Sesión 32. EDP Lineales homogéneas de Primer Orden

Dr. J. Juan Rosales García
Departamento de Ingeniería Eléctrica, DICIS-UGTO.

Competencias:

- Resuelve EDP lineales homogéneas.
- Aplica el método de variables separablas en la solución de EDP lineales homogéneas.

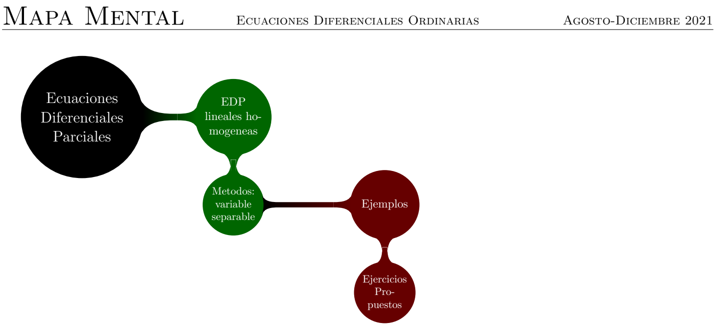
Contenido de la Sesión 32:

Dr. J. Juan Rosales García
Departamento de Ingeniería Eléctrica, DICIS-UGTO.

- EDP lineales homogéneas de primer orden.
- Método de variables separables.

Mapa Mental

Dr. J. Juan Rosales García
Departamento de Ingeniería Eléctrica, DICIS-UGTO.



EDP homogéneas lineales de primer orden

Dr. J. Juan Rosales García
Departamento de Ingeniería Eléctrica, DICIS-UGTO.

Una EDP lineal homogénea de primer orden la podemos escribir como

$$\boxed{F\left(x, y, \ldots, u(x, y, \ldots), \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \ldots\right) = 0} \qquad (1)$$

si además, suponemos que es lineal con coeficientes constantes, entonces, en analogía con las EDOs, donde se supone la solución $y = e^{mx}$, que nos conducía a la ecuación característica, podríamos suponer que la ecuación (1) tiene como solución $u(x, y, z, \ldots) = e^{\alpha_1 x + \alpha_2 y + \alpha_3 z + \cdots}$ y determinar las constantes $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots$. Este método se aplica de manera satisfactoria en algunos casos y da origen a un mejor método el cual asume una solución de la forma $u(x, y, z, \ldots) = X(x)Y(y)Z(z)\ldots$, este método se llama *método de separación de variables*. Este método es de gran utilidad para obtener soluciones de EDPs en casos de coeficientes variables o constantes.

Ejemplo 1:

Dr. J. Juan Rosales García
Departamento de Ingeniería Eléctrica, DICIS-UGTO.

Usando el método de separación de variables hallar la solución al problema de valor a la frontera

$$\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} = 0, \qquad u(0, y) = 2e^{4y} \tag{2}$$

Solución: Supongamos la solución como

$$u(x,\, y) = X(x)Y(y) \tag{3}$$

Sustituyendo en la ecuación (2), resulta

$$\frac{X'}{X} = \frac{Y'}{Y} \tag{4}$$

donde las funciones primadas significan derivadas ordinarias respecto a x y a y, respectívamente. El término de la izquierda es función solo de x y el de la derecha solo de y, las cuales son variables independientes. Lo anterior implica que debemos igualar cada término a una constante arbitraria, por ejemplo λ, entonces, en lugar de (4) podemos escribir las siguientes dos ecuaciones

$$X' - \lambda X = 0 \tag{5}$$

$$Y' - \lambda Y = 0 \tag{6}$$

Estas ecuaciones son de primer orden lineales homogéneas y se pueden resolver separando las variables. Las soluciones son

$$X(x) = c_1 e^{\lambda x} \tag{7}$$

$$Y(y) = c_2 e^{\lambda y} \tag{8}$$

Sustituyendo estas funciones en (3), resulta

$$u(x, y) = Ae^{\lambda x}e^{\lambda y} = Ae^{\lambda(x+y)} \tag{9}$$

donde $A = c_1 c_2$ y λ son constantes a determinar. Estas se determinan usando el valor a la frontera dado en (2), tenemos

$$2e^{4y} = Ae^{\lambda y} \tag{10}$$

Comparando estos dos términos se tiene $A = 2$ y $\lambda = 4$.

Tomando esto en cuenta, la solución al problema de valor a la frontera (2) es

$$u(x, y) = 2e^{4(x+y)} \tag{11}$$

Ejemplo 2:

Dr. J. Juan Rosales García
Departamento de Ingeniería Eléctrica, DICIS-UGTO.

Obtener la solución del siguiente problema de valor a la frontera

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} - u(x,\, y) = 0, \qquad u(0,\, y) = 2e^{-y} + 3e^{-2y} \tag{12}$$

Solución: Supongamos la solución

$$u(x,\, y) = X(x)Y(y) \tag{13}$$

Sustituyendo en (12) resulta

$$\frac{X'}{X} + \frac{Y'}{Y} = 1 \qquad \to \qquad \frac{X'}{X} = 1 - \frac{Y'}{Y} \tag{14}$$

donde las primas significan derivadas ordinarias respecto a x y a y, respectivamente. El término de la izquierda es función solo de x y el de la derecha solo de y, las cuales son variables independientes.

Lo anterior implica que podemos igualar cada término a una constante arbitraria, por ejemplo λ, entonces, en lugar de (14) podemos escribir las siguientes dos ecuaciones

$$X' - \lambda X = 0 \tag{15}$$

$$Y' - (1-\lambda)Y = 0 \tag{16}$$

Estas ecuaciones se resuelven separando las variables e integrando

$$X(x) = c_1 e^{\lambda x} \tag{17}$$

$$Y(y) = c_2 e^{(1-\lambda)y} \tag{18}$$

Sustituyendo en (13) se tiene la solución general

$$u(x, y) = Ae^{\lambda x+(1-\lambda)y}, \qquad A = c_1 c_2 \tag{19}$$

De la condición de frontera se tiene que cuando $x = 0$ la función $u(0,\ y) = 2e^{-y} + 3e^{-2y}$, esto nos da

$$2e^{-y} + 3e^{-2y} = Ae^{(1-\lambda)y} \tag{20}$$

En este caso, a diferencia del ejemplo anterior, la condición de frontera no se puede cumplir para ninguna elección de las constantes A y λ.

Sin embargo, podemos usar el principio de superposición, válido para ecuaciones lineales.
Para esto, de la expresión (19) se definen dos funciones

$$u_1(x, y) = e^{\lambda_1 x + (1-\lambda_1) y} \tag{21}$$

$$u_2(x, y) = e^{\lambda_2 x + (1-\lambda_2) y} \tag{22}$$

como soluciones particulares, entonces la combinación lineal también es una solución,
$u(x, y) = c_1 u_1(x, y) + c_2 u_2(x, y)$, de (12).

Por consiguiente, tenemos

$$u(x,\ y) = c_1 e^{\lambda_1 x + (1-\lambda_1)y} + c_2 e^{\lambda_2 x + (1-\lambda_2)y} \tag{23}$$

Para $x = 0$, se tiene $u(0,\ y) = 2e^{-y} + 3e^{-2y}$, entonces

$$2e^{-y} + 3e^{-2y} = c_1 e^{(1-\lambda_1)y} + c_2 e^{(1-\lambda_2)y} \tag{24}$$

comparando los términos, resulta
$c_1 = 2,\ \ 1 - \lambda_1 = -1,\ \rightarrow\ \lambda_1 = 2$ y
$c_2 = 3,\ \ 1 - \lambda_2 = -2,\ \rightarrow\ \lambda_2 = 3$. Sustituyendo estos valores en (23), finalmente resulta

$$u(x,\ y) = 2e^{2x-y} + 3e^{3x-2y} \tag{25}$$

Ejemplo 3:

Resolver el problema de valor a la frontera

$$\frac{\partial u}{\partial x} + 5\frac{\partial u}{\partial y} = 0, \qquad u(0,\, y) = 8e^{-4y} + 6e^{-12y} \tag{26}$$

Solución: Supongamos la solución

$$u(x,\, y) = X(x)Y(y) \tag{27}$$

Sustituyendo en (26) resulta

$$\frac{X'}{5X} = -\frac{Y'}{Y} \tag{28}$$

donde las primas significan derivadas ordinarias respecto a x y a y. El termino de la izquierda es función solo de x y el de la derecha solo de y, las cuales son variables independientes. Lo anterior implica que podemos igualar cada termino a una constante arbitraria, por ejemplo λ, entonces, en lugar de (28) podemos escribir las siguientes dos ecuaciones

$$X' - 5\lambda X = 0 \tag{29}$$

$$Y' + \lambda Y = 0 \tag{30}$$

Estas ecuaciones se integran separando las variables, el resultado es

$$X(x) = c_1 e^{5\lambda x} \tag{31}$$

$$Y(y) = c_2 e^{-\lambda y} \tag{32}$$

Sustituyendo estos dos resultados en (27) se tiene

$$u(x,\, y) = Ae^{5\lambda x} e^{-\lambda y} = Ae^{\lambda(5x-y)} \tag{33}$$

donde $A = c_1 c_2$. Aplicando la condición de frontera, se tiene que para $x = 0$, la función $u(0,\, x) = 8e^{-4y} + 6e^{-12y}$, esto es

$$Ae^{\lambda(5x-y)} = 8e^{-4y} + 6e^{-12y} \tag{34}$$

No se puede cumplir esta igualdad para ningún valor de las constantes A y λ. Esto es debido a que se tiene un termino a la izquierda y dos a la derecha. Sin embargo, debido al principio de superposición (válido para ecuaciones lineales) podemos construir una solución más a partir de la encontrada. Esto es, partiendo de la solución (33) construimos dos soluciones

$$u_1(x, y) = e^{\lambda_1(5x-y)} \tag{35}$$

$$u_2(x, y) = e^{\lambda_2(5x-y)} \tag{36}$$

Cada una de estas funciones es solución de la ecuación (26) y también lo será la combinación lineal de éstas. Es decir, la función

$$u(x,\ y) = c_1 e^{\lambda_1(5x-y)} + c_2 e^{\lambda_2(5x-y)} \tag{37}$$

Ahora sí podremos encontrar valores de las constantes $c_1,\ c_2$ y λ tales que satisfagan la condición de frontera. Aplicando las condiciones a la frontera se tiene

$$c_1 e^{\lambda_1(-y)} + c_2 e^{\lambda_2(-y)} = 8e^{-4y} + 6e^{-12y} \tag{38}$$

Dr. J. Juan Rosales García Departamento de Ingeniería Eléctrica, DICIS-UGTO.

Comparando termino a termino, obtenemos los valores de las constantes $c_1 = 8,\ \lambda_1 = 4,\ c_2 = 6,\ \lambda_2 = 12$. Sustituyendo estos valores en (37) tenemos la solución del problema de valor a la frontera (26)

$$u(x,\ y) = 8e^{4(5x-y)} + 6e^{12(5x-y)} \tag{39}$$

Ejercicios Propuestos

Dr. J. Juan Rosales García Departamento de Ingeniería Eléctrica, DICIS-UGTO.

1. $\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} = 0,\ u(x,\,0) = 3e^{x}.$
2. $\frac{\partial u}{\partial x} + 3\frac{\partial u}{\partial y} = 0$
3. $\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} - u = 0,\ u(x,\,0) = e^{-x} - 2e^{-5x}.$
4. $\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial u}{\partial y};\ u(0,y) = e^{y} + e^{-2y}.$
5. $\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial u}{\partial y} + u;\ u(0,y) = 2e^{-y} - e^{2y}.$