Sesión 5: ED de Primer Orden

Dr. Juan Rosales García
Departamento de Ingeniería Eléctrica, DICIS-UGTO.

Competencias:

- Desarrolla habilidades en la solución de ED exactas.
- Resuelve EDs reducibles a exactas.

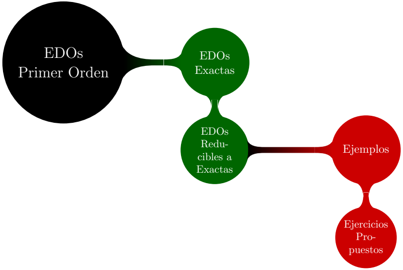
Contenido de la Sesión 5:

- ED exactas.
- ED redicubles a exactas.
- Ejemplos.
- Ejercicios Propuestos.

Mapa Mental

Sesión 5: ED de Primer Orden

Dr. Juan Rosales García
Departamento de Ingeniería Eléctrica, DICIS-UGTO.



Ecuaciones diferenciales exactas

Supongamos que tenemos una ecuación diferencial escrita de la siguiente manera

$$y\mathrm{d}x + x\mathrm{d}y = 0 \tag{1}$$

Esta misma ecuación la podemos escribir como una diferencial total

$$\mathrm{d}(xy) = 0 \tag{2}$$

la cual puede ser fácilmente integrada

$$\int \mathrm{d}(xy) = \int 0\mathrm{d}x \;\rightarrow\; xy = c \tag{3}$$

¿Será posible construir un método general para resolver este tipo de ecuaciones? La respuesta es sí.

Recordemos un poco el cálculo. Sabemos que una superficie está dada por una expresión del tipo

$$z = f(x, y) \tag{4}$$

Luego, tomando la diferencial total de la función (4), resulta

$$\mathrm{d}z = \frac{\partial f}{\partial x}\mathrm{d}x + \frac{\partial f}{\partial y}\mathrm{d}y \tag{5}$$

Supongamos que la superficie es constante, es decir, $z = c$, entonces de (5) tendremos

$$\frac{\partial f}{\partial x}\mathrm{d}x + \frac{\partial f}{\partial y}\mathrm{d}y = 0 \tag{6}$$

Por otro lado, recordemos que toda ecuación diferencial de primer orden puede ser escrita como

$$\boxed{M(x,\, y)\mathrm{d}x + N(x,\, y)\mathrm{d}y = 0} \tag{7}$$

Igualando las ecuaciones (6) y (7), tenemos que

$$\frac{\partial f}{\partial x} = M(x,\, y), \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = N(x,\, y) \tag{8}$$

A una ecuación del tipo (7) que satisface las condiciones (8) la llamaremos ecuación diferencial exacta.

Las ecuaciones (6) y (7) son exactamente las mismas. Es claro, entonces, que la solución general de la ecuación diferencial original estará dada por una familia monoparamétrica en el plano xOy, y tendrá la forma $f(x, y) = c$. El siguiente teorema nos da las condiciones necesarias y suficientes para que la ecuación (7) sea una ecuación diferencial exacta.

Teorema: Sean $M(x,\ y)$ y $N(x,\ y)$ funciones continuas y con derivadas parciales de primer orden en un dominio D definidas en $a < x < b$ y $c < y < d$. Entonces, una condición necesaria y suficiente para que la ecuación

$$\boxed{M(x,\ y)\mathrm{d}x + N(x,\ y)\mathrm{d}y = 0} \tag{9}$$

sea una ecuación diferencial exacta, es que se cumpla la siguiente relación:

$$\boxed{\frac{\partial M(x,y)}{\partial y} = \frac{\partial N(x,y)}{\partial x}} \tag{10}$$

Demostración: △ Supongamos que la ecuación (9) es exacta. Entonces, tiene lugar la relación (8). Diferenciando la primer ecuación de (8) respecto a y y la segunda respecto a x, tenemos

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{\partial M(x, y)}{\partial y}, \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial N(x, y)}{\partial x} \tag{11}$$

lo cual demuestra la condición necesaria (10). Demostremos que en este caso la condición (10) es suficiente.

Dr. Juan Rosales García
Departamento de Ingeniería Eléctrica, DICIS-UGTO.

Integrando la primer expresión de (8) respecto a x, considerando a y como constante

$$f(x,\, y) = \int M(x,\, y)\mathrm{d}x + g(y) \tag{12}$$

donde $g(y)$ es la constante de integración que depende sólo de y. Elijamos la función $g(y)$, de tal manera que se cumpla la segunda expresión de (8). Para esto diferenciamos la ecuación (12) respecto a y, considerando a x constante

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial y} &= \frac{\partial}{\partial y}\left[\int M(x,\, y)\mathrm{d}x\right] + g'(y) = \\ &= \int \frac{\partial M}{\partial y}\mathrm{d}x + g'(y) \end{aligned} \tag{13}$$

Dr. Juan Rosales García
Departamento de Ingeniería Eléctrica, DICIS-UGTO.

Tomando en cuenta la relación (8), la expresión (13) toma la forma

$$\int \frac{\partial M}{\partial y}\mathrm{d}x + g'(y) = N(x,\, y) \tag{14}$$

Despejando $g'(y)$, se tiene

$$g'(y) = N(x,\, y) - \int \frac{\partial M}{\partial y}\mathrm{d}x \tag{15}$$

Integrando respecto a y, paraencontrar la función $g(y)$, resulta

$$g(y) = \int \left[N(x,\, y) - \int \frac{\partial M}{\partial y}\mathrm{d}x\right] dy \tag{16}$$

Sustituyendo el valor de $g(y)$, (16) en (12) se tiene

$$f(x,\, y) = \int M(x,\, y)\mathrm{d}x + \int \left[N(x,\, y) - \int \frac{\partial M}{\partial y}\mathrm{d}x \right] dy \tag{17}$$

Esta función debe igualarse a una constante, es decir $f(x, y) = c$, entonces

$$\int M(x,\, y)\mathrm{d}x + \int \left[N(x,\, y) - \int \frac{\partial M}{\partial y}\mathrm{d}x \right] dy = c \tag{18}$$

$\bigtriangledown$

Dr. Juan Rosales García
Departamento de Ingeniería Eléctrica, DICIS-UGTO.

Ecuaciones diferenciales reducibles a exactas: Factor integrante

Existen casos en los cuales la ecuación (9) no es una ecuación diferencial exacta. Sin embargo, en ciertas ocasiones, excepcionales, se puede encontrar una función $\mu(x, y)$ tal que multiplicada por la ecuación (9), ésta resulte ser una ecuación diferencial exacta. Supongamos que la ecuación (9) no es una ecuación exacta. Entonces, multiplicando dicha ecuación por una función $\mu(x, y)$, tenemos la ecuación

$$\boxed{\mu(x, y)M(x, y)\mathrm{d}x + \mu(x, y)N(x, y)\mathrm{d}y = 0} \qquad (19)$$

A la función $\mu(x, y)$ se le conoce con el nombre de factor integrante.

Si queremos que la ecuación (19) sea una ecuación exacta, ésta deberá satisfacer la condición necesaria y suficiente (10). En nuestro caso, para la ecuación (19) debe cumplirse la relación

$$\frac{\partial(\mu M)}{\partial y} = \frac{\partial(\mu N)}{\partial x} \tag{20}$$

O bien

$$N\frac{\partial \mu}{\partial x} - M\frac{\partial \mu}{\partial y} = \mu\left(\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}\right) \tag{21}$$

Esta ecuación la podemos escribir de la siguiente manera:

$$\frac{N}{\mu}\frac{\partial \mu}{\partial x} - \frac{M}{\mu}\frac{\partial \mu}{\partial y} = \left(\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}\right) \tag{22}$$

Finalmente, la escribiremos como

$$N\frac{\partial \ln|\mu|}{\partial x} - M\frac{\partial \ln|\mu|}{\partial y} = \frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x} \tag{23}$$

Hemos obtenido una ecuación en derivadas parciales. No existe un método general para encontrar factores integrantes $\mu = \mu(x, y)$. Por consiguiente, nos limitaremos a algunos casos particulares:

Dr. Juan Rosales García
Departamento de Ingeniería Eléctrica, DICIS-UGTO.

- Supongamos que el factor integrante depende solamente de x, esto es $\mu = \mu(x)$. En tal caso, la ecuación (23) toma la forma

$$\frac{\mathrm{d} \ln |\mu|}{\mathrm{d}x} = \frac{1}{N(x,\, y)} \left(\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x} \right) \tag{24}$$

Integrando, tenemos

$$\begin{aligned} \int \mathrm{d} \ln |\mu| &= \int \frac{\left(\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x} \right)}{N(x,\, y)} \mathrm{d}x \\ \mu(x) &= e^{\int \frac{\left(\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x} \right)}{N(x,\, y)} \mathrm{d}x} \end{aligned} \tag{25}$$

- El factor integrante depende solamente de y, es decir, $\mu = \mu(y)$. En tal caso, de (23) tenemos

$$\frac{\mathrm{d} \ln |\mu|}{\mathrm{d}y} = \frac{1}{M(x,\, y)} \left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y} \right) \tag{26}$$

Integrando, resulta

$$\begin{aligned} \int \mathrm{d} \ln |\mu| &= \int \frac{\left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y} \right)}{M(x,\, y)} \mathrm{d}y \\ \mu(y) &= e^{\int \frac{\left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y} \right)}{M(x,\, y)} \mathrm{d}y} \end{aligned} \tag{27}$$

Dr. Juan Rosales García
Departamento de Ingeniería Eléctrica, DICIS-UGTO.

Observación: en las ecuaciones (24) y (26) las funciones que aparecen a la izquierda de las ecuaciones se escriben como derivadas normales y no como parciales (parte derecha), esto es debido a que hemos restringido a la función μ a que sea una función, ya sea de x, o de y, respectivamente. Entonces, para hallar un factor integrante podemos usar las expresiones (25) y (27).

Ejemplo 1:

Resolver la ecuación

$$\left(2-\frac{y^2}{2x^2}\right)\mathrm{d}x+\frac{y}{x}\mathrm{d}y=0 \tag{28}$$

Solución: Esta ecuación no es homogénea. Por lo tanto veamos si es exacta. Para esto, debemos comprobar que se cumpla la relación $\frac{\partial M}{\partial y}=\frac{\partial N}{\partial x}$. Identificamos las funciones

$$M(x,\ y)=\left(2-\frac{y^2}{2x^2}\right), \qquad N(x,\ y)=\frac{y}{x} \tag{29}$$

Entonces

$$\frac{\partial M}{\partial y}=-\frac{y}{x^2}, \qquad \frac{\partial N}{\partial x}=-\frac{y}{x^2} \tag{30}$$

Lo que implica que la ecuación (28) es exacta.

Dr. Juan Rosales García
Departamento de Ingeniería Eléctrica, DICIS-UGTO.

Entonces, existe una función $f(x,y) = c$ que cumple las relaciones

$$\frac{\partial f}{\partial x} = M(x,y) \qquad y \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = N(x,y) \tag{31}$$

Ya que nosotros conocemos las $M(x,y)$ y $N(x,y)$, entonces, tenemos

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \left(2 - \frac{y^2}{2x^2}\right) \tag{32}$$

Integrando esta expresión respeto a x,

$$f(x,y)=\int\left(2-\frac{y^2}{2x^2}\right)dx+g(y) \tag{33}$$

donde $g(y)$ es una función que solo depende de la variable y. En la integral (33), la variable y se toma como constante, ya que la integración se hace respecto a x. Integrando, resulta

$$f(x,y)=2x+\frac{y^2}{2x}+g(y) \tag{34}$$

En esta ecuación no conocemos la función $g(y)$, pero la podemos encontrar usando la segunda condición en (31), es decir, derivamos respecto y la expresión (34) y la igualamos a la función $N(x,y)$

Dr. Juan Rosales García
Departamento de Ingeniería Eléctrica, DICIS-UGTO.

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial y} = \frac{y}{x} + \frac{dg}{dy} \tag{35}$$

Esto se debe igualar al valor de $N(x,y)$, esto es

$$\cancel{\frac{y}{x}} + \frac{dg}{dy} = \cancel{\frac{y}{x}} \;\rightarrow\; \frac{dg}{dy} = 0 \;\rightarrow\; g(y) = \text{constante} \tag{36}$$

Sustituyendo en la ecuación (34), resulta

$$2x + \frac{y^2}{2x} = c \tag{37}$$

ya que $f(x,y) = c$.

Ejemplo 2:

Hallar la solución general de la ecuación diferencial

$$2x(1+\sqrt{x^2-y})\mathrm{d}x - \sqrt{x^2-y}\,\mathrm{d}y = 0 \qquad (38)$$

Solución: Primero, identificaremos las funciones $M(x, y)$ y $N(x, y)$ y después veremos si se cumple la condición $\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$:

$$M(x, y) = 2x + 2x\sqrt{x^2-y}, \qquad N(x, y) = -\sqrt{x^2-y} \qquad (39)$$

Tomando las derivadas parciales, tenemos

$$\begin{aligned} \frac{\partial M}{\partial y} &= \frac{1}{2}2x(x^2-y)^{-1/2}(-1) = -x(x^2-y)^{-1/2} \\ \frac{\partial N}{\partial x} &= -\frac{1}{2}(x^2-y)^{-1/2}(2x) = -x(x^2-y)^{-1/2} \end{aligned} \qquad (40)$$

La condición

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x} \tag{41}$$

se cumple. Por lo tanto, la ecuación (38) es exacta. Entonces, existe una función $f(x, y)$, tal que

$$\frac{\partial f}{\partial x} = M(x, y) = 2x + 2x\sqrt{x^2 - y} \tag{42}$$

Integrando respecto a x, obtenemos

$$\begin{aligned} f(x, y) &= \int \left(2x + 2x\sqrt{x^2 - y}\right) \mathrm{d}x + g(y) \\ &= x^2 + \frac{2}{3}(x^2 - y)^{3/2} + g(y) \qquad (43) \end{aligned}$$

donde $g(y)$ es una función de y, esto es debido a que tenemos una integración en derivadas parciales.

El siguiente paso es tomar la derivada de la función $f(x,\ y)$ en (43) respecto a y, e igualar el resultado con la función $N(x,y)$, esto es

$$\frac{\partial f}{\partial y}=-\frac{2}{3}\frac{3}{2}(x^2-y)^{1/2}+g'(y)=N(x,\ y) \tag{44}$$

Luego

$$\frac{\partial f}{\partial y}=-(x^2-y)^{1/2}+g'(y)=-\sqrt{x^2-y} \tag{45}$$

De donde obtenemos la expresión $g'(y)=0$, la cual al integrar nos da una constante

$$g(y)=c \tag{46}$$

Sustituyendo (46) en (43), tenemos que la solución general de la ecuación (38), es

$$x^2 + \frac{2}{3}(x^2 - y)^{3/2} = c \tag{47}$$

Ejemplo 3:

Resolver la ecuación diferencial

$$(x^2 + y^2 + x)\mathrm{d}x + y\mathrm{d}y = 0 \tag{48}$$

Solución: Esta ecuación no es homogénea, así que veremos si es exacta. Identificando las funciones $M(x,\, y)$ y $N(x,\, y)$, se tiene

$$M(x,\, y) = x^2 + y^2 + x, \;\; N(x,\, y) = y \tag{49}$$

Primero, debemos comprobar si la ecuación (48) es o no exacta. Tenemos

$$\frac{\partial M}{\partial y} = 2y, \;\; \frac{\partial N}{\partial x} = 0 \tag{50}$$

Como vemos, no se cumple la condición $\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$

Por lo tanto, la ecuación (48) no es exacta. Veamos si podemos encontrar un factor integrante, tal que al multiplicarlo por la ecuación (48), ésta se transforme en exacta. Supongamos que el factor integrante depende solamente de x, esto es, $\mu(x, y) = \mu(x)$, entonces, según la teoría, tenemos

$$\frac{\mathrm{d} \ln|\mu|}{\mathrm{d}x} = \frac{1}{N}\left(\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}\right) = \frac{1}{N}\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{2y}{y} = 2 \quad (51)$$

Luego, integrando, resulta

$$\int \mathrm{d} \ln|\mu| = 2\int dx \quad (52)$$

La solución de estas integrales es trivial y tiene la forma

$$\ln|\mu| = 2x \;\rightarrow\; \mu(x) = e^{2x} \quad (53)$$

El siguiente paso es multiplicar la ecuación (48) por el factor integrante obtenido, esto es por $\mu(x) = e^{2x}$, tenemos

$$e^{2x}(x^2 + y^2 + x)\mathrm{d}x + e^{2x}y\mathrm{d}y = 0 \tag{54}$$

Analizaremos la ecuación (54), es decir, probemos que ésta es exacta. Tenemos las funciones

$$M(x,\ y) = e^{2x}(x^2 + y^2 + x),\ N(x, y) = ye^{2x} \tag{55}$$

Las derivadas parciales son

$$\frac{\partial M}{\partial y} = 2ye^{2x},\ \frac{\partial N}{\partial x} = 2ye^{2x} \tag{56}$$

Dr. Juan Rosales García
Departamento de Ingeniería Eléctrica, DICIS-UGTO.

En este caso la condición $\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$ se cumple. Por lo tanto, la ecuación (54) es exacta. Debido a que la ecuación (54) es una ecuación diferencial exacta, existe una función $f(x, y) = c$, tal que

$$\frac{\partial f}{\partial y} = N(x, y) = ye^{2x} \tag{57}$$

Integrando respecto a y, tenemos

$$f(x, y) = \int ye^{2x}\mathrm{d}y + g(x) = \frac{1}{2}y^2e^{2x} + g(x) \tag{58}$$

donde $g(x)$ es una función que depende sólo de x.

Dr. Juan Rosales García
Departamento de Ingeniería Eléctrica, DICIS-UGTO.

Ahora diferenciando respecto a x la ecuación (58) e igualando el resultado a la función $M(x, y)$ de (55), tenemos

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\cancel{2}}{\cancel{2}} y^2 e^{2x} + g'(x) = M(x, y) \tag{59}$$

O bien

$$y^2 e^{2x} + g'(x) = e^{2x}(x^2 + y^2 + x) \tag{60}$$

Finalmente, tenemos la ecuación

$$g'(x) = e^{2x}(x^2 + x) \tag{61}$$

Debemos integrar la ecuación (61) y de esta manera encontrar la función $g(x)$

$$\int g(x)\mathrm{d}x = \int x^2 e^{2x}\mathrm{d}x + \int xe^{2x}\mathrm{d}x \qquad (62)$$

Estas integrales se calculan por partes. Primero la segunda integral de la derecha en (62)

$$\int xe^{2x}\mathrm{d}x \to \Big\{u = x,\ \mathrm{d}u = \mathrm{d}x,\ \mathrm{d}v = e^{2x}\mathrm{d}x,$$

$$v = \frac{1}{2}e^{2x}\Big\} = \frac{x}{2}e^{2x} - \frac{1}{2}\int e^{2x}\mathrm{d}x = \frac{x}{2}e^{2x} - \frac{1}{4}e^{2x} \quad (63)$$

Dr. Juan Rosales García
Departamento de Ingeniería Eléctrica, DICIS-UGTO.

Para la primera integral (62), tenemos

$$\begin{aligned}\int x^2 e^{2x}\mathrm{d}x \rightarrow \Big\{ u = x^2\ \mathrm{d}u = 2x\mathrm{d}x,\ \mathrm{d}v = e^{2x}\mathrm{d}x \\ v = \frac{1}{2}e^{2x}\Big\} = \frac{x^2}{2}e^{2x} - \frac{2}{2}\int xe^{2x}\mathrm{d}x \\ = \frac{x^2}{2}e^{2x} - \left(\frac{1}{2}xe^{2x} - \frac{1}{4}e^{2x}\right) \\ = \left(\frac{x^2}{2} - \frac{x}{2} + \frac{1}{4}\right)e^{2x} \qquad (64)\end{aligned}$$

En esta integral hemos aprovechado el resultado obtenido anteriormente en (63).

Así que tenemos el valor de la función $g(x)$

$$
\begin{aligned}
g(x) &= \int (x^2 e^{2x} + x e^{2x}) \mathrm{d}x = \\
&= \left(\frac{x^2}{2} - \frac{x}{2} + \frac{1}{4} + \frac{x}{2} - \frac{1}{4} \right) e^{2x} = \frac{x^2}{2} e^{2x} \quad (65)
\end{aligned}
$$

Una vez encontrada la función $g(x)$, la sustituimos en la ecuación (58). Finalmente, obtenemos

$$
f(x,\, y) = \frac{y^2}{2} e^{2x} + \frac{x^2}{2} e^{2x} = c \tag{66}
$$

Donde c es la constante de integración. Este mismo resultado lo podemos escribir de la siguiente manera:

Dr. Juan Rosales García
Departamento de Ingeniería Eléctrica, DICIS-UGTO.

$$x^2 + y^2 = c_1 e^{-2x} \tag{67}$$

donde $c_1 = 2c$ es también una constante. Ésta es la solución general de la ecuación (54), y desde luego, también es la solución general de la ecuación (48), ya que, en principio son equivalentes las dos ecuaciones, pues hemos multiplicado toda la ecuación (48) por un mismo factor.

Ejercicios Propuestos

Dr. Juan Rosales García
Departamento de Ingeniería Eléctrica, DICIS-UGTO.

1. $(x + \sin y)dx + (x \cos y + \sin y)dy = 0$
2. $2xydx + (x^2 - y^2)dy = 0$
3. $\frac{y}{x}dx + (y^3 + \ln x)dy = 0$
4. $(x^2 + \sin y)dx + (1 + x \cos y)dy = 0$
5. $ye^x dx + (y + e^x)dy = 0$
6. $ydx - xdy + \ln xdy = 0$
7. $ydx - (x + y^2)dy = 0$
8. $(x^2 \cos x - y)dx + xdy = 0$
9. $(2xy + 3x^2)dx + x^2dy = 0$
10. $3x^2(1 + \ln y)dx - \left(2y - \frac{x^3}{y}\right)dy = 0$