial u}{\partial z} \tag{56}$$

Derivando respecto a y,

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial y} = -b\frac{\partial u}{\partial z} \tag{57}$$

Igualando estas dos expresiones, obtenemos la EDP de primer orden

$$b\frac{\partial u}{\partial x} + a\frac{\partial u}{\partial y} = 0 \tag{58}$$

Ejemplo 10:

Dada la superficie

$$u(x,\, y) = xF(y) + yG(x) \tag{59}$$

donde $F(y)$ y $G(x)$ son funciones arbitrarias, hallar una EDP de segundo orden.

Solución: Dividiendo la expresión (59) entre x

$$\frac{u}{x} = F(y) + \frac{y}{x}G(x) \tag{60}$$

derivando respecto a x

$$\frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{u}{x}\right] = \frac{\partial}{\partial x}\left[F(y) + \frac{y}{x}G(x)\right] \tag{61}$$

Acomodando los términos, resulta

$$x\frac{\partial u}{\partial x} - u = y\left[xG'(x) - G(x)\right] \tag{62}$$

Ahora, dividiendo (62) entre y

$$\frac{x}{y}\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{u}{y} = xG'(x) - G(x) \tag{63}$$

Diferenciando respecto a y, se tiene

$$\frac{\partial}{\partial y}\left[\frac{1}{y}\left(x\frac{\partial u}{\partial x}-u\right)\right]=\frac{\partial}{\partial y}\left[xG'(x)-G(x)\right]=0 \quad (64)$$

Aplicando la derivada en la parte izquierda de (64), la parte derecha es cero, resulta

$$-\frac{1}{y^2}\left(x\frac{\partial u}{\partial x}-u\right)+\frac{x}{y}\frac{\partial^2 u}{\partial y\partial x}-\frac{1}{y}\frac{\partial u}{\partial y}=0 \quad (65)$$

Multiplicando esta expresión por y^2 y acomodando términos, finalmente se tiene el siguiente resultado

$$xy\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y} - y\frac{\partial u}{\partial y} - x\frac{\partial u}{\partial x} + u = 0 \tag{66}$$

Ejercicios Propuestos

Dr. J. Juan Rosales García
Departamento de Ingeniería Eléctrica, DICIS-UGTO.

1. $\frac{\partial u}{\partial x} = -y.$
2. $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - 6x = 0;\ u(0,\, 6) = 6,\ \ u(1,\, y) = y^2 + 1.$
3. $\frac{\partial u}{\partial y} = 2xy.$
4. $\frac{\partial u}{\partial x} = 2xyu.$
5. $\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = 1.$