

Sesión 33. EDP
Lineales no
Homogéneas:

Dr. J. Juan
Rosales García
Departamento de
Ingeniería
Eléctrica,
DICIS-UGTO.

Sesión 33. EDP Lineales no Homogéneas:

Dr. J. Juan Rosales García
Departamento de Ingeniería Eléctrica, DICIS-UGTO.

Competencias:

Sesión 33. EDP
Lineales no
Homogéneas:

Dr. J. Juan
Rosales García
Departamento de
Ingeniería
Eléctrica,
DICIS-UGTO.

- Resuelve EDP lineales no homogéneas de primer y segundo orden.
- Aplica el método de variable separable o método de Fourier.

Contenido de la Sesión 33:

Sesión 33. EDP
Lineales no
Homogéneas:

Dr. J. Juan
Rosales García
Departamento de
Ingeniería
Eléctrica,
DICIS-UGTO.

- EDP lineales no homogéneas de primer orden.
- EDP lineales homogéneas de segundo orden.
- Método de variable separable o método de Fourier.

Mapa Mental

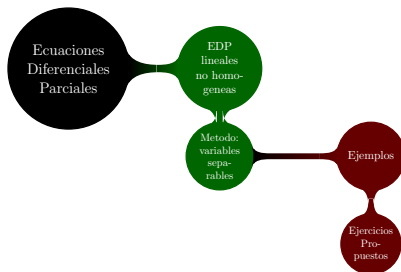
Sesión 33. EDP
Lineales no
Homogéneas:

Dr. J. Juan
Rosales García
Departamento de
Ingeniería
Eléctrica,
DICIS-UGTO.

MAPA MENTAL

ECUACIONES DIFERENCIALES ORDINARIAS

AGOSTO-DICIEMBRE 2021



EDP lineales no homogéneas de primer orden

Sesión 33. EDP
Lineales no
Homogéneas:

Dr. J. Juan
Rosales García
Departamento de
Ingeniería
Eléctrica,
DICIS-UGTO.

Vamos a suponer, por simplicidad, que se tienen solo dos variables independientes. Entonces, la función dependiente es $u = u(x, y)$. En este caso, la forma general de una *EDP lineal con coeficientes constantes no homogénea* se escribe como

$$a \frac{\partial u}{\partial x} + b \frac{\partial u}{\partial y} + cu(x, y) = f(x, y) \quad (1)$$

donde a y b son ciertas constantes conocidas al igual que la función $f(x, y)$.

El propósito es aprender a resolver ecuaciones del tipo (1). Para esto, primero supongamos que $a = 0$, en este caso (1) se reduce a

$$b \frac{\partial u}{\partial y} + cu(x, y) = f(x, y) \quad (2)$$

Esta es una ecuación lineal parcial de primer orden no homogénea. En este caso, para cada x fija, podemos ver a la EDP (2) como una EDO lineal de primer orden y así usar cualquiera de los dos métodos estudiados anteriormente.

Usando el método del factor integrante

$$\mu(y) = e^{\frac{c}{b} \int dy} = e^{\frac{c}{b} y} \quad (3)$$

Luego, multiplicamos la expresión (2) por el factor integrante e integramos

$$\int \frac{\partial}{\partial y} [e^{\frac{c}{b} y} u(x, y)] dy = \frac{1}{b} \int e^{\frac{c}{b} y} f(x, y) dy + G(x) \quad (4)$$

Se tiene la solución implícita

$$u(x, y) = e^{-\frac{c}{b}y} \left[G(x) + \frac{1}{b} \int e^{\frac{c}{b}y} f(x, y) dy \right] \quad (5)$$

donde $G(x)$ es una función arbitraria de x . La expresión (4) es la solución general de la EDP (2).

Ejemplo 1:

Sesión 33. EDP
Lineales no
Homogéneas:

Dr. J. Juan
Rosales García
Departamento de
Ingeniería
Eléctrica,
DICIS-UGTO.

Hallar la solución general $u(x, y)$ de la ecuación

$$3\frac{\partial u}{\partial y} - 2u = x + y \quad (6)$$

Solución: Esta ecuación la podemos escribir como

$$\frac{\partial u}{\partial y} - \frac{2}{3}u = \frac{1}{3}(x + y) \quad (7)$$

para una x fija, la ecuación (7) es una EDP lineal no homogénea de primer orden.

Usamos el método del factor integrante, con $\mu(y) = e^{-\frac{2}{3}y}$, e integrando respecto a y

$$\int \frac{\partial}{\partial y} \left[e^{-\frac{2}{3}y} u(x, y) \right] dy = \int \frac{1}{3}(x + y)e^{-\frac{2}{3}y} dy + G(x) \quad (8)$$

resulta

$$e^{-\frac{2}{3}y} u(x, y) = -\frac{x}{2}e^{-\frac{2}{3}y} - \left(\frac{y}{2} + \frac{3}{4} \right) e^{-\frac{2}{3}y} + G(x) \quad (9)$$

Finalmente, multiplicando toda la ecuación (9) por $e^{\frac{2}{3}y}$ tenemos la solución general

$$u(x, y) = -\frac{x}{2} - \left(\frac{y}{2} + \frac{3}{4}\right) + G(x)e^{\frac{2}{3}y} \quad (10)$$

Para el caso general $a \neq 0$, $b \neq 0$, es decir, para resolver la EDP (1), la clave está en ver que las derivadas de (1) se pueden escribir como

$$a \frac{\partial u}{\partial x} + b \frac{\partial u}{\partial y} = \nabla u \cdot (a\vec{i} + b\vec{j}) \quad (11)$$

es decir, como el producto escalar del gradiente de $u(x, y)$ y el vector $(a\vec{i} + b\vec{j})$, los $\vec{i}, \vec{j}$ son los vectores cartesianos unitarios (de módulo uno).

Esto quiere decir que $au_x + bu_y$ es una *derivada direccional* en dirección del vector $(a\vec{i} + b\vec{j})$ y la ecuación es, entonces, una ecuación diferencial ordinaria a lo largo de estas dos direcciones.

La idea es introducir un cambio de variables de manera tal que una variable sea constante a lo largo de las rectas paralelas al vector $(a\vec{i} + b\vec{j})$. Estas rectas se llaman *rectas características* y están dadas por

$$y = \frac{b}{a}x + d \quad \text{o} \quad bx - ay = \text{constante} \quad (12)$$

Vamos a representar las nuevas variables por w, z .

Elijiendo a w de tal manera que las rectas características sean las rectas $w = \text{constantes}$ y la otra variable z de la manera más sencilla sin que sea múltiplo de w . Teniendo esto en cuenta, hagamos la sustitución

$$w = bx - ay \quad \implies \quad x = \frac{w + az}{b} \quad (13)$$

$$z = y \quad \implies \quad y = z \quad (14)$$

Definamos también una nueva función dependiente $v = v(w, z)$ de tal manera que coincida con la función anterior $u = u(x, y)$ en cada punto de la recta, para esto se debe cumplir la condición $v(w, z) = u(x, y)$.

Debemos encontrar, cuál EDP satisface la condición $v(w, z) = u(x, y)$. Usando la regla de la cadena, se tiene

$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial x} &= \frac{\partial v}{\partial w} \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial x} = b \frac{\partial v}{\partial w} + 0 \cdot \frac{\partial v}{\partial z} = b \frac{\partial v}{\partial w} \\ \frac{\partial u}{\partial y} &= \frac{\partial v}{\partial w} \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial y} = -a \frac{\partial v}{\partial w} + \frac{\partial v}{\partial z}\end{aligned}\quad (15)$$

Sustituyendo las expresiones (15) y (15) en (6),
obtenemos

$$ab \frac{\partial v}{\partial w} + b \left(-a \frac{\partial v}{\partial w} + \frac{\partial v}{\partial z} \right) + v(w, z) = f \left(\frac{w + bz}{a}, z \right) \quad (16)$$

Podemos ver que el primer y segundo término se
cancelan mutuamente.

Entonces, el resultado es

$$b \frac{\partial v}{\partial y} + v(w, y) = f\left(\frac{w + by}{a}, y\right) \quad (17)$$

Esta ecuación tiene la misma estructura que la ecuación (2) con $c = 1$, entonces, la solución tendrá la misma forma que (4), es decir

$$v(w, y) = e^{-\frac{c}{b}y} \left[G(w) + \frac{1}{b} \int f\left(\frac{w + ay}{b}, y\right) e^{\frac{c}{b}y} dy \right] \quad (18)$$

O bien, regresando a las variables x, y de la ecuación original (1) la solución es

$$u(x, y) = e^{-\frac{c}{b}y} \left[G(bx - ay) + \frac{1}{b} \int f(x, y) e^{\frac{c}{b}y} dy \right] \quad (19)$$

Ejemplo 2:

Sesión 33. EDP
Lineales no
Homogéneas:

Dr. J. Juan
Rosales García
Departamento de
Ingeniería
Eléctrica,
DICIS-UGTO.

Hallar la solución general de la ecuación

$$\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{2}{3} \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{1}{3} u = \frac{1}{3} x \quad (20)$$

Solución: Las rectas características son las rectas de pendiente $m = -2/3$ es decir, las de la ecuación $y = -\frac{2}{3}x + d$ o también

$$2x + 3y = \text{constante} \quad (21)$$

Ahora, haciendo el cambio de variables

$$\begin{aligned}w &= 2x + 3y & \implies & x = \frac{w - 3z}{2} \\z &= y & \implies & y = z\end{aligned}\quad (22)$$

Imponiendo la condición $u(x, y) = v(w, z)$, y usando la regla de la cadena de (15) y (15) resulta

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial w} \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial x} = 2 \frac{\partial v}{\partial w} \quad (23)$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = 3 \frac{\partial v}{\partial w} + \frac{\partial v}{\partial z} \quad (24)$$

Sustituyendo en la ecuación original (20), obtenemos

$$\frac{\partial v}{\partial z} - \frac{1}{2}v = -\frac{w - 3z}{4} \quad (25)$$

Usando el método del factor integrante, se tiene
 $\mu(z) = e^{-\frac{z}{2}}$, entonces

$$\int \frac{\partial}{\partial z} [e^{-\frac{z}{2}} v(w, z)] dz = -\frac{1}{4} \int (w - 3z) e^{-\frac{z}{2}} dz + G(w) \quad (26)$$

Integrando

$$e^{-\frac{z}{2}} v(w, z) = \frac{w}{2} e^{-\frac{z}{2}} - \frac{3}{2} (z + 2) e^{-\frac{z}{2}} + G(w) \quad (27)$$

Despejando $v(w, z)$, resulta

$$v(w, z) = \frac{w}{2} - \frac{3}{2} (z + 2) + G(w) e^{\frac{z}{2}} \quad (28)$$

Recordando el cambio de variables, el resultado final es

$$\begin{aligned} u(x, y) &= \frac{2x + 3y}{2} - \frac{3}{2} (y + 2) + G(2x + 3y) e^{\frac{y}{2}} = \\ &= x - 3 + G(2x + 3y) e^{\frac{y}{2}} \end{aligned} \quad (29)$$

Ejemplo 3:

Sesión 33. EDP
Lineales no
Homogéneas:

Dr. J. Juan
Rosales García
Departamento de
Ingeniería
Eléctrica,
DICIS-UGTO.

Resolver la siguiente EDP

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} - u = 0 \quad (30)$$

Solución: De la ecuación dada identificamos los valores $a = 1$, $b = 1$ y $c = -1$, entonces $w = x - y$ $z = y$, y las derivadas parciales en las nuevas variables $v(w, z)$ son

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial w} \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial w} \quad (31)$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial v}{\partial w} \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial w} + \frac{\partial v}{\partial z} \quad (32)$$

Sustituyendo en la ecuación (30), obtenemos la siguiente EDP

$$\frac{\partial v}{\partial z} - v(w, z) = 0 \quad (33)$$

Para una w dada, podemos ver esta EDP como una EDO y resolviendo se tiene una solución

$$v(w, z) = f(w)e^z \quad (34)$$

La solución de la EDP (30) es, entonces

$$u(x, y) = f(x - y)e^y \quad (35)$$

Clasificación de las EDP de segundo orden

Sesión 33. EDP
Lineales no
Homogéneas:

Dr. J. Juan
Rosales García
Departamento de
Ingeniería
Eléctrica,
DICIS-UGTO.

De la EDP lineal de segundo orden (??), se tiene la ecuación

$$A \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + B \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + C \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + a \frac{\partial u}{\partial x} + b \frac{\partial u}{\partial y} + cu = f(x, y) \quad (36)$$

donde A, B, C, a, b, c son constantes reales.

Dependiendo del valor de $B^2 - 4AC$, las ecuaciones diferenciales se clasifican en tres grupos:

- 1 hiperbólica, si $B^2 - 4AC > 0$
- 2 parabólica, si $B^2 - 4AC = 0$
- 3 elíptica, si $B^2 - 4AC < 0$

Ejemplo 4:

Sesión 33. EDP
Lineales no
Homogéneas:

Dr. J. Juan
Rosales García
Departamento de
Ingeniería
Eléctrica,
DICIS-UGTO.

Clasifique la EDP

$$2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial u}{\partial y} = 0 \quad (37)$$

Solución: Comparando los coeficientes de la EDP dada con la forma general (36), observamos que $A = 2$, $B = 0$ y $C = 0$, de tal manera que la expresión $B^2 - 4AC = 0$ se anula y por consiguiente la EDP dada es parabólica.

Ejemplo 5:

Sesión 33. EDP
Lineales no
Homogéneas:

Dr. J. Juan
Rosales García
Departamento de
Ingeniería
Eléctrica,
DICIS-UGTO.

Clasifique la EDP

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \quad (38)$$

Solución: Comparando los coeficientes de la EDP dada con la forma general (36), observamos que $A = 1$, $B = 0$ y $C = 1$, de tal manera que la expresión $B^2 - 4AC = -4 < 0$ y por consiguiente la EDP dada es elíptica.

Ejemplo 6:

Sesión 33. EDP
Lineales no
Homogéneas:

Dr. J. Juan
Rosales García
Departamento de
Ingeniería
Eléctrica,
DICIS-UGTO.

Clasifique la EDP

$$2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} - 3\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \quad (39)$$

Solución: Comparando los coeficientes de la EDP dada con la forma general (36), observamos que $A = 2$, $B = 1$ y $C = -3$, de tal manera que la expresión $B^2 - 4AC = 25 > 0$ y por consiguiente la EDP dada es hiperbólica.

Sesión 33. EDP
Lineales no
Homogéneas:

Dr. J. Juan
Rosales García
Departamento de
Ingeniería
Eléctrica,
DICIS-UGTO.

Los fenómenos oscilatorios de diferente naturaleza se describen por EDP del tipo hiperbólico; los procesos de difusión y propagación del calor se describen por EDP del tipo parabólico; las EDP elípticas describen procesos que no dependen del tiempo, es decir, caracterizan sistemas en estado estable.

Existen tres tipos principales de problemas para las EDP:

- 1 El problema de Cauchy para las EDP de tipo hiperbólico y parabólico: se plantean las condiciones iniciales, la región Ω coincide con todo el espacio $\mathbb{R}^n$.
- 2 El problema de contorno para las EDP de tipo elíptico: se plantean las condiciones en la frontera S de la región Ω , las condiciones iniciales no son necesarias.
- 3 El problema mixto para las EDP de tipo hiperbólico y parabólico: se plantean las condiciones iniciales y las de frontera, $\Omega \neq \mathbb{R}^n$.

Método de separación de las variables

Sesión 33. EDP
Lineales no
Homogéneas:

Dr. J. Juan
Rosales García
Departamento de
Ingeniería
Eléctrica,
DICIS-UGTO.

En muchos casos, para una EDP lineal homogénea, es posible hallar soluciones particulares en forma de un producto de dos funciones, cada función es sólo función de una variable independiente. El producto lo podemos escribir como

$$u(x, y) = X(x)Y(y) \quad (40)$$

la función $X(x)$ es sólo función de la variable independiente x , y $Y(y)$ sólo función de y . Este método recibe el nombre de **método de separación de las variables**.

Este método nos permite reducir la EDP a ecuaciones diferenciales ordinarias EDOs. Derivando la expresión (40) hasta dos veces respecto a x y a y , se tiene

$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial x} &= Y \frac{dX}{dx} & \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} &= Y \frac{d^2 X}{dx^2} \\ \frac{\partial u}{\partial y} &= X \frac{dY}{dy} & \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} &= X \frac{d^2 Y}{dy^2}\end{aligned}\quad (41)$$

donde el operador $\frac{d}{dx}$ representa derivadas ordinarias.

Ecuación de onda unidimensional

Sesión 33. EDP
Lineales no
Homogéneas:

Dr. J. Juan
Rosales García
Departamento de
Ingeniería
Eléctrica,
DICIS-UGTO.

Supongamos que se tiene una cuerda homogénea de longitud L sujeta por sus dos extremos, como ejemplo puede ser la cuerda tensa de una guitarra. Si la apartamos de su posición de equilibrio y luego la soltamos, la cuerda comenzará a vibrar. Suponiendo que la tensión es constante, que la cuerda vibra en un plano y que el movimiento es alrededor de la posición de equilibrio, nos preguntamos, ¿cómo es esta vibración, cuál es su forma en cada instante de tiempo?.

Tomando en cuenta las consideraciones hechas, la ecuación que gobierna las vibraciones es la llamada **ecuación de onda unidimensional**

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad (42)$$

donde x representa un punto arbitrario en la cuerda, $0 \leq x \leq L$, $t \geq 0$ es el tiempo, $a^2 = T/\rho$ es una constante positiva que depende de la densidad, ρ , de la cuerda y de la tensión, T , la función $u(x, t)$ es la función desconocida, la cual representa el desplazamiento vertical desde la posición de equilibrio $u(x, t) = 0$ sobre el punto x y el instante t , Figura.

Sesión 33. EDP
Lineales no
Homogéneas:

Dr. J. Juan
Rosales García
Departamento de
Ingeniería
Eléctrica,
DICIS-UGTO.

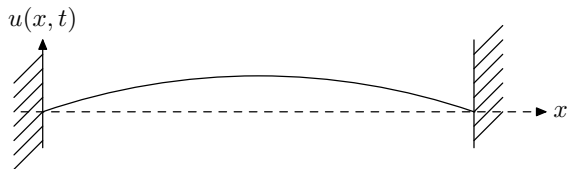


Figure: cuerda vibrante

Solución:

Sesión 33. EDP
Lineales no
Homogéneas:

Dr. J. Juan
Rosales García
Departamento de
Ingeniería
Eléctrica,
DICIS-UGTO.

La solución $u(x, t)$ no sólo debe satisfacer la ecuación de onda (42), también debe cumplir ciertas condiciones que estarán dadas según la naturaleza del problema. Debido a que la cuerda está fija en sus extremos se debe cumplir

$$u(0, t) = u(L, t) = 0 \quad \forall t \geq 0 \quad (43)$$

Estas dos condiciones se llaman *condiciones de frontera*, ya que afectan a los valores de la variable x en la frontera del intervalo de variación $0 \leq x \leq L$.

Por otro lado, debemos suponer que conocemos la posición inicial de la cuerda $u(x, 0)$ y la velocidad inicial $\frac{\partial u(x, 0)}{\partial t}$ que vendrán dadas por ciertas funciones

$$u(x, 0) = f(x) \quad 0 \leq x \leq L \quad (44)$$

$$\frac{\partial u(x, 0)}{\partial t} = g(x), \quad 0 \leq x \leq L \quad (45)$$

A estas condiciones se les llama *condiciones iniciales*, ya que fijan las condiciones físicas iniciales en el instante $t = 0$.

Ejemplo 7:

Sesión 33. EDP
Lineales no
Homogéneas:

Dr. J. Juan
Rosales García
Departamento de
Ingeniería
Eléctrica,
DICIS-UGTO.

Hallar una función $u(x, t)$ que satisfaga la ecuación de onda con las condiciones dadas

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad (46)$$

$$u(0, t) = u(L, t) = 0 \quad \forall t \geq 0 \quad (47)$$

$$u(x, 0) = f(x) \quad 0 \leq x \leq L \quad (48)$$

$$\frac{\partial u(x, 0)}{\partial t} = g(x) \quad 0 \leq x \leq L \quad (49)$$

Solución:

Sesión 33. EDP
Lineales no
Homogéneas:

Dr. J. Juan
Rosales García
Departamento de
Ingeniería
Eléctrica,
DICIS-UGTO.

Aplicando el método de variables separables (40), se tiene

$$\frac{T''(t)}{a^2 T(t)} = \frac{X''(x)}{X(x)} \quad (50)$$

En esta igualdad el primer término depende sólo de t y el segundo sólo de x ; para que tenga lugar la igualdad, ambos miembros deben ser representados por una misma constante. Elejimos la constante de manera arbitraria, por ejemplo, $-\lambda$, y se conoce como *constante de separación*.

$$\frac{T''(t)}{a^2 T(t)} = \frac{X''(x)}{X(x)} = -\lambda \quad (51)$$

De la relación anterior obtenemos dos ecuaciones diferenciales ordinarias de segundo orden con coeficientes constantes

$$T''(t) + \lambda a^2 T(t) = 0 \quad (52)$$

$$X''(x) + \lambda X(x) = 0 \quad (53)$$

Ahora debemos imponer las condiciones de frontera (47) en la expresión $u(x, t) = X(x)T(t)$, esto nos da como resultado

$$u(0, t) = X(0)T(t) = 0 \quad (54)$$

$$u(L, t) = X(L)T(t) = 0 \quad (55)$$

Debido a que $T(t) \neq 0$ no es la función nula, debe cumplirse que $X(0) = X(L) = 0$.

Entonces, la función $X(x)$ debe ser la solución del problema de valores a la frontera

$$X''(x) + \lambda X(x) = 0 \qquad X(0) = X(L) = 0 \quad (56)$$

Hemos llegado al siguiente problema: Hallar los valores del parámetro λ , para los que existan soluciones no triviales del problema (56). Al conjunto de valores del parámetro λ se le llama *valores propios* y a sus correspondientes funciones X se les llama *funciones propias*. En general, a este problema se le conoce como *problema de Sturm-Liouville*.

Sesión 33. EDP
Lineales no
Homogéneas:

Dr. J. Juan
Rosales García
Departamento de
Ingeniería
Eléctrica,
DICIS-UGTO.

Vamos a calcular los valores propios y las funciones propias que satisfagan la ecuación de onda con las condiciones de frontera (47) e iniciales (48) y (49). Analizaremos tres casos correspondientes a los valores de λ

Primer Caso:

Sesión 33. EDP
Lineales no
Homogéneas:

Dr. J. Juan
Rosales García
Departamento de
Ingeniería
Eléctrica,
DICIS-UGTO.

El parámetro es negativo, $\lambda < 0$. En tal caso la solución general de la ecuación (56) es

$$X(x) = c_1 e^{-\sqrt{-\lambda}x} + c_2 e^{-\sqrt{-\lambda}x} \quad (57)$$

Imponiendo las condiciones de frontera se tiene

$$X(0) = c_1 e^{-\sqrt{-\lambda}0} + c_2 e^{-\sqrt{-\lambda}0} = 0 \quad (58)$$

$$X(L) = c_1 e^{-\sqrt{-\lambda}L} + c_2 e^{-\sqrt{-\lambda}L} = 0 \quad (59)$$

De estas expresiones resulta el sistema de ecuaciones para c_1 y c_2

$$c_1 + c_2 = 0 \quad (60)$$

$$c_1 e^{-\sqrt{-\lambda}L} + c_2 e^{-\sqrt{-\lambda}L} = 0 \quad (61)$$

Despejando c_1 de (60) y sustituyendo en (61) resulta que $c_1 = c_2 = 0$. Por consiguiente, de (57) se tiene que la única solución para los valores negativos de λ , es la solución trivial $X(x) = 0$. Es decir, para $\lambda < 0$ no existen soluciones no triviales del problema dado. Concluimos, entonces, que este caso no es de interés, ya que la única solución es la trivial $X(x) = 0$.

Segundo Caso:

Sesión 33. EDP
Lineales no
Homogéneas:

Dr. J. Juan
Rosales García
Departamento de
Ingeniería
Eléctrica,
DICIS-UGTO.

Si $\lambda = 0$, la solución general de (56) es

$$X(x) = c_1 x + c_2 \quad (62)$$

Imponiendo las condiciones de frontera, resulta

$$c_1 + c_2 = 0 \quad (63)$$

$$c_1 L + c_2 \cdot 0 = 0 \quad (64)$$

De aquí se sigue que las constantes deben ser cero, $c_1 = c_2 = 0$. Entonces, $X(x) = 0$ y por consiguiente, para $\lambda = 0$ no existen soluciones no triviales del problema planteado. Este caso tampoco representa interés, debido a que la única solución es la trivial.

Tercer Caso:

Sesión 33. EDP
Lineales no
Homogéneas:

Dr. J. Juan
Rosales García
Departamento de
Ingeniería
Eléctrica,
DICIS-UGTO.

Si $\lambda > 0$, la solución general de (56) es

$$X(x) = c_1 \cos(\sqrt{\lambda}x) + c_2 \sin(\sqrt{\lambda}x) \quad (65)$$

Al imponer la condición de frontera $X(0) = 0$ se tiene que $c_1 = 0$, entonces nos queda $X(x) = c_2 \sin(\sqrt{\lambda}x)$ y al imponer $X(L) = 0$ se tiene $c_2 \sin(\sqrt{\lambda}L) = 0$, las soluciones no triviales serán aquellas que cumplan con la condición $\sin(\sqrt{\lambda}L) = 0$, esto se cumple si y sólo si

$$\sqrt{\lambda}L = n\pi \quad \lambda_n = \left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (66)$$

Los valores λ_n son los valores propios. Sustituyendo en (65) se tiene la solución del problema de frontera

$$X_n(x) = \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (67)$$

estas son las funciones propias del problema que se determinan con exactitud de hasta el factor constante, el cual se eligió $c_2 = 1$.

Ahora, sustituyendo los valores de λ_n (66) en (52) se tiene la ecuación diferencial ordinaria

$$T''(t) + \frac{n^2\pi^2 a^2}{L^2} T(t) = 0 \quad (68)$$

cuya solución general, son las funciones propias

$$T_n(t) = a_n \cos\left(\frac{n\pi a}{L}t\right) + b_n \sin\left(\frac{n\pi a}{L}t\right) \quad (69)$$

donde a_n y b_n son constantes arbitrarias $a_n^2 + b_n^2 > 0$.

De esta manera, la función

$$u_n(x, t) = X_n(x) T_n(t) = \left[a_n \cos \left(\frac{n\pi a}{L} t \right) + b_n \sin \left(\frac{n\pi a}{L} t \right) \right] \quad (70)$$

satisface a la ecuación de onda con las condiciones de frontera, para a_n y b_n cualesquiera, $n = 1, 2, 3, \dots n$. Las funciones (70) son las funciones propias y los valores de λ_n (66) son los valores propios de la cuerda vibrante. Al conjunto $(\lambda_1, \lambda_2, \dots)$ se le llama su *espectro*. Cada una de las funciones representa las llamadas *vibraciones propias* de la cuerda fija en los extremos. Si $n = 1$ las vibraciones emiten el tono más bajo, llamado fundamental. Si $n > 1$ las vibraciones emiten los tonos más altos, llamados *sobretonos*.

Importante:

Sesión 33. EDP
Lineales no
Homogéneas:

Dr. J. Juan
Rosales García
Departamento de
Ingeniería
Eléctrica,
DICIS-UGTO.

- 1.- Las funciones propias (70) satisfacen la ecuación de onda (42) y las condiciones de frontera (47). Sin embargo, una única función u_n , generalmente no satisface las condiciones iniciales (48) y (49).
- 2.- No obstante, debido a la linealidad y homogeneidad de la ecuación (42), una suma finita cualquiera de soluciones será también solución de la ecuación de onda (42).

3.- Lo mismo será válido para la serie infinita

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left[a_n \cos \left(\frac{n\pi a}{L} t \right) + b_n \sin \left(\frac{n\pi a}{L} t \right) \right] \sin \left(\frac{n\pi}{L} x \right) \quad (71)$$

siempre y cuando la serie converja uniformemente y pueda derivarse hasta dos veces término a término respecto a x y a t .

Sesión 33. EDP
Lineales no
Homogéneas:

Dr. J. Juan
Rosales García
Departamento de
Ingeniería
Eléctrica,
DICIS-UGTO.

Debido a que cada sumando en la serie (71) satisface las condiciones de frontera, también la función $u(x, t)$ las satisface. Una serie trigonométrica similar a (71) se llama *serie de Fourier* y a los coeficientes a_n y b_n se les conoce como los *coeficientes de la serie de Fourier*.

Estos deben ser elegidos de tal manera que satisfagan las condiciones iniciales (48) y (49). Para esto, derivamos la serie (71) respecto a t , se tiene

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} &= \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n\pi a}{L} \right) \left[-a_n \sin \left(\frac{n\pi a}{L} t \right) + b_n \cos \left(\frac{n\pi a}{L} t \right) \right] \\ &\quad \sin \left(\frac{n\pi x}{L} \right) \end{aligned} \quad (72)$$

Evaluando en $t = 0$ en (71) y (72) obtenemos

$$f(x) = u(x, 0) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right) \quad (73)$$

$$g(x) = \frac{\partial u(x, 0)}{\partial t} = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n\pi a}{L}\right) b_n \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right) \quad (74)$$

Estas fórmulas representan el desarrollo de las funciones dadas $f(x)$ y $g(x)$ en series de Fourier en el intervalo $(0, L)$.

Los coeficientes de los desarrollos en series de Fourier se calculan con ayuda de las siguientes expresiones [1].

$$a_n = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right) dx \quad (75)$$

$$b_n = \frac{2}{n\pi a} \int_0^L g(x) \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right) dx \quad (76)$$

Sesión 33. EDP
Lineales no
Homogéneas:

Dr. J. Juan
Rosales García
Departamento de
Ingeniería
Eléctrica,
DICIS-UGTO.

$$1 \quad \frac{\partial u}{\partial x} + 3u = x - y.$$

$$2 \quad \frac{\partial u}{\partial y} - \frac{1}{2}u = x.$$

$$3 \quad \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2} \frac{\partial u}{\partial y} + u = x.$$

$$4 \quad \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} - u = x + y$$

$$5 \quad \frac{\partial u}{\partial x} + 2 \frac{\partial u}{\partial y} - 4u = e^{x+y}; \quad u(x, 4x + 2) = 0.$$