Sección 4. ED de primer orden

Dr. J. Juan Rosales García
Departamento de Ingeniería Eléctrica, DICIS-UGTO.

Competencias:

Dr. J. Juan Rosales García Departamento de Ingeniería Eléctrica, DICIS-UGTO.

- Resuelve EDs lineales de primer orden.
- Conoce el método de solución de ED no lineales (de Bernoulli).
- Modela procesos físicos sencillo.

Contenido de la sesión 4:

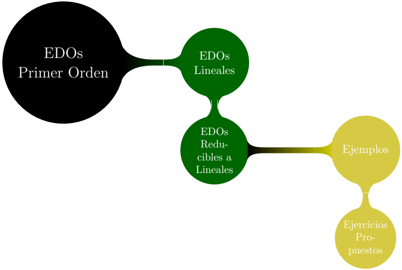
Dr. J. Juan Rosales García
Departamento de Ingeniería Eléctrica, DICIS-UGTO.

1. ED lineales homogéneas.
2. ED lineales no homogéneas.
3. ED reducibles a lineales (ED de Bernoulli).

Mapa Mental

Sección 4. ED de primer orden

Dr. J. Juan Rosales García
Departamento de Ingeniería Eléctrica, DICIS-UGTO.



Ecuaciones diferenciales lineales (EDL) de primer orden

Dr. J. Juan Rosales García
Departamento de Ingeniería Eléctrica, DICIS-UGTO.

Una ecuación diferencial lineal no homogénea de orden *n*, se escribe de la siguiente manera

$$\boxed{a_n(x)\frac{\mathrm{d}^n y}{\mathrm{d}x^n} + a_{n-1}(x)\frac{\mathrm{d}^{n-1} y}{\mathrm{d}x^{n-1}} + \cdots + a_1(x)\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} + a_0(x)y = g(x)}$$

De esta expresión se sigue que una EDL no homogénea de primer orden se expresa como

$$\boxed{a_1(x)\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} + a_0(x)y = g(x)}$$

Debido a que $a_1(x) \neq 0$, podemos dividir esta última expresión y obtener

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} + \frac{a_0(x)}{a_1(x)}y = \frac{g(x)}{a_1(x)}.$$

Definición: Toda EDL de primer orden no homogénea se puede escribir en su forma estándar

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} + P(x)y = f(x)} \qquad (1)$$

donde $P(x) = \frac{a_0(x)}{a_1(x)}$ y $f(x) = \frac{g(x)}{a_1(x)}$ son funciones continuas de x en un cierto dominio D (también pueden ser funciones constantes). Partiendo de la ecuación (1), analizaremos dos métodos para resolverlas.

Método I: Variación del parámetro

Dr. J. Juan Rosales García Departamento de Ingeniería Eléctrica, DICIS-UGTO.

Supongamos que podemos escribir la ecuación (1) de la siguiente manera:

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} + P(x)y = 0} \tag{2}$$

la cual se llama ecuación homogénea (no en el sentido que vimos anteriormente, sino que es homogénea porque estamos suponiendo, por un momento, que en (1), $f(x) = 0$).
La solución de la ecuación (2) la podemos encontrar separando las variables y después integrando

$$\int \frac{\mathrm{d}y}{y} = -\int P(x)\mathrm{d}x + \ln|c| \tag{3}$$

después de integrar tomamos la inversa del logaritmo, resultando

$$y_h = ce^{-\int P(x)\mathrm{d}x} \tag{4}$$

Hemos definido y_h para recordar que tenemos la solución de la ecuación homogénea (2) y no la solución de la ecuación (1), que es no homogénea. En la expresión (4), c es la constante de integración.

Definamos una nueva solución que llamaremos solución particular (o complementaria) y la representaremos como y_p. Esta nueva solución se construye en base a la solución homogénea (4) tomando a c como una función dependiente de x, es decir, como $c = c(x)$. La solución particular tendrá la forma

$$y_p = c(x)e^{-\int P(x)\mathrm{d}x} \tag{5}$$

Sustituyendo (5) en la ecuación no homogénea (1), tenemos

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[c(x)e^{-\int P(x)\mathrm{d}x}\right] + P(x)c(x)e^{-\int P(x)\mathrm{d}x} = f(x) \quad (6)$$

Aplicando la derivada, resulta

$$\cancel{-c(x)P(x)e^{-\int P(x)\mathrm{d}x}} + e^{-\int P(x)\mathrm{d}x}\frac{\mathrm{d}c}{\mathrm{d}x} + $$
$$+\cancel{P(x)c(x)e^{-\int P(x)\mathrm{d}x}} = f(x) \quad (7)$$

Los términos, primero y tercero de la izquierda de (7) se cancelan quedando la ecuación

$$e^{-\int P(x)\mathrm{d}x}\frac{\mathrm{d}c(x)}{\mathrm{d}x} = f(x) \quad (8)$$

ésta es una ecuación con variables separables

Separando las variables e integrando, obtenemos la $c(x)$,

$$\mathrm{d}c(x) = f(x)e^{\int P(x)\mathrm{d}x}\mathrm{d}x \quad \rightarrow \quad c(x) = \int f(x)e^{\int P(x)\mathrm{d}x}\mathrm{d}x \tag{9}$$

Sustituyendo $c(x)$ en (5), tenemos que la solución particular tiene la forma

$$y_p = c(x)e^{-\int P(x)\mathrm{d}x} = e^{-\int P(x)\mathrm{d}x}\int e^{\int P(x)\mathrm{d}x}f(x)\mathrm{d}x \tag{10}$$

De tal manera que la solución general de la ecuación diferencial lineal no homogénea es $y(x) = y_h + y_p$

$$\boxed{y(x) = ce^{-\int P(x)\mathrm{d}x} + e^{-\int P(x)\mathrm{d}x} \int e^{\int P(x)\mathrm{d}x} f(x)\mathrm{d}x} \tag{11}$$

Si sustituimos ésta solución en la ecuación (1), esta última se anulará, mostrando así que efectivamente la relación obtenida es la solución general de la ecuación (1). Es importante mencionar que la suma de dos soluciones (homogénea y_h y particular y_p) es válida sólo para ecuaciones lineales. En problemas de ingeniería, la solución homogénea representa el estado transitorio del sistema y la solución particular su estado permanente o estacionario.

Método II: Factor integrante

Dr. J. Juan Rosales García
Departamento de Ingeniería Eléctrica, DICIS-UGTO.

Sea dada la EDL de primer orden en su forma estándar

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} + P(x)y = f(x)} \tag{12}$$

Supongamos que existe una función

$$\mu(x) = e^{\int P(x)\mathrm{d}x} \tag{13}$$

la cual llamaremos factor integrante. Multiplicamos la ecuación (12) por este factor integrante

$$e^{\int P(x)\mathrm{d}x}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} + P(x)e^{\int P(x)\mathrm{d}x}y = f(x)e^{\int P(x)\mathrm{d}x} \tag{14}$$

La ecuación (14), la podemos escribir como una diferencial total, es decir, como

$$\mathrm{d}\left(e^{\int P(x)\mathrm{d}x}y\right) = f(x)e^{\int P(x)\mathrm{d}x}\mathrm{d}x \tag{15}$$

Integrando esta ecuación, obtenemos

$$e^{\int P(x)\mathrm{d}x}y = \int f(x)e^{\int P(x)\mathrm{d}x}\mathrm{d}x + c \tag{16}$$

donde c es la constante de integración. Multiplicando la ecuación (16) por $e^{-\int P(x)\mathrm{d}x}$, obtenemos

$$\boxed{y(x) = ce^{-\int P(x)\mathrm{d}x} + e^{-\int P(x)\mathrm{d}x}\int e^{\int P(x)\mathrm{d}x}f(x)\mathrm{d}x} \tag{17}$$

Dr. J. Juan Rosales García
Departamento de Ingeniería Eléctrica,
DICIS-UGTO.

Como podemos observar, la expresión (17) es idéntica a la expresión obtenida (11), usando el método de variación del parámetro. Al resolver las ecuaciones diferenciales lineales, ustedes pueden elegir el método que mejor hayan comprendido.

Ecuaciones no lineales o de Bernoulli

Dr. J. Juan Rosales García
Departamento de Ingeniería Eléctrica, DICIS-UGTO.

Definición: A toda ecuación de la forma

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} + P(x)y = f(x)y^n} \tag{18}$$

donde $n \neq 0, 1$ se le conoce como ecuación de Bernoulli. Se supone que las funciones $P(x)$ y $f(x)$ son funciones continuas de x. Los casos $n = 0, 1$ no se consideran, ya que corresponden a una ecuación lineal no homogénea, $y' + P(x)y = f(x)$, y a una ecuación lineal homogénea, $y' + [P(x) - f(x)]y = 0$, respectivamente.

Dr. J. Juan Rosales García Departamento de Ingeniería Eléctrica, DICIS-UGTO.

Si $y^n \neq 0$, podemos escribir la ecuación (18) en su forma equivalente

$$y^{-n}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} + P(x)y^{1-n} = f(x) \tag{19}$$

Definiendo una nueva función $z(x)$ como

$$\boxed{z = y^{1-n}} \tag{20}$$

la ecuación (19) se transforma en una ecuación diferencial lineal. Para verificar lo antes dicho, debemos sustituir la expresión (20) en (19).

Dr. J. Juan Rosales García
Departamento de Ingeniería Eléctrica, DICIS-UGTO.

Diferenciando la expresión (20), obtenemos

$$\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x} = (1-n)y^{-n}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} \;\rightarrow\; \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{1}{(1-n)y^{-n}}\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x} \tag{21}$$

Sustituyendo en la ecuación (19)

$$\frac{y^{-n}}{(1-n)y^{-n}}\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x} + P(x)z = f(x) \tag{22}$$

Finalmente, tenemos la ecuación

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x} + (1-n)P(x)z = (1-n)f(x)} \tag{23}$$

Esta es una ecuación diferencial lineal respecto a $z = z(x)$, la cual puede ser resuelta por cualquiera de los dos métodos estudiados anteriormente.

Ecuaciones reducibles a lineales

Dr. J. Juan Rosales García
Departamento de Ingeniería Eléctrica, DICIS-UGTO.

Definición: La ecuación no lineal de la forma

$$\boxed{p(x)\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = q(x)e^{ay} + r(x)} \tag{24}$$

donde a es una constante y $p(x)$, $q(x)$ y $r(x)$ son funciones continuas de x en el dominio en que la ecuación es válida, se puede transformar en una ecuación lineal mediante la sustitución

$$\boxed{z = e^{-ay}} \tag{25}$$

Como z es una función continua de x, derivamos la función (25) respecto a x, esto es

$$\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x} = -ae^{-ay}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = -az\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} \tag{26}$$

Despejando, tenemos

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = -\frac{1}{az}\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x} \tag{27}$$

Sustituyendo en la ecuación (24), obtenemos

$$-\frac{p(x)}{az}\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x} = \frac{q(x)}{z} + r(x) \tag{28}$$

Dr. J. Juan Rosales García Departamento de Ingeniería Eléctrica, DICIS-UGTO.

Esta última expresión la podemos escribir como

$$\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x} + \frac{ar(x)}{p(x)} z = -\frac{aq(x)}{p(x)}, \ p(x) \neq 0 \tag{29}$$

Finalmente, esta ecuación la podemos escribir en la forma estándar

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x} + P(x)z = f(x)} \tag{30}$$

donde hemos definido $P(x) = \frac{ar(x)}{p(x)}$, y $f(x) = -\frac{aq(x)}{p(x)}$. De esta manera la ecuación no lineal (24) se transforma en una ecuación lineal (30) mediante la sustitución (25).

Dr. J. Juan Rosales García
Departamento de Ingeniería Eléctrica,
DICIS-UGTO.

Observación: si en lugar de la sustitución (25), hubiésemos elegido $z = e^{ay}$, entonces, la ecuación (24) se transformaría en una ecuación de Bernoulli, que a su vez, podemos transformarla en una ecuación lineal. Habrá ocasiones en que tomaremos la sustitución $z = e^{ay}$.

Ejemplo 1:

Resolver la siguiente ecuación diferencial

$$y' = \frac{y}{3x - y^2} \tag{31}$$

Solución: Antes que nada debemos analizar la ecuación. Vemos que la ecuación (31) es no lineal respecto a y, debido a que hay una y^2. Sin embargo, podemos observar que si la ecuación la vemos respecto a x, ésta será una ecuación lineal no homogénea. Es decir, tomamos a x como una función dependiente y a y como la variable independiente

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y} - \frac{3}{y}x = -y \tag{32}$$

esta es una ecuación lineal no homogénea de primer orden respecto a x.

Dr. J. Juan Rosales García Departamento de Ingeniería Eléctrica, DICIS-UGTO.

Primero, buscamos la solución correspondiente a la ecuación homogénea obtenida de (32)

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y} - \frac{3}{y}x = 0 \tag{33}$$

La ecuación (33) es una ecuación con variables separables

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{x} - 3\int \frac{\mathrm{d}y}{y} = \ln|c| \tag{34}$$

Donde hemos escogido, por comodidad, a la constante de integración c como $\ln|c|$. Integrando ambas partes de (34) hallamos que la solución es

$$\ln|x| - 3\ln|y| = \ln|c| \;\to\; x_h = cy^3 \tag{35}$$

El siguiente paso es encontrar la solución particular x_p de la ecuación (32). Para esto, tomamos la solución (35) y suponemos a c como una función de y. La solución particular tiene la forma

$$x_p = c(y)y^3 \tag{36}$$

Derivando (36) respecto a y, tenemos

$$x_p' = c'(y)y^3 + 3c(y)y^2 \tag{37}$$

Sustituyendo en la expresión (32), con el objetivo de hallar la función $c(y)$

$$c'(y)y^3 + \cancel{3c(y)y^2} - \cancel{\frac{3}{y}c(y)y^3} = -y \tag{38}$$

quedando solamente la ecuación

$$c'(y) = -\frac{y}{y^3} = -\frac{1}{y^2} \tag{39}$$

Integrando la expresión (39), resulta

$$c(y) = -\int \frac{\mathrm{d}y}{y^2} = \frac{1}{y} \tag{40}$$

sustituimos en (36),

$$x_p = \frac{y^3}{y} = y^2 \tag{41}$$

Entonces, la solución general de la ecuación (31), tiene la forma

$$x(y) = x_h + x_p = cy^3 + y^2 \tag{42}$$

Ejemplo 2:

Hallar la solución de la ecuación diferencial

$$xy' - 2y = 2x^4 \tag{43}$$

Solución: Suponiendo que $x \neq 0$, dividimos la ecuación (43) entre x, y obtenemos la ecuación

$$y' - \frac{2}{x}y = 2x^3 \tag{44}$$

La ecuación homogénea correspondiente es

$$y' - \frac{2}{x}y = 0 \tag{45}$$

Separando las variables e integrando

$$\int \frac{\mathrm{d}y}{y} = 2\int \frac{\mathrm{d}x}{x} \tag{46}$$

obtenemos la solución de la ecuación homogénea (45)

$$\ln y = 2\ln|x| + \ln|c| \;\rightarrow\; y_h = cx^2 \tag{47}$$

El siguiente paso es obtener una solución particular y_p. Para esto, en la solución homogénea tomamos la constante c como una función de x. Entonces, la solución particular tiene la forma

$$y_p = c(x)x^2 \tag{48}$$

Sustituyendo en la ecuación (44), resulta

$$c'(x)x^2 + \cancel{2c(x)x} - \cancel{\frac{2}{x}c(x)x^2} = 2x^3 \;\rightarrow\; c'(x) = 2x \tag{49}$$

Integrando, resulta

$$c(x) = 2\int x\mathrm{d}x = x^2 \tag{50}$$

Luego, sustituyendo este valor en (48) tenemos la solución particular

$$y_p = x^4 \tag{51}$$

Entonces, concluimos que la solución general de la ecuación (43), es

$$y(x) = y_h(x) + y_p(x) = cx^2 + x^4 \tag{52}$$

Dr. J. Juan Rosales García Departamento de Ingeniería Eléctrica, DICIS-UGTO.

Ejemplo 3:

Usar el factor integrante para resolver la ED (32)

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y} - \frac{3}{y}x = -y \tag{53}$$

Solución: El factor integrante será una función de y,

$$\mu(y) = e^{\int P(y)\mathrm{d}y} \tag{54}$$

De la ecuación (53) podemos identificar a $P(y) = -\frac{3}{y}$, entonces

$$\begin{aligned} \mu(y) &= e^{\int P(y)\mathrm{d}y} = e^{-3\int \frac{\mathrm{d}y}{y}} = e^{-3\ln y} = \frac{1}{e^{3\ln y}} = \\ &= \frac{1}{e^{\ln y^3}} = \frac{1}{y^3} \end{aligned} \tag{55}$$

Luego, se toma el diferencial total respecto a y del producto de x por el factor integrante y multiplicamos la parte derecha de la ecuación (53) por el mismo factor integrante, esto es

$$\mathrm{d}\left(\frac{x}{y^3}\right) = -\frac{y\mathrm{d}y}{y^3} = -\frac{\mathrm{d}y}{y^2} \tag{56}$$

Integrando, tenemos

$$\int \mathrm{d}\left(\frac{x}{y^3}\right) = -\int \frac{\mathrm{d}y}{y^2} \;\rightarrow\; \frac{x}{y^3} = \frac{1}{y} + c \tag{57}$$

De esta última expresión, vemos que

$$x(y) = cy^3 + y^2 \tag{58}$$

La solución (58) es la obtenida anteriormente (42).

Ejemplo 4:

Dr. J. Juan Rosales García
Departamento de Ingeniería Eléctrica, DICIS-UGTO.

Hallar la solución general de la ecuación

$$y = x(y' - x\cos x) \tag{59}$$

Solución: La ecuación (59) se puede escribir de la siguiente manera

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} - \frac{y}{x} = x\cos x \tag{60}$$

De la ecuación, identificamos la función $P(x) = -\frac{1}{x}$, y el factor integrante es

$$\mu(x) = e^{\int P(x)\mathrm{d}x} = e^{-\int \frac{\mathrm{d}x}{x}} = e^{-\ln x} = \frac{1}{x} \tag{61}$$

Luego, integrando

$$\int \mathrm{d}\left(\frac{y}{x}\right) = \int \cos x \mathrm{d}x \rightarrow \frac{y}{x} = \sin x + c \tag{62}$$

Finalmente, la solución general de la ecuación (59) tiene la forma

$$y(x) = x(\sin x + c) \tag{63}$$

Dr. J. Juan Rosales García Departamento de Ingeniería Eléctrica, DICIS-UGTO.

Ejercicio 5:

Hallar la solución general de la ecuación diferencial

$$y' + 2y = y^2 e^x \tag{64}$$

Solución:

Analizando la ecuación, vemos que no es lineal respecto a x ni respecto a y. Sin embargo, es una ecuación de Bernoulli, entonces multiplicando la ecuación (64) por y^{-2}, tenemos

$$y^{-2}y' + 2yy^{-2} = e^x \;\rightarrow\; y^{-2}y' + 2y^{-1} = e^x \tag{65}$$

Hagamos la sustitución

$$z(x) = y^{-1}(x) \tag{66}$$

Diferenciando esta expresión para hallar y' y sustituirla en (65)

Dr. J. Juan Rosales García
Departamento de Ingeniería Eléctrica,
DICIS-UGTO.

$$\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x} = -y^{-2}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} \;\rightarrow\; \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = -\frac{1}{y^{-2}}\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x} \tag{67}$$

Sustituyendo en la última ecuación de (65), resulta

$$-\frac{y^{-2}}{y^{-2}}\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x} + 2z = e^{x} \;\rightarrow\; \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x} - 2z = -e^{x} \tag{68}$$

Esta última ecuación es una ecuación diferencial lineal no homogénea respecto a z, la cual podemos resolver con cualquiera de los dos métodos antes vistos (variación de parámetro y factor integrante). Aquí vamos a usar el segundo método. Para esto identificamos a $P(x) = -2$, después encontramos el factor integrante

$$\mu(x) = e^{\int P(x)\mathrm{d}x} = e^{-2\int \mathrm{d}x} = e^{-2x} \tag{69}$$

Integrando, tenemos

$$\int \mathrm{d}\left(e^{-2x}z\right) = -\int e^{-x}\mathrm{d}x \;\rightarrow\; e^{-2x}z = e^{-x} + c \quad (71)$$

Despejando a z

$$z = e^{2x}e^{-x} + ce^{2x} = e^{x} + ce^{2x} \quad (72)$$

Luego, recordando que hicimos la sustitución $z = y^{-1}$, finalmente tenemos la solución general

$$\frac{1}{y} = ce^{2x} + e^{x} \;\rightarrow\; (ce^{2x} + e^{x})y = 1 \quad (73)$$

Ejemplo 6:

Dr. J. Juan Rosales García
Departamento de Ingeniería Eléctrica, DICIS-UGTO.

Resolver la ecuación

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} + \frac{2}{x}y = 3x^2 y^{4/3} \tag{74}$$

Solución: Esta ecuación es de Bernoulli, y la podemos escribir de la siguiente manera:

$$y^{-4/3}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} + \frac{2}{x}y^{(1-4/3)} = 3x^2 \;\rightarrow\; y^{-4/3}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} + \frac{2}{x}y^{-1/3} = 3x^2 \tag{75}$$

Hagamos la sustitución

$$z = y^{-1/3} \;\rightarrow\; \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x} = -\frac{1}{3}y^{-4/3}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} \;\rightarrow\; \frac{dy}{dx} = -3y^{4/3}\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x} \tag{76}$$

Sustituyendo el resultado anterior en la última ecuación de (75), obtenemos la ecuación lineal

$$\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x} - \frac{2}{3x}z = -x^2 \tag{77}$$

Esta ecuación está escrita en la forma estándar y podemos usar uno de los dos métodos antes vistos para ecuaciones lineales. Apliquemos el método del factor integrante

$$\mu(x) = e^{\int P(x)\mathrm{d}x} = e^{-\frac{2}{3}\int\frac{\mathrm{d}x}{x}} = e^{-\frac{2}{3}\ln|x|} = \frac{1}{x^{2/3}} \tag{78}$$

Luego, tenemos

$$\mathrm{d}\left(\frac{z}{x^{2/3}}\right) = -\frac{x^2}{x^{2/3}}\mathrm{d}x \;\rightarrow\; \mathrm{d}\left(\frac{z}{x^{2/3}}\right) = -x^{4/3}\mathrm{d}x \tag{79}$$

Integrando

$$\int \mathrm{d}\left(\frac{z}{x^{2/3}}\right) = -\int x^{4/3}\mathrm{d}x \tag{80}$$

Obtenemos

$$\begin{aligned} zx^{-2/3} &= -\frac{3}{7}x^{7/3} + c \rightarrow z = -\frac{3}{7}x^{(7/3+2/3)} + cx^{2/3} \\ z &= -\frac{3}{7}x^{3} + cx^{2/3} \end{aligned} \tag{81}$$

Recordando la sustitución $z = y^{-1/3}$, obtenemos el resultado final

$$y^{-1/3} = cx^{2/3} - \left(\frac{3}{7}\right)x^{3} \tag{82}$$

Ejemplo 7:

Dr. J. Juan Rosales García
Departamento de Ingeniería Eléctrica,
DICIS-UGTO.

Resolver la ecuación

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} - \frac{1}{x-1}y = \frac{1}{x-1}y^2. \tag{83}$$

Solución: Esta ecuación es de Bernoulli y se reduce a una ecuación lineal mediante la siguiente sustitución

$$z = y^{-1} \ \rightarrow \ \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x} = -y^{-2}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} \ \rightarrow \ \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = -y^2\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x} \tag{84}$$

Sustituyendo en (83), obtenemos la ecuación lineal respecto a z

$$\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x} + \frac{1}{x-1}z = -\frac{1}{x-1} \tag{85}$$

Esta ecuación la resolvemos según el método del factor integrante

$$\mu(x) = e^{\int \frac{1}{x-1}\mathrm{d}x} = e^{\ln|x-1|} = x - 1 \tag{86}$$

Luego

$$\begin{aligned} \mathrm{d}[(x-1)z] &= -\frac{1}{x-1}(x-1)\mathrm{d}x \\ \int \mathrm{d}[(x-1)z] &= -\int \mathrm{d}x \end{aligned} \tag{87}$$

Integrando

$$(x-1)z = -x + c \tag{88}$$

Dr. J. Juan Rosales García
Departamento de Ingeniería Eléctrica, DICIS-UGTO.

Recordando el cambio que hicimos $z = y^{-1}$, obtenemos el resultado final

$$(x-1)\frac{1}{y} = (c-x) \quad \rightarrow \quad y = \frac{x-1}{c-x} \tag{89}$$

Dr. J. Juan Rosales García
Departamento de Ingeniería Eléctrica, DICIS-UGTO.

Observación: la ecuación (83) la podemos escribir de la siguiente manera:

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{y^2 + y}{x - 1} = \frac{y(y + 1)}{x - 1} \tag{90}$$

Esta ecuación, como podemos ver, es de variables separables

$$\int \frac{\mathrm{d}y}{y(y + 1)} = \int \frac{\mathrm{d}x}{x - 1} \tag{91}$$

El resultado, obviamente, es el mismo que el obtenido en (89). Se deja al lector integrar la expresión (91) y comparar con el resultado (89).

Dr. J. Juan Rosales García
Departamento de Ingeniería Eléctrica,
DICIS-UGTO.

Ejemplo 8:

Resolver la ecuación

$$(x-2)y' = e^y \tag{92}$$

Solución: Para resolver esta ecuación, hagamos la sustitución

$$z = e^y \;\rightarrow\; \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x} = e^y \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = z\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} \;\rightarrow\; \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{1}{z}\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x} \tag{93}$$

Sustituyendo en la ecuación (92), tenemos

$$\frac{(x-2)}{z}\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x} = z \;\rightarrow\; (x-2)\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x} = z^2 \tag{94}$$

Esta última ecuación es de variables separables. Integrando, obtenemos

$$\int \frac{\mathrm{d}z}{z^2} = \int \frac{\mathrm{d}x}{x-2} \rightarrow -\frac{1}{z} = \ln|x-2| + \ln|c| \quad (95)$$

Recordando que $z = e^y$ y agrupando los términos, obtenemos el resultado final

$$-e^{-y} = \ln|c(x-2)| \quad (96)$$

Ejercicios Propuestos:

Dr. J. Juan Rosales García Departamento de Ingeniería Eléctrica, DICIS-UGTO.

Resolver las siguientes ecuaciones diferenciales de primer orden:

1. $y' + \frac{x}{x^2-9}y = 0$
2. $y' + y = x, \quad y(0) = 4$
3. $xy' + y = e^x, \quad y(1) = 5$
4. $y' + 3y = -6y^2, \quad y(0) = -1$
5. $xy' + 8y = 12x^2\sqrt{y}, \quad y(1) = 16$
6. $y' - y + 6xy^{3/2}, \quad y(0) = 1/4$
7. $y' + y = e^{x/2}\sqrt{y}, \quad y(0) = 9/4$
8. $xy' + 3y = x^2$
9. $y' + 2xy = xe^{-x^2}$
10. $2ydx + (y^2 - 6x)dy = 0$