Sesión 7. Aplicaciones de las EDOs de Primer Orden

Dr. J. Juan Rosales García
Departamento de Ingeniería Eléctrica, DICIS-UGTO.

Competencias:

- Desarrolla habilidades en el planteamiento de problemas físicos.
- Analiza los resultados obtenidos de un problema físico.
- Identifica poribles errores en el modelado.

Cada día nos encontramos con fenómenos donde hay cambios de temperatura; un pastel que sacamos del horno a una temperatura T, una taza de café caliente, alimentos acabados de cocinar, etc. Nos preguntamos ¿cómo podemos saber de qué manera cambia la temperatura de cada uno de estos cuerpos? Hasta el momento, sabemos que cualquier cosa que cambie, la podemos modelar mediante una ecuación diferencial, por lo tanto, lo más probable es que la pregunta planteada la podamos modelar con una ecuación diferencial. Podemos plantear la pregunta en forma general.

Problema 1: Ley de enfriamiento de Newton

Dr. J. Juan Rosales García
Departamento de Ingeniería Eléctrica, DICIS-UGTO.

Supongamos que en el tiempo $t = 0$ un cuerpo tiene una temperatura inicial $T(0) = T_0$, en este instante lo colocamos en el medio ambiente que tiene una temperatura T_m. Nos preguntamos, ¿cómo cambiará la temperatura del cuerpo conforme el tiempo pasa?

Solución:

- Sea $T(t)$ la temperatura del cuerpo en un cierto tiempo $t > 0$.
- Supongamos que no existe otro cuerpo con el cual haya intercambio de calor.
- la temperatura del medio ambiente T_m cambia muy lento, que se considera contsante.

Bajo estas condiciones podemos pensar que la rapidez con que cambia la temperatura del cuerpo es proporcional a la diferencia de temperaturas del cuerpo y el medio ambiente. Es decir

$$\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}t} \propto T(t) - T_m \tag{1}$$

Esto parece lógico, ya que llegará el momento en que la temperatura del cuerpo y el medio ambiente serán las mismas, es decir, $T(t) = T_m$ y de la expresión (1) la velocidad de cambio será proporcional a cero y por consiguiente la temperatura del sistema cuerpo-medio ambiente será proporcional a una constante. Para escribir la ecuación (1) en forma de igualdad, debemos introducir una constante de proporcionalidad. Entonces, el modelo matemático está dado por la ecuación

$$\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}t} = -\alpha\,(T(t) - T_m) \tag{2}$$

donde $\alpha > 0$ es la constante de proporcionalidad (la cual depende de la estructura molecular del cuerpo).

El signo menos en la parte derecha de la ecuación (2) corresponde a los siguientes razonamientos; si $T(t) - T_m > 0, \rightarrow T(t) > T_m$, entonces la temperatura del cuerpo decae (se enfría) y por consiguiente, su rapidez de cambio es negativa, por otro lado, si $T(t) - T_m < 0, \rightarrow T(t) < T_m$, entonces la temperatura del cuerpo crece (se calienta) y por lo tanto, la rapidez de cambio es positiva. De esta manera, el proceso de calentamiento (enfriamiento) de un cuerpo en un medio ambiente con temperatura constante se modela bastante bien con la ecuación diferencial (2). La ley (2) fue establecida por Isaac Newton y concuerda bastante bien con los datos experimentales. Desde el punto de vista físico el problema planteado está resuelto.

Ahora el problema se traduce a un problema matemático, y es aquí donde se aplican los métodos de solución de las ecuaciones diferenciales. Como podemos ver, en la ecuación (2) el tiempo t es la variable independiente y la temperatura $T(t)$ es la función dependiente. La ecuación (2) es una ecuación diferencial ordinaria de primer orden y de variables separables, esto es

$$\frac{\mathrm{d}T}{T(t) - T_m} = -\alpha \mathrm{d}t \tag{3}$$

Como la temperatura del medio ambiente T_m se supone constante durante todo el proceso, entonces la ecuación (3) es fácil de integrar

$$\int \frac{\mathrm{d}T}{T(t) - T_m} = -\alpha \int \mathrm{d}t \to \ln|T(t) - T_m| = -\alpha t + c \tag{4}$$

Para hallar el valor de la constante c, usamos las condiciones iniciales del problema, esto es, en el instante $t = 0$, el cuerpo tenía una temperatura inicial T_0. Poniendo estas condiciones en la última ecuación de (4), tenemos

$$\ln|T_0 - T_m| = -\alpha \cdot 0 + c \ \rightarrow \ c = \ln|T_0 - T_m| \tag{5}$$

Sustituyendo este resultado en (4), resulta

$$\ln |T(t) - T_m| = -\alpha t + \ln |T_0 - T_m| \qquad (6)$$

Por último, aplicando las propiedades de los logaritmos obtenemos cómo cambia la temperatura del cuerpo con el tiempo

$$T(t) = T_m + (T_0 - T_m)e^{-\alpha t} \qquad (7)$$

De la expresión (7),

$$T(t) = T_m + (T_0 - T_m)e^{-\alpha t} \tag{8}$$

observamos que cuando el tiempo es suficientemente grande (podemos poner $t \to \infty$), el exponente tiende a cero y, por consiguiente, la temperatura $T(t)$ del cuerpo tiende a la temperatura del medio, es decir, $T(t) \to T_m$, cuando $t \to \infty$. De la solución (7), también se deduce que cuando $t \to 0$, entonces $T(0) \to T_0$. Los resultados son los esperados, por lo tanto el problema queda resuelto.

Problema 2: Circuito RL

Establecer el modelo matemático para el circuito RL, ver figura. Resolver la ED para los casos: $E(t) = E_0$ y $E(t) = E_0 \cos \omega t$.

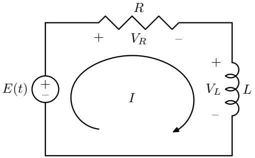

Figure: Circuito RC

Solución:

Dr. J. Juan Rosales García
Departamento de Ingeniería Eléctrica, DICIS-UGTO.

Nuestro sistema consta de una resistencia R y una inductancia L. Entonces, por la ley de Kircchoff, tenemos que la suma de las caídas de voltaje debe ser igual a la fuerza electromotriz $E(t)$. La ecuación que modela a este sistema tiene la forma

$$L\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t} + RI = E(t) \tag{9}$$

Debemos hallar la corriente en el sistema como función del tiempo, esto es $I(t)$.

Primer caso: para $E(t) = \mathrm{constante} = E_0$ tenemos la ecuación

$$L\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t} + RI = E_0 \tag{10}$$

Esta misma ecuación la podemos escribir como

$$\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t} + \alpha I = A \tag{11}$$

donde, $\alpha = R/L$ y $A = E_0/L$. Esta ecuación la resolveremos usando el método del factor integrante. El factor integrantes es

$$\mu(t) = e^{\int P(t)\mathrm{d}t} = e^{\alpha \int \mathrm{d}t} = e^{\alpha t} \tag{12}$$

Luego, tenemos

$$\mathrm{d}(Ie^{\alpha t}) = Ae^{\alpha t}\mathrm{d}t \quad \rightarrow \quad \int \mathrm{d}(Ie^{\alpha t}) = A\int e^{\alpha t}\mathrm{d}t \tag{13}$$

Integrando, resulta

$$Ie^{\alpha t} = \frac{A}{\alpha}e^{\alpha t} + c \quad \rightarrow \quad I(t) = \frac{A}{\alpha} + ce^{-\alpha t} \tag{14}$$

Tomando en cuenta que $\frac{A}{\alpha} = \frac{E_0}{R}$, esta solución se expresa como

$$I(t) = \frac{E_0}{R} + ce^{-\alpha t} \tag{15}$$

Sustituyendo las condiciones iniciales $I(0) = 0$, obtenemos el valor de la constante de integración c

$$0 = \frac{E_0}{R} + c \quad \rightarrow \quad c = -\frac{E_0}{R} \tag{16}$$

Sustituyendo en (15), finalmente tenemos

$$I(t) = \frac{E_0}{R}\left(1 - e^{-\frac{R}{L}t}\right) = \frac{E_0}{R}\left(1 - e^{-\frac{t}{\tau_L}}\right) \tag{17}$$

donde se ha introducido la constante $\tau_L = \frac{L}{R}$ conocida como constante inductiva de tiempo del circuito.

Observando la ecuación (17), vemos que a un tiempo suficientemente grande $t \to \infty$ el segundo término de la derecha $e^{-(R/L)t} \to 0$, y como consecuencia la corriente en (17) tiende a un valor constante, éste es $I(t) \to E_0/R$. Este valor constante es el que tendría de inmediato (ley de Ohm) si no hubiera un inductor en el circuito, el límite es independiente de las condiciones iniciales.

Segundo caso: para $E(t) = E_0 \cos \omega t$, de la ecuación (9), tenemos

$$L\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t} + RI = E_0 \cos \omega t \tag{18}$$

Se pide hallar la corriente I en un tiempo t después de haber conectado el circuito si la fuerza electromotriz es $E(t) = E_0 \cos \omega t$.
La ecuación (18), la escribimos de la siguiente manera

$$\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t} + \alpha I = \beta \cos \omega t \tag{19}$$

donde, por comodidad, $\alpha = R/L$ y $\beta = E_0/L$. La ecuación (19) es una ecuación diferencial lineal no homogénea de primer orden respecto a la corriente I.

Primero, debemos hallar la solución correspondiente a la ecuación homogénea de (19), tenemos

$$\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t} + \alpha I = 0 \tag{20}$$

Esta ecuación homogénea es de variables separables

$$\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t} = -\alpha I \quad \rightarrow \quad \int \frac{\mathrm{d}I}{I} = -\alpha \int \mathrm{d}t \quad \rightarrow \quad \ln\left(\frac{I}{c}\right) = -\alpha \tag{21}$$

donde c es la constante de integración. Este resultado lo podemos escribir como

$$I_h(t) = ce^{-\alpha t} \tag{22}$$

Ahora busquemos una solución particular de la ecuación (19). Por la forma de la parte derecha supongamos la siguiente solución particular (*método de los coeficientes indeterminados*)

$$I_p(t) = A\cos\omega t + B\sin\omega t \tag{23}$$

Derivando esta ecuación

$$\frac{\mathrm{d}I_p}{\mathrm{d}t} = -A\omega\sin\omega t + B\omega\cos\omega t \tag{24}$$

Sustituyendo (23) y (24) en (19) tenemos

$$-A\omega\sin\omega t + B\omega\cos\omega t + \alpha A\cos\omega t + \alpha B\sin\omega t = \beta\cos\omega t \tag{25}$$

Igualando los términos, encontramos que esta igualdad se cumple, siempre y cuando se cumplan las expresiones

$$\begin{aligned} B\omega + \alpha A &= \beta \\ -A\omega + \alpha B &= 0 \end{aligned} \tag{26}$$

Resolviendo estas ecuaciones, obtenemos los valores de A y B, esto es

$$A = \frac{\alpha\beta}{\omega^2 + \alpha^2}, \qquad B = \frac{\omega\beta}{\omega^2 + \alpha^2} \tag{27}$$

Sustituyendo estos valores en la solución particular (23), tenemos

$$I_p(t) = \frac{\alpha\beta}{\omega^2 + \alpha^2} \cos \omega t + \frac{\omega\beta}{\omega^2 + \alpha^2} \sin \omega t \tag{28}$$

Dr. J. Juan Rosales García Departamento de Ingeniería Eléctrica, DICIS-UGTO.

La solución general de la ecuación (19) será $I(t) = I_h(t) + I_p(t)$, ésta tiene la forma

$$I(t) = ce^{-\alpha t} + \frac{E_0}{L(\omega^2 + \alpha^2)} \left[\alpha \cos \omega t + \omega \sin \omega t\right] \quad (29)$$

donde hemos sustituido el valor de $\beta = E_0/L$. La constante c la encontramos de las condiciones iniciales, cuando $t = 0$, $I = 0$

$$0 = c + \frac{\alpha E_0}{L(\omega^2 + \alpha^2)} \;\rightarrow\; c = -\frac{\alpha E_0}{L(\omega^2 + \alpha^2)} \quad (30)$$

Sustituyendo el valor de la constante de integración en la ecuación (29), finalmente, tenemos

$$I(t) = \frac{E_0}{L(\omega^2 + \alpha^2)} \left[\alpha \cos \omega t + \omega \sin \omega t - \alpha e^{-\alpha t}\right] \quad (31)$$

ésta es la solución particular (en el sentido, de que se ha obtenido de la solución general). Si $t \to \infty$, entonces, $e^{-\alpha t} \to 0$ y de (31) se sigue que

$$I(t) \approx \frac{E_0}{L(\omega^2 + \alpha^2)} \left(\alpha \cos \omega t + \omega \sin \omega t\right) \quad (32)$$

Problema 3: Circuito RC

Dr. J. Juan Rosales García
Departamento de Ingeniería Eléctrica, DICIS-UGTO.

Establecer el modelo matemático para un circuito RC, figura 2 y hallar la corriente del circuito para los casos: $E(t) = \mathrm{constante} = E_0$ y $E(t) = E_0 \sin \omega t$.

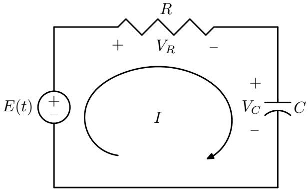

Figure: Circuito RC.

Solución:

Tenemos un circuito que consta de un resistor con resistencia R y un capacitor con una capacitancia C, figura abajo. Entonces, por la ley de Kirchhoff se tiene la ecuación

$$RI + \frac{1}{C}q = E(t) \tag{33}$$

Derivando esta ecuación respecto al tiempo obtenemos la ecuación para la corriente $I(t)$

$$R\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t} + \frac{1}{C}I = \frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}t} \tag{34}$$

la cual podemos escribir como

$$\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t} + \alpha I = \frac{1}{R}\frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}t}, \text{ donde } \alpha = \frac{1}{RC} \tag{35}$$

Primer caso: tenemos $E(t) = E_0$, donde E_0 es constante, entonces

$$\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t} + \alpha I = 0 \tag{36}$$

ésta es una ecuación con variables separables, integrando obtenemos la solución general

$$I(t) = ce^{-\frac{t}{RC}} = ce^{-\frac{t}{\tau_C}} = I_0 e^{-\frac{t}{\tau_C}} \tag{37}$$

donde $\tau_C = RC$ es la *constante capacitiva* de tiempo del circuito y se eligió la condición inicial $I(0) = I_0$, figura 3.

Dr. J. Juan Rosales García Departamento de Ingeniería Eléctrica, DICIS-UGTO.

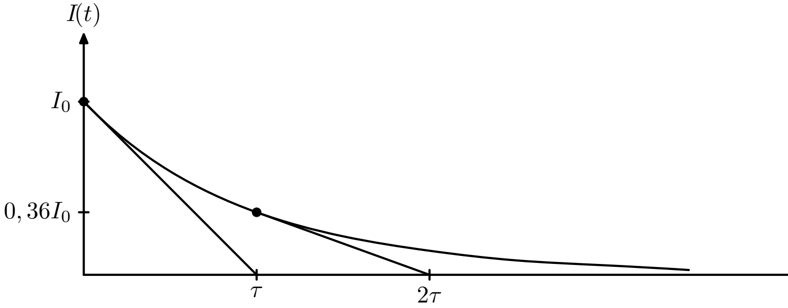

Figure: Corriente en un circuito RC debida a una fuerza electromotriz constante.

Segundo caso: para este caso, tenemos $E(t) = E_0 \sin \omega t$. Sustituyendo en la ecuación (35), obtenemos

$$\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t} + \alpha I = \beta \cos \omega t \tag{38}$$

donde $\alpha = 1/RC$ y $\beta = E_0\omega/R$. Esta ecuación es similar a la ecuación (19), excepto por la constante β. Entonces, tenemos la solución general

$$I(t) = ce^{-\frac{t}{\tau_C}} + \frac{E_0\omega}{[1 + (RC\omega)^2]}\left(R\omega C \sin \omega t + \cos \omega t\right) \tag{39}$$

Problema 4: Carga de un condensador

Un condensador de capacitancia C se conecta a un circuito con un voltaje E_0 y resistencia R. Hallar la carga q en el condensador en un tiempo t.

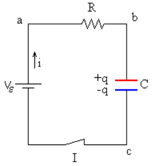

Figure: Carga de un condensador

Solución:

Dr. J. Juan Rosales García
Departamento de Ingeniería Eléctrica, DICIS-UGTO.

En el tiempo t la carga del condensador es q y la corriente es I. En el circuito actúa la fuerza electromotriz E_0, entonces por la ley de Kirchhoff tenemos la ecuación

$$RI + \frac{1}{C}q = E(t) \tag{40}$$

Tomando en cuenta la relación $I(t) = \frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t}$, la ecuación (40) se escribe como

$$\frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t} + \frac{1}{CR}q = \frac{E_0}{R} \tag{41}$$

Esta ecuación es lineal no homogénea respecto a q.

Hallemos la solución de la ecuación homogénea correspondiente a (41)

$$\frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t} + \frac{1}{CR}q = 0 \quad \rightarrow \quad \int \frac{\mathrm{d}q}{q} = -\frac{1}{CR}\int dt \tag{42}$$

Integrando, resulta

$$\ln|q| = -\frac{t}{CR} + \ln c_1 \quad \rightarrow \quad q(t) = c_1 e^{-t/RC} \tag{43}$$

La solución particular de (41) la buscamos de la forma

$$q_p = A \quad \rightarrow \quad \frac{\mathrm{d}q_p}{\mathrm{d}t} = 0 \tag{44}$$

Dr. J. Juan Rosales García
Departamento de Ingeniería Eléctrica, DICIS-UGTO.

Sustituyendo en (41) para hallar la constante A, tenemos

$$\frac{A}{CR} = \frac{E_0}{R} \quad \rightarrow \quad A = CE_0 \tag{45}$$

Poniendo el valor de A en la solución particular, resulta

$$q_p = CE_0 \tag{46}$$

La solución general de la ecuación original (41) será la suma de las soluciones; homogénea q_h y particular q_p, esto es

$$q(t) = c_1 e^{-t/CR} + CE_0 \tag{47}$$

Apliquemos las condiciones iniciales para encontrar la constante de integración c_1. Si para $t = 0$ la carga en el condensador es cero, $q = 0$, entonces, sustituyendo en (47), obtenemos para la constante

$$0 = c_1 + CE_0 \quad \rightarrow \quad c_1 = -CE_0 \tag{48}$$

Poniendo el valor de c_1 en (47), obtenemos el resultado final

$$q(t) = -CE_0 e^{-t/CR} + E_0 C \quad \rightarrow \quad q(t) = E_0 C \left(1 - e^{-t/CR}\right) \tag{49}$$

Esta expresión representa la solución del problema. Ahora bien, de la ecuación (49) resulta que para $t = 0$, la carga en el condensador es $q(t) = 0$, esto está en completo acuerdo, pues antes de conectar el circuito no existe carga alguna en el condensador. Cuando $t \rightarrow \infty$, la carga en el condensador es $q(t) \rightarrow CE_0$.

Supóngase que ahora deseamos conocer la razón de flujo de la carga por unidad de tiempo, o mejor dicho, conocer la corriente I que circula por el circuito. La expresión matemática que representa a la corriente I, dada la carga q, es

$$I(t) = \frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t} \tag{50}$$

Para obtener la corriente es necesario tomar la derivada respecto al tiempo en la expresión (49)

$$I(t) = \frac{E_0}{R} e^{-t/RC} \tag{51}$$

Dr. J. Juan Rosales García
Departamento de Ingeniería Eléctrica, DICIS-UGTO.

De la ecuación (51) observamos que cuando $t \to 0$ tenemos que $I(t) \to E_0/R$, ésta es la máxima corriente en el circuito que se alcanza justamente cuando el circuito se conecta, después la corriente está gobernada por la expresión (51).
El producto RC que aparece en el exponente de las ecuaciones (49) y (51) tiene unidades de tiempo, ya que el exponente es adimensional (sin unidades). Al producto RC se le conoce como constante de tiempo capacitiva y se representa por τ_C, esta cantidad determina la razón con la cual el condensador se carga.

Problema 5: Presión atmosférica

Dr. J. Juan Rosales García Departamento de Ingeniería Eléctrica, DICIS-UGTO.

La experiencia nos muestra que la presión del aire (presión atmosférica) depende de la altura h. Si representamos a la presión como P, entonces la dependencia de P respecto a la altura h estará dada por la función

$$P = P(h) \tag{52}$$

Nos preguntamos, ¿cuál es la relación entre la presión y la altura?

Solución:

Para resolver el problema planteado imaginemos una pequeña porción de aire de forma cilíndrica, de altura Δh y base S, figura

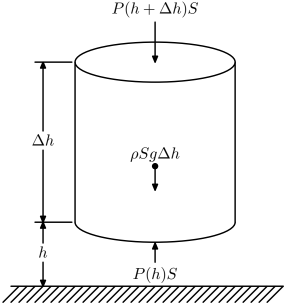

Figure: Diagrama del cilindro representando una porción de aire.

De la figura podemos ver que sobre el cilindro actúan tres fuerzas;

- El peso del cilindro dado por

$$p = g\Delta m = \rho g \Delta V = g\rho S \Delta h$$

  donde Δm es el elemento de masa, $\Delta V = Sdh$ es el elemento de volumen, g es la constante de la gravedad y ρ es la densidad del aire. Esta fuerza (el peso) está dirigida verticalmente hacia abajo.
- La presión del aire que actúa en la base superior y dirigida hacia abajo, figura $P(h + \Delta h)S$
- La presión del aire que actúa en la base inferior y dirigida verticalmente hacia arriba

$$SP(h)$$

Si consideramos que no hay corrientes de aire, entonces estas tres fuerzas deben estar balanceadas. De estas consideraciones, tenemos

$$\rho S g \Delta h + P(h + \Delta h) S = P(h) S \tag{53}$$

eliminando S, resulta

$$\rho g \Delta h + P(h + \Delta h) = P(h) \tag{54}$$

Esta misma ecuación la podemos escribir como

$$\frac{P(h + \Delta h) - P(h)}{\Delta h} = -\rho g \tag{55}$$

Haciendo $\Delta h \to 0$, tenemos la expresión

$$\lim_{\Delta h \to 0} \frac{P(h + \Delta h) - P(h)}{\Delta h} = \frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}h} \tag{56}$$

Igualando las expresiones (55) y (56) se tiene la ED

$$\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}h} = -g\rho \tag{57}$$

Por otro lado, sabemos que la densidad ρ de los gases es proporcional a la presión P, esto es

$$\rho = \alpha P \tag{58}$$

donde α es una constante de proporcionalidad que depende del tipo de gas. Poniendo este valor en (57), resulta

$$\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}h} = -\alpha g P \tag{59}$$

Esta ecuación nos da la dependencia de la presión P en función de la altura h, por lo tanto, responde al problema planteado (bajo las condiciones de que no hay corrientes de aire). Ahora el problema se traduce en un problema matemático, es decir, en resolver la ecuación diferencial (59). Como podemos ver, esta ecuación es de variables separables. Por consiguiente, separando las variables e integrando

$$\int \frac{\mathrm{d}P}{P} = -\alpha g \int \mathrm{d}h \tag{60}$$

obtenemos

$$\ln|P| = -\alpha g h + \ln|c| \quad \to \quad P(h) = c e^{-\alpha g h} \tag{61}$$

Para determinar el valor de la constante de integración c, vamos a considerar que la presión atmosférica en la superficie de la Tierra (esto es cuando $h = 0$), es P_0. Sustituyendo estas condiciones en la segunda ecuación de (61), encontramos

$$c = P_0 \tag{62}$$

Sustituyendo este valor en la segunda ecuación de (61) tenemos, finalmente, el resultado

$$P(h) = P_0 e^{-\alpha g h} \tag{63}$$

el cual nos indica que la presión atmosférica decae exponencialmente conforme la altura aumenta y cuando $h \to \infty$, la presión $P \to 0$.

Esto parece lógico, ya que después de cierta altura h, estaríamos fuera de la atmósfera terrestre y por lo tanto, la presión atmosférica será cero.

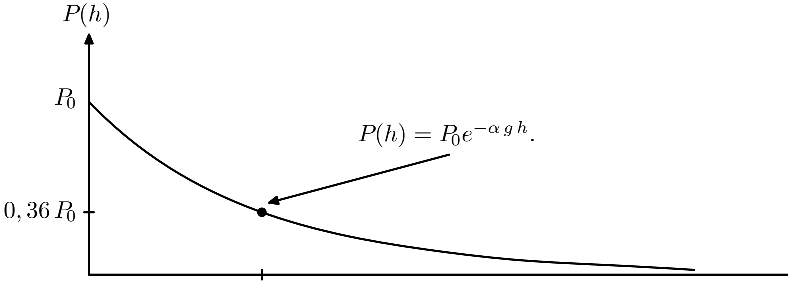

Figure: La presión P como función de la altura h.

Problema 6:

Dr. J. Juan Rosales García
Departamento de Ingeniería Eléctrica, DICIS-UGTO.

De una cierta altura h un cuerpo de masa m es arrojado verticalmente hacia abajo con una velocidad inicial v_0. Sabemos que la fuerza de rozamiento del aire es directamente proporcional a la velocidad instantánea. Calcular cómo cambia la velocidad y la altura del cuerpo en función del tiempo.

Solución:

En el cuerpo que cae actúan el peso mg y la fuerza de rozamiento que es proporcional a la velocidad, esto es $F_r = \alpha v$, donde α es el coeficiente de proporcionalidad. Entonces, de la segunda ley de Newton, tenemos

$$m\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = mg - \alpha v \tag{64}$$

El movimiento es hacia abajo, es por eso que el término mg es positivo, mientras que αv es negativo, ya que su dirección es opuesta al movimiento. La ecuación (64) es de primer orden y puede ser resuelta de dos maneras; por el método de variables separables o como una ecuación lineal no homogénea.

Analicemos el primer caso, es decir, por separación de variables. Escribamos la ecuación de la siguiente manera

$$\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = g - \frac{\alpha}{m}v \ \rightarrow \ \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = -\frac{\alpha}{m}\left(v - \frac{mg}{\alpha}\right) \tag{65}$$

Integrando, se tiene

$$\int \frac{\mathrm{d}v}{v - \frac{mg}{\alpha}} = -\frac{\alpha}{m}\mathrm{d}t \tag{66}$$

$$\ln\left|v - \frac{mg}{\alpha}\right| = -\frac{\alpha}{m}t + c \tag{67}$$

De las condiciones del problema, en este caso; para $t = 0$ tenemos que $v = v_0$, poniendo estas condiciones en (67), resulta

$$c = \ln \left| v_0 - \frac{mg}{\alpha} \right| \tag{68}$$

Sustituyendo el valor de c en (67), tenemos

$$\ln \left| v - \frac{mg}{\alpha} \right| = -\frac{\alpha}{m} t + \ln \left| v_0 - \frac{mg}{\alpha} \right| \tag{69}$$

Usando las propiedades de los logaritmos resulta:

$$v(t) = \frac{mg}{\alpha} + \left(v_0 - \frac{mg}{\alpha} \right) e^{-\frac{\alpha}{m} t} \tag{70}$$

Una vez obtenida la velocidad en función del tiempo, podemos hallar cómo cambia la altura $h(t)$ con el tiempo. De la definición de velocidad

$$v(t) \to \frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}t} = \frac{mg}{\alpha} + \left(v_0 - \frac{mg}{\alpha}\right) e^{-\frac{\alpha}{m}t} \tag{71}$$

Integrando esta última expresión, obtenemos

$$\begin{aligned} \int \mathrm{d}h &= \int \left[\frac{mg}{\alpha} + \left(v_0 - \frac{mg}{\alpha}\right) e^{-\frac{\alpha}{m}t}\right] \mathrm{d}t \to \\ &\to h(t) = \frac{mg}{\alpha}t - \frac{m}{\alpha}\left(v_0 - \frac{mg}{\alpha}\right) e^{-\frac{\alpha}{m}t} + c_2 \end{aligned} \tag{72}$$

En este problema hemos escogido nuestro sistema de referencia en el punto donde fue lanzado el cuerpo, es decir, en el tiempo $t = 0$ estábamos en la altura h_0, poniendo las condiciones iniciales en (72), obtenemos el valor de c_2

$$c_2 = h_0 + \frac{m}{\alpha}\left(v_0 - \frac{mg}{\alpha}\right) \tag{73}$$

Sustituyendo este valor en (72), finalmente tenemos

$$h(t) = h_0 + \frac{mg}{\alpha}t + \frac{m}{\alpha}\left(v_0 - \frac{mg}{\alpha}\right)\left(1 - e^{-\frac{\alpha}{m}t}\right) \tag{74}$$

Ahora vamos a resolver el mismo problema escribiendo la ecuación (64) de la siguiente manera:

$$\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} + \frac{\alpha}{m}v = g \tag{75}$$

Esta ecuación es lineal de primer orden no homogénea respecto a la velocidad v. Hagamos uso del factor integrante para resolverla. En este caso la función $P(t) = \alpha/m$ es constante, entonces, el factor integrante

$$\mu(t) = e^{\int P(t)\mathrm{d}t} = e^{\frac{\alpha}{m}\int \mathrm{d}t} = e^{\frac{\alpha}{m}t} \tag{76}$$

Recordemos que en la ecuación (75) la variable independiente es el tiempo t y la función dependiente es la velocidad v. Luego, tenemos

$$\mathrm{d}\left(e^{\frac{\alpha}{m}t}v\right) = ge^{\frac{\alpha}{m}t}\mathrm{d}t \quad \rightarrow \quad \int \mathrm{d}\left(e^{\frac{\alpha}{m}t}v\right) = g\int e^{\frac{\alpha}{m}t}\mathrm{d}t \tag{77}$$

Integrando, obtenemos

$$ve^{\frac{\alpha}{m}t} = \frac{gm}{\alpha}e^{\frac{\alpha}{m}t} + c \quad \rightarrow \quad v(t) = \frac{gm}{\alpha} + ce^{-\frac{\alpha}{m}t} \tag{78}$$

De las condiciones iniciales $t = 0$, $v = v_0$ hallamos la constante de integración

$$c = v_0 - \frac{mg}{\alpha} \tag{79}$$

Sustituyendo el valor de c en (78) y acomodando términos obtenemos el resultado final

$$v(t) = \frac{mg}{\alpha} + \left(v_0 - \frac{mg}{\alpha} \right) e^{-\frac{\alpha}{m} t} \tag{80}$$

Como era de esperarse, obtenemos el mismo resultado. Hemos ilustrado dos métodos diferentes de solución a un mismo problema con el objetivo de mostrarle a los estudiantes que no importa el método elegido, el resultado siempre será el mismo. Integrando la ecuación (80) se puede obtener la altura $h(t)$, como se ilustró anteriormente.

Problema 7:

Un recipiente de área transversal S, la cual es una función conocida de la altura h, $S = S(h)$, está lleno de cierto líquido hasta un nivel H. En el fondo del recipiente se tiene un orificio de área σ, por el cual puede salir el líquido. Se pide hallar el tiempo, t, en el cual el nivel del líquido decrece de la posición inicial H a cierta altura $0 \leq h < H$ y el tiempo T que tarda en vaciarse por completo el recipiente.

Solución:

Supongamos que la altura del líquido en el recipiente en un cierto tiempo t es igual a h. La cantidad de líquido ΔV que sale del recipiente en el intervalo de tiempo de Δt a $t + \Delta t$, se puede calcular como el volumen del cilindro con el área del fondo σ y altura $V(h)$:

$$\frac{\Delta V}{\Delta t} = \sigma V(h) \quad \rightarrow \quad \Delta V = \sigma V(h) \Delta t \tag{81}$$

Este mismo volumen de líquido puede ser calculado de otra forma. Debido al flujo del líquido su nivel h en el recipiente decrece en $-\Delta h$, por consiguiente

$$\Delta V = -S(h)\Delta h \tag{82}$$

Dr. J. Juan Rosales García
Departamento de Ingeniería Eléctrica, DICIS-UGTO.

Igualando las dos expresiones (81) y (82), tenemos

$$-S(h)\Delta h = \sigma V(h)\Delta t \tag{83}$$

Dividiendo las dos partes de esta ecuación entre Δt y tomando el límite cuando $\Delta t \to 0$, obtenemos la ecuación diferencial

$$-S(h)\frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}t} = \sigma V(h) \tag{84}$$

la cual describe la dependencia del nivel del líquido $h(t)$ en el recipiente respecto del tiempo t.

Luego, sustituyendo $V(h)$, según la ley de Torricelli $V(h) = \mu\sqrt{2gh}$, y separando las variables, obtenemos la siguiente ecuación:

$$\mathrm{d}t = -\frac{S(h)}{\sigma\mu\sqrt{2gh}}\mathrm{d}h \tag{85}$$

Integrando, obtenemos

$$t = -\frac{1}{\sigma\mu\sqrt{2g}}\int_H^h \frac{S(x)}{\sqrt{x}}\mathrm{d}x = \frac{1}{\sigma\mu\sqrt{2g}}\int_h^H \frac{S(x)}{\sqrt{x}}\mathrm{d}x \tag{86}$$

Dr. J. Juan Rosales García
Departamento de Ingeniería Eléctrica, DICIS-UGTO.

Si queremos saber el tiempo en que se vaciará el recipiente, es suficiente hacer $h = 0$, así que, para este caso tenemos la relación

$$T = \frac{1}{\sigma\mu\sqrt{2g}} \int_0^H \frac{S(h)}{\sqrt{h}} \mathrm{d}h \tag{87}$$

Problema 8: Cable Suspendido

Dr. J. Juan Rosales García
Departamento de Ingeniería Eléctrica, DICIS-UGTO.

Suponga que desea conocer la ecuación de una cuerda cuyos extremos están fijos (esta forma es la que toman las cuerdas, cables y cadenas suspendidas).

Solución:

Sea $A = (0, y_0)$ el punto mínimo de la cuerda, figura, B y D los extremos de la misma. Tomemos el sistema de coordenadas cartesiano x, y, de tal manera que el plano x, y esté en el plano de la cuerda y además que el eje vertical pase por el punto A. Luego, sea $P(x, y)$ un punto arbitrario sobre la cuerda. Consideremos la porción $\hat{A}P$ de la cuerda. Sobre esta porción actúan las siguientes fuerzas:

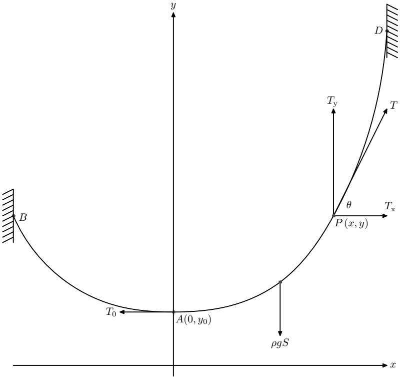

Figure: Cuerda colgante.

- El peso de la porción $\hat{AP}$ dirigido verticalmente hacia abajo
$$s\rho g, \tag{88}$$
en donde, $s = \hat{AP}$, ρ es la masa de la cuerda por unidad de longitud y g es la constante de la gravedad.
- La tensión T_0, en el punto $A = (0, y_0)$ que actúa horizontalmente.
- La tensión $\vec{T}$ que actúa a lo largo de la tangente al punto $P(x,\, y)$ y forma un ángulo θ con el eje x. La componente horizontal de $\vec{T}$ es $T\cos\theta$ y la componente vertical es $T\sin\theta$.

Dr. J. Juan Rosales García
Departamento de Ingeniería Eléctrica, DICIS-UGTO.

Luego, debido a que la porción $\hat{A}\hat{P}$ es estática, entonces, las tres fuerzas deben estar balanceadas, esto nos permite plantear las siguientes ecuaciones:

$$T\sin\theta = s\rho g, \qquad T\cos\theta = T_0 \tag{89}$$

Despejando T de una de las ecuaciones en (89) y sustituyendo en la otra, tenemos

$$tg\theta = \frac{s\rho g}{T_0} \tag{90}$$

Por otro lado, si consideramos que la ecuación de la cuerda está dada por

$$y = y(x) \tag{91}$$

entonces

$$tg\theta = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} \tag{92}$$

Luego, igualando las expresiones (90) y (92), obtenemos la ecuación diferencial

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{\rho g s}{T_0} \tag{93}$$

Ahora, derivamos esta expresión respecto a x, resulta

$$\frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}x^2} = \frac{\rho g}{T_0}\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}x} \tag{94}$$

Debido a que s es la longitud de una porción de la cuerda $\hat{AP}$, entonces, $\mathrm{d}s$ es el diferencial de longitud. Por consiguiente

$$(\mathrm{d}s)^2 = (\mathrm{d}x)^2 + (\mathrm{d}y)^2 \tag{95}$$

Dividiendo la expresión (95) entre $\mathrm{d}x$, resulta

$$\left(\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}x}\right)^2 = 1 + \left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)^2 \tag{96}$$

Sustituyendo este resultado en la ecuación (94), obtenemos la ecuación diferencial

$$\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2} = \frac{\rho g}{T_0}\sqrt{1 + \left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)^2} \tag{97}$$

El problema planteado está parcialmente resuelto, nos queda por resolver la ecuación diferencial (97) para saber qué forma tendrá la solución de la ecuación. Esta ecuación se resuelve introduciendo el parámetro $p = \mathrm{d}y/\mathrm{d}x$, como se vio anteriormente en el capítulo de ecuaciones diferenciales no resueltas respecto a la derivada. Probar que la solución de la ecuación (97), es

$$y = \frac{1}{2\alpha}\left(c_1 e^{\alpha x} + \frac{1}{c_1} e^{-\alpha x}\right) + c_2 \tag{98}$$

donde, c_1 y c_2 son constantes de integración y por comodidad escribimos

$$\alpha = \rho g / T_0 \tag{99}$$

Luego, tomando en cuenta que A es el punto mínimo y que además, en este punto $(x = 0)$, entonces

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = 0 \tag{100}$$

y

$$c_1 = \pm 1 \tag{101}$$

Reemplazando este resultado en (98), tenemos

$$y(x) = \frac{1}{2\alpha}\left(e^{\alpha x} + e^{-\alpha x}\right) + c_2 \tag{102}$$

Esta ecuación la podemos escribir como,

$$y(x) = \frac{1}{\alpha} \cosh\left(\alpha x\right) + c_2 \qquad (103)$$

La ecuación (103) describe una curva llamada catenaria y es la solución de la ecuación de una cuerda sujeta en los extremos.

Problema 9:

Dr. J. Juan Rosales García Departamento de Ingeniería Eléctrica, DICIS-UGTO.

La aceleración de una locomotora es directamente proporcional a la fuerza de tracción (arrastre) F e inversamente proporcional a la masa m del tren. La fuerza de tracción de la locomotora es $F(t) = b - kv(t)$, donde $v(t)$ es la velocidad de la locomotora en el tiempo t, b y k son constantes. Se pide hallar la dependencia de la fuerza de tracción de la locomotora respecto al tiempo t. Suponga, que la locomotora tenía una velocidad inicial v_0.

Solución:

Dr. J. Juan Rosales García
Departamento de Ingeniería Eléctrica, DICIS-UGTO.

De la segunda ley de Newton, tenemos la ecuación

$$m\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = b - kv \quad \rightarrow \quad \int \frac{\mathrm{d}v}{kv - b} = -\frac{1}{m}\int \mathrm{d}t \tag{104}$$

Resolviendo las integrales, resulta

$$\ln\left(\frac{kv - b}{ck}\right) = -\frac{k}{m}t \tag{105}$$

Tomando el logaritmo inverso, obtenemos la ecuación

$$v(t) = \frac{b}{k} + ce^{-\frac{k}{m}t} \tag{106}$$

De las condiciones iniciales del problema $t = 0$, $v = v_0$, obtenemos el valor de la constante, esto es

$$v_0 = \frac{b}{k} + c \quad \rightarrow \quad c = v_0 - \frac{b}{k} \tag{107}$$

Sustituyendo este resultado en (106), obtenemos

$$v(t) = \frac{b}{k} + \left(v_0 - \frac{b}{k}\right) e^{-\frac{k}{m}t} \tag{108}$$

Dr. J. Juan Rosales García Departamento de Ingeniería Eléctrica, DICIS-UGTO.

Luego, la dependencia de la fuerza de tracción de la locomotora con el tiempo está dada por la expresión

$$F(t) = b - kv(t) \tag{109}$$

Sustituyendo el valor de (108) en (109), obtenemos, finalmente

$$F(t) = (b - kv_0)\, e^{-\frac{k}{m}t} \tag{110}$$

éste es el resultado buscado.

Problema 10:

Dr. J. Juan Rosales García
Departamento de Ingeniería Eléctrica, DICIS-UGTO.

Un meteorito que se encuentra bajo la acción de la gravedad terrestre, de su estado de reposo empieza a caer a la Tierra con movimiento rectilíneo desde una altura h. ¿Cuál será la velocidad del meteorito al llegar a la superficie de la Tierra si despreciamos la atmósfera terrestre? El radio de la Tierra es $R = 6377\ \mathrm{km}$.

Solución:

Sea $x = x(t)$ la distancia recorrida por el meteorito en el momento de descenso, $h - x$ la distancia del meteorito en el momento t hasta el centro de la Tierra. En el momento t en el meteorito actúan la fuerza $F = ma$, donde m es la masa del meteorito y a su aceleración. En la superficie de la Tierra en el meteorito actúan la fuerza de gravedad $P = mg$, donde g es la aceleración de caída libre en la superficie de la Tierra.

Según la ley de Newton, estas fuerzas son inversamente proporcionales al cuadrado de la distancia del cuerpo en caída al centro de la Tierra, esto es

$$\frac{F}{P} = \frac{R^2}{(h-x)^2} \quad \rightarrow \quad \frac{ma}{mg} = \frac{R^2}{(h-x)^2} \tag{111}$$

De donde, tenemos

$$a = \frac{R^2 g}{(h-x)^2} \tag{112}$$

Por otro lado, tenemos que $a = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}$, entonces

$$\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = \frac{gR^2}{(h-x)^2} \tag{113}$$

Haciendo uso de la regla de la cadena

$$\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = v\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x} \tag{114}$$

Obtenemos la ecuación diferencial

$$v\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x} = \frac{gR^2}{(h-x)^2} \quad \rightarrow \quad \frac{\mathrm{d}v^2}{\mathrm{d}x} = \frac{2gR^2}{(h-x)^2} \tag{115}$$

Integrando

$$\int \mathrm{d}v^2 = 2gR^2 \int \frac{\mathrm{d}x}{(h-x)^2} \tag{116}$$

resulta

$$v^2 = \frac{2gR^2}{h-x} + c \tag{117}$$

Debido a que el movimiento empezó del reposo, tenemos las condiciones iniciales es decir, cuando $t = 0$, $x_0 = 0$ y $v_0 = 0$, sustituyendo estos valores en (117), resulta

$$0 = \frac{2gr^2}{h-0} + c \quad \rightarrow \quad c = -\frac{2gR^2}{h} \tag{118}$$

Sustituyendo el valor de c en la ecuación (117), obtenemos la variación de la velocidad v del meteorito respecto a la distancia recorrida x, ésta tiene la forma

$$v^2(x) = \frac{2gR^2x}{h(h-x)} \tag{119}$$

En la superficie de la Tierra (cuando $x = h - R$), la velocidad del meteorito es

$$v = \sqrt{2gR\left(1 - \frac{R}{h}\right)} \tag{120}$$

Debido a que h por condición no se restringe mucho, entonces, pasando al límite cuando $h \to \infty$, obtenemos

$$v = \sqrt{2gR} \tag{121}$$

Cuando el meteorito llega a la superficie de la Tierra, este tiene una velocidad

$$v = \sqrt{(2)(9,81)(6377000)} \approx 11,2 \text{ km/s} \tag{122}$$