Sesión 6: ED de primer orden

Dr. Juan Rosales García
Departamento de Ingeniería Eléctrica, DICIS-UGTO.

Competencias:

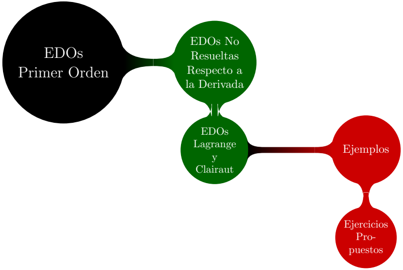
- Destreza para resolver ED no resueltas respecto a la derivada
- Resuelve ED de Lagrange y Clairaut.
- Aplica las EDOs de primer orden para encontrar trayectorias ortogonales.

Contenido:

Dr. Juan Rosales García
Departamento de Ingeniería Eléctrica, DICIS-UGTO.

Mapa Mental

Dr. Juan Rosales García
Departamento de Ingeniería Eléctrica,
DICIS-UGTO.



Ecuaciones diferenciales no resueltas respecto a la derivada

Dr. Juan Rosales García
Departamento de Ingeniería Eléctrica, DICIS-UGTO.

Hasta el momento hemos analizado diferentes tipos de ecuaciones diferenciales de primer orden, donde hemos supuesto que la ecuación es resuelta respecto a su derivada. Sin embargo, existen algunas ecuaciones en las cuales no es posible resolver respecto a su derivada, sino que pueden ser resueltas respecto a la función dependiente o a la variable independiente. En esta sección nos encargaremos de analizar este tipo de ecuaciones.

Dr. Juan Rosales García
Departamento de Ingeniería Eléctrica, DICIS-UGTO.

Sea dada la ecuación diferencial de primer orden

$$\boxed{F(x,\, y,\, y') = 0} \tag{1}$$

Esta ecuación la podemos resolver de dos maneras:

Resuelta respecto a la derivada: Resolviendo (1) respecto a la derivada obtenemos una ecuación del tipo

$$y' = f(x,\, y) \tag{2}$$

Diferentes tipos y métodos para obtener la solución de la ecuación (2) los hemos analizado en las secciones anteriores.

No resuelta respecto a la derivada. Supongamos que en la ecuación (1) no se puede despejar y', pero se puede despejar y, o x, es decir, que la ecuación (1) se puede escribir de las dos siguientes maneras:

$$\boxed{y = f(x,\, y') \qquad x = g(y,\, y')} \tag{3}$$

Primero, analizaremos la ecuación

$$\boxed{y = f(x,\, y')} \tag{4}$$

Para resolver esta ecuación introduzcamos el parámetro

$$p(x) = y' = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} \quad \rightarrow \quad \mathrm{d}y = p(x)\mathrm{d}x \tag{5}$$

De la ecuación (4), obtenemos

$$y = f(x,\, p) \tag{6}$$

Luego, obteniendo la diferencial total de esta ecuación

$$\mathrm{d}y = \frac{\partial f}{\partial x}\mathrm{d}x + \frac{\partial f}{\partial p}\mathrm{d}p \tag{7}$$

Sustituyendo, $\mathrm{d}y = p(x)\mathrm{d}x$, en la ecuación (7), tenemos

$$p(x)\mathrm{d}x = \frac{\partial f}{\partial x}\mathrm{d}x + \frac{\partial f}{\partial p}\mathrm{d}p \tag{8}$$

Luego, agrupando términos resulta la ecuación

$$\left[\frac{\partial f}{\partial x} - p(x)\right]\mathrm{d}x + \frac{\partial f}{\partial p}\mathrm{d}p = 0 \tag{9}$$

Esta ecuación es equivalente a tener la ecuación

$$M(x,\, p)\mathrm{d}x + N(x,\, p)\mathrm{d}p = 0 \tag{10}$$

Si la solución de la ecuación (10) está dada como

$$x = \phi(p,\, c) \tag{11}$$

entonces, haciendo uso de la expresión (6), obtenemos la solución de la ecuación original (4) en forma paramétrica

Dr. Juan Rosales García
Departamento de Ingeniería Eléctrica, DICIS-UGTO.

$$x = \phi(p,\ c), \qquad y = f(\phi(p)) \tag{12}$$

Analicemos la segunda ecuación de (3)

$$x = g(y,\ y') \tag{13}$$

La solución de esta ecuación es similar a la anterior. Sea

$$p(x) = y' = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} \tag{14}$$

Entonces, de (13), tenemos

$$x = g(y,\ p) \tag{15}$$

La diferencial total de esta ecuación es

$$\mathrm{d}x = \frac{\partial g}{\partial y}\mathrm{d}y + \frac{\partial g}{\partial p}\mathrm{d}p \tag{16}$$

Luego, de (14)

$$\mathrm{d}x = \frac{\mathrm{d}y}{p} \tag{17}$$

Sustituyendo en (16)

$$\frac{\mathrm{d}y}{p} = \frac{\partial g}{\partial y}\mathrm{d}y + \frac{\partial g}{\partial p}\mathrm{d}p \tag{18}$$

Agrupando términos, obtenemos

$$\left[\frac{\partial g}{\partial y} - \frac{1}{p}\right]\mathrm{d}y + \frac{\partial g}{\partial p}\mathrm{d}p = 0 \tag{19}$$

Esta ecuación es equivalente a la ecuación

$$M(y,\, p)\mathrm{d}y + N(y,\, p)\mathrm{d}p = 0 \tag{20}$$

Si la solución de esta ecuación es

$$y = \phi(p,\, c) \tag{21}$$

entonces, haciendo uso de la expresión (15), obtenemos la solución de la ecuación original (13) en forma paramétrica

$$y = \phi(p,\, c), \qquad x = g(\phi(p)) \tag{22}$$

Ejemplo 1:

Dr. Juan Rosales García
Departamento de Ingeniería Eléctrica,
DICIS-UGTO.

Resolver la ecuación

$$x = (y')^3 + y' \tag{23}$$

Solución: Introduciendo el parámetro $p = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$, entonces, tenemos la ecuación

$$x = p^3 + p \tag{24}$$

Tomando la diferencial total de esta ecuación

$$\mathrm{d}x = 3p^2\mathrm{d}p + \mathrm{d}p \tag{25}$$

Luego, de la expresión $p = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$, tenemos que $\mathrm{d}x = \frac{\mathrm{d}y}{p}$. Sustituyendo esta expresión en la ecuación (25)

$$\frac{\mathrm{d}y}{p} = 3p^2\mathrm{d}p + \mathrm{d}p \quad \rightarrow \quad \mathrm{d}y = (3p^3 + p)\mathrm{d}p \tag{26}$$

Integrando esta última expresión obtenemos la solución

Dr. Juan Rosales García
Departamento de Ingeniería Eléctrica, DICIS-UGTO.

$$\int \mathrm{d}y = \int (3p^3 + p)\mathrm{d}p \quad \rightarrow \quad 4y(p) = 3p^4 + 2p^2 + c \tag{27}$$

Entonces, la solución general de la ecuación (23) en forma paramétrica, es

$$4y(p) = 3p^4 + 2p^2 + c, \quad x(p) = p^3 + p \tag{28}$$

Ejemplo 2:

Dr. Juan Rosales García
Departamento de Ingeniería Eléctrica,
DICIS-UGTO.

Resolver la ecuación

$$x = \frac{1}{y'} + \ln y' \tag{29}$$

Solución: Introduciendo el parámetro

$$p = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} \tag{30}$$

la ecuación (29) se reduce a la ecuación paramétrica

$$x = \frac{1}{p} + \ln |p| \tag{31}$$

Tomando la derivada total, resulta

$$\mathrm{d}x = -\frac{1}{p^2}\mathrm{d}p + \frac{1}{p}\mathrm{d}p \tag{32}$$

Sustituyendo $\mathrm{d}x = \frac{\mathrm{d}y}{p}$ en (32), obtenemos

$$\frac{\mathrm{d}y}{p} = -\frac{1}{p^2}\mathrm{d}p + \frac{1}{p}\mathrm{d}p \quad \rightarrow \quad \mathrm{d}y = \left(-\frac{1}{p} + 1\right)\mathrm{d}p \tag{33}$$

Integrando

$$\int \mathrm{d}y = \int \left(-\frac{1}{p} + 1\right)\mathrm{d}p \quad \rightarrow \quad y = -\ln p + p + c \tag{34}$$

Finalmente, tenemos la solución general de la ecuación (29) en forma paramétrica

$$x = \frac{1}{p} + \ln p, \quad y = -\ln p + p + c \tag{35}$$

Ecuacion de Lagrange y Clairaut

Dr. Juan Rosales García
Departamento de Ingeniería Eléctrica, DICIS-UGTO.

Las ecuaciones de Lagrange y Clairaut son casos particulares de las ecuaciones no resueltas respecto a la derivada (3) y pueden resolverse mediante la introducción del parámetro p, como lo hicimos en la sección anterior.

Ecuación de Lagrange

Dr. Juan Rosales García
Departamento de Ingeniería Eléctrica, DICIS-UGTO.

Ecuación diferencial de Lagrange: Esta ecuación tiene la forma

$$\boxed{y = x\varphi(y') + \psi(y')} \tag{36}$$

Haciendo $y' = p$, diferenciando y sustituyendo $\mathrm{d}y$ por $p\mathrm{d}x$, esta ecuación se reduce a otra que considerando a x como función de p será lineal. Resolviendo esta última tendremos la solución $x = \phi(p,\, c)$, entonces, la solución general de la ecuación inicial en forma paramétrica es

$$\begin{aligned} x &= \phi(p,\, c) \\ y &= \phi(p,\, c)\varphi(p) + \psi(p) \end{aligned} \tag{37}$$

Ecuación de Clairaut

Dr. Juan Rosales García
Departamento de Ingeniería Eléctrica, DICIS-UGTO.

Ecuación diferencial de Clairaut: Esta tiene la forma

$$\boxed{y = xy' + \psi(y')} \tag{38}$$

El método de solución es el mismo que hemos usado anteriormente para la ecuación de Lagrange (36). La solución general de esta ecuación tiene la forma

$$y = cx + \psi(c) \tag{39}$$

Ejemplo 3:

Dr. Juan Rosales García
Departamento de Ingeniería Eléctrica, DICIS-UGTO.

Resolver la ecuación de Clairaut

$$y + xy' = 4\sqrt{y'} \tag{40}$$

Solución: Primero, introduciendo el parámetro $p = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$. La ecuación (40) se transforma en

$$y + xp = 4\sqrt{p} \tag{41}$$

Diferenciando esta ecuación respecto a x, tenemos

$$\mathrm{d}y + x\mathrm{d}p + p\mathrm{d}x = \frac{2}{\sqrt{p}}\mathrm{d}p \tag{42}$$

Sustituyendo $\mathrm{d}y$ por $p\mathrm{d}x$ en (42), tenemos la ecuación

$$p\mathrm{d}x + x\mathrm{d}p + p\mathrm{d}x = \frac{2}{\sqrt{p}}\mathrm{d}p \tag{43}$$

Ahora, dividiendo entre $\mathrm{d}p$, obtenemos

$$2p\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}p} + x - \frac{2}{\sqrt{p}} = 0 \tag{44}$$

Como podemos ver, la ecuación (44) es una ecuación lineal no homogénea respecto a x, la cual podemos escribir en la forma estándar

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}p} + \frac{1}{2p}x = p^{-3/2} \tag{45}$$

Para resolver esta ecuación usamos el método de variación del parámetro. Para esto, primero buscamos la solución a la ecuación homogénea

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}p} + \frac{1}{2p}x = 0 \tag{46}$$

No es difícil obtener la solución de esta ecuación. Separando variables e integrando, obtenemos

$$x_h(p) = cp^{-1/2} \tag{47}$$

Luego, busquemos la solución particular de la ecuación (45). Supongamos la solución particular

$$x_p(p) = c(p)p^{-1/2} \tag{48}$$

Tomando la derivada respecto a p, resulta

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}p} = c'(p)p^{-1/2} - \frac{1}{2}p^{-3/2} \tag{49}$$

Sustituyendo en (45), obtenemos

$$c'p^{-1/2} - \frac{1}{2}cp^{-3/2} + \frac{1}{2p}cp^{-1/2} = p^{-3/2} \tag{50}$$

Eliminando los términos segundo y tercero de la parte izquierda de la ecuación (50). Obtenemos la integral

$$c(p) = \int \frac{\mathrm{d}p}{p} = \ln|p| \tag{51}$$

Sustituyendo $c(p)$ en (48), la solución particular tiene la forma

$$x_p(p) = \frac{\ln|p|}{\sqrt{p}} \tag{52}$$

La solución general de la ecuación (40), resulta ser

$$x(p) = x_h + x_p = \frac{c}{\sqrt{p}} + \frac{\ln|p|}{\sqrt{p}} \tag{53}$$

Por otro lado, sustituyendo (53) en la relación (41), tenemos

$$y = \sqrt{p}(4 - \ln|p| - c) \tag{54}$$

Entonces, tenemos que la solución general de la ecuación (40) está dada en forma paramétrica

$$\begin{aligned} x(p) &= \frac{c}{\sqrt{p}} + \frac{\ln|p|}{\sqrt{p}} \\ y(p) &= \sqrt{p}(4 - \ln|p| - c) \end{aligned} \tag{55}$$

Ejemplo 4:

Dr. Juan Rosales García
Departamento de Ingeniería Eléctrica, DICIS-UGTO.

Resolver la ecuación de Lagrange

$$y = x(y')^2 - y' \tag{56}$$

Solución: Introduciendo el parámetro $p = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$. Sustituyendo en la ecuación (56)

$$y = xp^2 - p \tag{57}$$

Tomando la diferencial de esta ecuación y sustituyendo $\mathrm{d}y$ por $p\mathrm{d}x$, resulta

$$p\mathrm{d}x = p^2\mathrm{d}x + 2xp\mathrm{d}p - \mathrm{d}p \tag{58}$$

Agrupando términos

$$p(1-p)\mathrm{d}x = (2xp-1)\mathrm{d}p \tag{59}$$

Escribiendo esta ecuación de la siguiente manera:

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}p} + \frac{2}{p-1}x = \frac{1}{p(p-1)} \tag{60}$$

ésta es una ecuación lineal no homogénea respecto a x. Esta ecuación la vamos a resolver con el método del factor integrante. Para esto, definamos

$$\mu(p) = e^{\int \frac{2}{p-1}\mathrm{d}p} = e^{\ln(p-1)^2} = (p-1)^2 \tag{61}$$

Entonces

$$\mathrm{d}\left[x(p-1)^2\right] = \frac{(p-1)^2}{p(p-1)}\mathrm{d}p = \frac{p-1}{p}\mathrm{d}p \tag{62}$$

Dr. Juan Rosales García
Departamento de Ingeniería Eléctrica, DICIS-UGTO.

Integrando, tenemos

$$\int \mathrm{d}\left[x(p-1)^2\right] = \int \frac{p-1}{p}\mathrm{d}p \tag{63}$$

$$x(p-1)^2 = p - \ln|p| + c \to x(p) = \frac{p - \ln|p| + c}{(p-1)^2}$$

Entonces, el resultado final es

$$\begin{aligned} y(p) &= xp^2 - p \\ x(p) &= \frac{p - \ln|p| + c}{(p-1)^2} \end{aligned} \tag{64}$$

Trayectorias ortogonales

Un problema general de naturaleza geométrico es hallar curvas que intersecten las curvas de una familia dada y en una forma deseada. Tales curvas se llaman *trayectorias*. En particular, cuando las trayectorias cortan las curvas dadas en un ángulo constante, se denominan *trayectorias isogonales*, si el ángulo es recto (es decir, de 90^0) las trayectorias se llaman *trayectorias ortogonales*.

De la geometría euclidiana, sabemos que dos curvas son perpendiculares entre sí en un punto dado, si las pendientes m_1 y m_2 de las rectas tangentes a las curvas en ese punto cumplen la relación

$$m_1 m_2 = -1 \qquad \rightarrow \qquad m_1 = -\frac{1}{m_2} \tag{65}$$

Dr. Juan Rosales García
Departamento de Ingeniería Eléctrica, DICIS-UGTO.

Por otro lado, sabemos que la derivada es igual a la pendiente m. Entonces, la ecuación diferencial de las trayectorias ortogonales a la familia de curvas dadas es fácil de obtener. Sea $y(x)$ una familia de curvas dada por la ecuación diferencial

$$\boxed{F(x,\, y,\, y') = 0} \tag{66}$$

Dr. Juan Rosales García
Departamento de Ingeniería Eléctrica, DICIS-UGTO.

Entonces, la expresión

$$\boxed{F(x,\, y,\, -\tfrac{1}{y'}) = 0} \tag{67}$$

será la ecuación diferencial de las trayectorias ortogonales a $y(x)$. En otras palabras, basta reemplazar y' por $-\frac{1}{y'}$ en la ecuación dada, para obtener la ecuación de las trayectorias ortogonales. Las trayectorias ortogonales se encuentran, por ejemplo, cuando se estudia una corriente plana de un líquido.

Ejemplo 5:

Dr. Juan Rosales García
Departamento de Ingeniería Eléctrica,
DICIS-UGTO.

Hallar las trayectorias ortogonales a la familia de curvas dada por la ecuación

$$x^2 + y^2 = R^2 \tag{68}$$

Solución: Tomando la derivada respecto a x, tenemos

$$2x\mathrm{d}x + 2y\mathrm{d}y = 0 \quad \rightarrow \quad \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = -\frac{x}{y} \tag{69}$$

ésta es la ecuación diferencial que representa a la familia de curvas dada por (68). Ahora, reemplazando y' por $-\frac{1}{y'}$, en la segunda ecuación de (69), tenemos

$$-\frac{1}{y'} = -\frac{x}{y} \quad \rightarrow \quad \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{y}{x} \tag{70}$$

Esta última ecuación representa la ecuación diferencial de la familia de curvas que es ortogonal a (68). Esta ecuación se puede resolver con el método de variables separables

$$\frac{\mathrm{d}y}{y} = \frac{\mathrm{d}x}{x} \tag{71}$$

La solución general está dada por

$$y = cx \tag{72}$$

Así, hemos encontrado una familia de curvas dada por la ecuación (72) que es ortogonal a la familia de curvas representada por (68), figura 1.

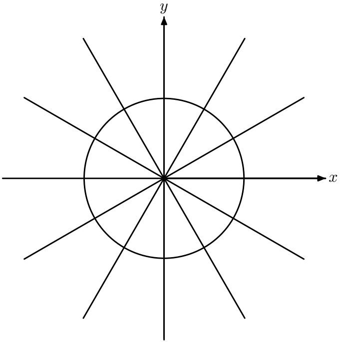


Figure: Gráfica de la solución (72)

Ejemplo 6:

Dr. Juan Rosales García
Departamento de Ingeniería Eléctrica, DICIS-UGTO.

Hallar las trayectorias ortogonales a la familia de curvas dadas por la ecuación

$$x^2 + \frac{1}{2}y^2 = a^2, \quad a = \text{constante}. \tag{73}$$

Solución: Diferenciando la ecuación (73) respecto a x, tenemos

$$2x + y\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = 0 \qquad \rightarrow \qquad \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = -\frac{2x}{y} \tag{74}$$

Luego, reemplazando en (74) y' por $-\frac{1}{y'}$

$$-\frac{1}{y'} = -\frac{2x}{y} \quad \rightarrow \quad \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{y}{2x} \tag{75}$$

Dr. Juan Rosales García
Departamento de Ingeniería Eléctrica, DICIS-UGTO.

Separando variables e integrando

$$\int \frac{\mathrm{d}y}{y} = \frac{1}{2}\int \frac{\mathrm{d}x}{x} \tag{76}$$

Obtenemos

$$\ln|y| = \frac{1}{2}\ln x + \ln c \qquad \rightarrow \qquad \ln\left|\frac{y}{c\sqrt{x}}\right| = 0 \tag{77}$$

De donde es fácil obtener el resultado final

$$y = cx^{1/2} \tag{78}$$

Esta ecuación representa la familia de curvas ortogonales a la familia dada en (73).

Ejercicios Propuestos

Dr. Juan Rosales García
Departamento de Ingeniería Eléctrica, DICIS-UGTO.

1. $x = (y')^2 + y'$
2. $x = y'\sqrt{(y')^2 + 1}$
3. $y'(x - \ln y') = 1$
4. $(y')^2 - 2xy' = x^2 - 4y$
5. $y = 2xy' + y^2(y')^2$
6. $y = xy' - (y')^2$
7. $xy' - y = \ln y'$
8. $xy'(y' + 2) = y$
9. $y = x(y')^2 - 2(y')^2$
10. $2(y')^2(y - xy') = 1$