la expresión en forma adimensional reduce el número de variables independientes y de parámetros, de ocho a tres: de x, L, t, k, α, h, T_i y T_∞ a X, Bi y Fo (figura 4-13). Es decir,

$$\theta = f(X, \text{Bi}, \text{Fo}) \tag{4–13}$$

Esto hace que sea muy práctico conducir estudios paramétricos y presentar los resultados en forma gráfica. Recuérdese que en el caso de análisis de sistemas concentrados, se tuvo $\theta = f(\text{Bi}, \text{Fo})$, sin variable espacial.

Solución exacta del problema de conducción transitoria unidimensional*

La ecuación diferencial en derivadas parciales en forma adimensional, dada en las ecuaciones 4-12 junto con sus condiciones de la frontera e inicial, se puede resolver con la aplicación de varias técnicas analíticas y numéricas, incluidos los métodos de la transformada de Laplace u otra, el método de separación de variables, el de diferencias finitas y el de elementos finitos. En este texto, se aplicará el **método de separación de variables** desarrollado por J. Fourier, en 1820, y que se basa en el desarrollo de una función arbitraria (incluida una constante) en términos de series de Fourier. El método se aplica al suponer que la variable dependiente es un producto de varias funciones, en donde cada una de ellas es función de una sola variable independiente. Esto reduce la ecuación diferencial en derivadas parciales a un sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias, donde cada una de ellas es función de una sola variable independiente. Por ejemplo, en el caso de la conducción transitoria en una pared plana, la variable dependiente es la función de solución $\theta(X, \tau)$, la cual se expresa como $\theta(X, \tau) = F(X)G(\tau)$, y la aplicación del método da como resultado dos ecuaciones diferenciales ordinarias, una en X y otra en τ.

El método es aplicable si 1) la configuración geométrica es sencilla y finita (como un bloque rectangular, un cilindro o una esfera), de modo que las superficies de frontera se puedan describir por medio de funciones matemáticas sencillas, y 2) la ecuación diferencial y las condiciones de frontera e inicial, en su forma más simplificada, son lineales (sin términos que contengan productos de la variable dependiente o de sus derivadas) y sólo contienen un término no homogéneo (un término sin la variable dependiente ni sus derivadas). Si la formulación comprende varios términos no homogéneos, el problema se puede dividir en un número igual de problemas más sencillos, comprendiendo cada uno sólo un término no homogéneo y, después, combinando las soluciones por superposición.

Ahora se demostrará el uso del método de separación de variables, mediante su aplicación al problema de la conducción transitoria unidimensional de calor, dado en las ecuaciones 4-12. En primer lugar, se expresa la función de la temperatura adimensional $\theta(X, \tau)$ como un producto de una función sólo de X y una función sólo de τ, como

$$\theta(X, \tau) = F(X)G(\tau) \tag{4–14}$$

Si se sustituye la ecuación 4-14 en la 4-12a y se divide entre el producto FG, da

$$\frac{1}{F}\frac{d^2F}{dX^2} = \frac{1}{G}\frac{dG}{d\tau} \tag{4–15}$$

Obsérvese que todos los términos que dependen de X se encuentran en la parte izquierda de la ecuación y todos los que dependen de τ están en la parte derecha. Es decir, los términos que son función de variables diferentes se *sepa-*

*Si se desea, se puede pasar por alto esta sección, sin pérdida de continuidad.

ran (de allí el nombre de *separación de variables*). La parte izquierda de esta ecuación es función sólo de X y la parte derecha sólo lo es de τ. Si se considera que tanto X como τ pueden hacerse variar de manera independiente, únicamente puede cumplirse la igualdad de la ecuación 4-15, para cualquier valor de X y de τ, si esta ecuación es igual a una constante. Además, debe ser una constante *negativa*, la cual se indicará como $-\lambda^2$, ya que una constante positiva hará que la función $G(\tau)$ crezca en forma ilimitada con el tiempo (para hacerse infinita), lo cual carece de significado físico; un valor de cero para esa constante significa que no hay dependencia respecto al tiempo, lo cual una vez más no es coherente con el problema físico planteado. Al hacer la ecuación 4-15 igual a $-\lambda^2$, da

$$\frac{d^2F}{dX^2} + \lambda^2 F = 0 \quad \text{y} \quad \frac{dG}{d\tau} + \lambda^2 G = 0 \tag{4–16}$$

cuyas soluciones generales son

$$F = C_1 \cos(\lambda X) + C_2 \text{sen}(\lambda X) \quad \text{y} \quad G = C_3 e^{-\lambda^2 \tau} \tag{4–17}$$

y

$$\theta = FG = C_3 e^{-\lambda^2 \tau}[C_1 \cos(\lambda X) + C_2 \text{sen}(\lambda X)] = e^{-\lambda^2 \tau}[A \cos(\lambda X) + B \text{sen}(\lambda X)] \tag{4–18}$$

donde $A = C_1 C_3$ y $B = C_2 C_3$ son constantes arbitrarias. Nótese que sólo se necesita determinar A y B para obtener la solución del problema.

Al aplicar las condiciones de frontera de las ecuaciones 4-12*b*, da

$$\frac{\partial \theta(0, \tau)}{\partial X} = 0 \rightarrow -e^{-\lambda^2 \tau}(A\lambda \text{sen}0 + B\lambda \cos 0) = 0 \ \rightarrow \ B = 0 \ \rightarrow \ \theta = Ae^{-\lambda^2 \tau} \cos(\lambda X)$$

$$\frac{\partial \theta(1, \tau)}{\partial X} = -\text{Bi}\theta(1,\tau) \ \rightarrow -Ae^{-\lambda^2 \tau}\lambda \text{sen}\lambda = -\text{Bi}Ae^{-\lambda^2 \tau} \cos\lambda \ \rightarrow \ \lambda \tan\lambda = \text{Bi}$$

Pero la tangente es una función periódica con un periodo de π y la ecuación $\lambda \tan \lambda = \text{Bi}$ tiene la raíz λ_1 entre 0 y π, la raíz λ_2 entre π y 2π, la raíz λ_n entre $(n - 1)\pi$ y $n\pi$, etcétera. Para reconocer que la ecuación trascendente $\lambda \tan \lambda = \text{Bi}$ tiene un número infinito de raíces, ésta es expresada como

$$\lambda_n \tan \lambda_n = \text{Bi} \tag{4–19}$$

Esta última ecuación se conoce como **ecuación característica**, y sus raíces se llaman **valores característicos** o **eigenvalores** (o **valores propios**). En este caso, la ecuación característica es implícita y, por lo tanto, se necesita determinar numéricamente los valores característicos. Entonces, se concluye que se tiene un número infinito de soluciones de la forma $Ae^{-\lambda^2 \tau} \cos(\lambda X)$, y la solución de este problema lineal de conducción de calor es una combinación lineal de ellas,

$$\theta = \sum_{n=1}^{\infty} A_n e^{-\lambda_n^2 \tau} \cos(\lambda_n X) \tag{4–20}$$

Las constantes A_n se determinan a partir de la condición inicial, ecuación 4-12*c*,

$$\theta(X, 0) = 1 \ \rightarrow \ 1 = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos(\lambda_n X) \tag{4–21}$$

Éste es un desarrollo en serie de Fourier que expresa una constante en términos de una serie infinita de funciones coseno. A continuación, se multiplican ambos lados de la ecuación 4-21 por $\cos(\lambda_m X)$ y se integra desde $X = 0$ hasta $X = 1$. El lado derecho comprende un número infinito de integrales de la forma $\int_0^1 \cos(\lambda_m X)\cos(\lambda_n X)dx$. Se puede demostrar que todas estas integrales se anulan, excepto cuando $n = m$, y el coeficiente A_n queda

$$\int_0^1 \cos(\lambda_n X)dX = A_n \int_0^1 \cos^2(\lambda_n X)dx \quad \rightarrow \quad A_n = \frac{4\operatorname{sen}\lambda_n}{2\lambda_n + \operatorname{sen}(2\lambda_n)} \qquad \textbf{(4–22)}$$

Con esto se completa el análisis para la resolución del problema de conducción transitoria unidimensional de calor en una pared plana. Se pueden determinar las soluciones en otras configuraciones geométricas, como un cilindro largo y una esfera, aplicando el mismo procedimiento. En la tabla 4-1, se resumen los resultados para estas tres configuraciones geométricas. La solución para la pared plana también es aplicable cuando se trata de una pared plana de espesor L cuya superficie izquierda, en $x = 0$, esté aislada y la derecha, en $x = L$, esté sujeta a convección, ya que éste es precisamente el problema matemático que se resolvió.

Es común que las soluciones analíticas de los problemas de conducción transitoria comprendan series infinitas y, por lo tanto, la evaluación de un número infinito de términos con el fin de determinar la temperatura en un punto e instante especificados. Esto puede parecer en principio intimidante, pero no hay necesidad de preocuparse. Como se demuestra en la figura 4-14, los términos en la suma decrecen con rapidez conforme n y, por consiguiente, λ_n crecen, debido a la función exponencial de decaimiento $e^{-\lambda_n^2 \tau}$. En especial, este caso se presenta cuando el tiempo adimensional τ es grande. Por lo tanto, suele ser adecuada la evaluación de unos cuantos de los primeros términos de la serie infinita (en este caso, sólo el primer término) con el fin de determinar la temperatura adimensional θ.

$$\theta_n = A_n e^{-\lambda_n^2 \tau} \cos(\lambda_n X)$$

$$A_n = \frac{4 \operatorname{sen}\lambda_n}{2\lambda_n + \operatorname{sen}(2\lambda_n)}$$

$$\lambda_n \tan \lambda_n = \text{Bi}$$

Para Bi = 5, $X = 1$, y $t = 0.2$:

n	λ_n	A_n	θ_n
1	1.3138	1.2402	0.22321
2	4.0336	−0.3442	0.00835
3	6.9096	0.1588	0.00001
4	9.8928	−0.876	0.00000

FIGURA 4–14
Los términos de la serie que presenta la solución de los problemas de conducción transitoria decrecen con rapidez conforme crece n y, por consiguiente, λ_n, debido a la función exponencial de decaimiento con el exponente $-\lambda_n \tau$.

Soluciones aproximadas, analíticas y gráficas

La solución analítica obtenida en los párrafos anteriores para la conducción transitoria unidimensional de calor en una pared plana comprende series infinitas y ecuaciones implícitas, las cuales son difíciles de evaluar. Por lo tanto, existe una motivación clara para simplificar las soluciones analíticas con el fin

TABLA 4–1

Resumen de las soluciones para la conducción transitoria unidimensional en una pared plana de espesor $2L$, un cilindro de radio r_o y una esfera de radio r_o, sujetos a convección desde todas las superficies.*

Configuración geométrica	Solución	Las λ_n son las raíces de
Pared plana	$\theta = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4 \operatorname{sen}\lambda_n}{2\lambda_n + \operatorname{sen}(2\lambda_n)} e^{-\lambda_n^2 \tau} \cos(\lambda_n x/L)$	$\lambda_n \tan \lambda_n = \text{Bi}$
Cilindro	$\theta = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{\lambda_n} \frac{J_1(\lambda_n)}{J_0^2(\lambda_n) + J_1^2(\lambda_n)} e^{-\lambda_n^2 \tau} J_0(\lambda_n r/r_o)$	$\lambda_n \frac{J_1(\lambda_n)}{J_0(\lambda_n)} = \text{Bi}$
Esfera	$\theta = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4(\operatorname{sen}\lambda_n - \lambda_n \cos\lambda_n)}{2\lambda_n - \operatorname{sen}(2\lambda_n)} e^{-\lambda_n^2 \tau} \frac{\operatorname{sen}(\lambda_n x/L)}{\lambda_n x/L}$	$1 - \lambda_n \cot \lambda_n = \text{Bi}$

*Aquí $\theta = (T - T_i)/(T_\infty - T_i)$ es la temperatura adimensional, $\text{Bi} = hL/k$ o hr_o/k es el número de Biot, $\text{Fo} = \tau = \alpha t/L^2$ o $\alpha\tau/r_o^2$ es el número de Fourier, y J_0 y J_1 son las funciones de Bessel de la primera especie cuyos valores se dan en la tabla 4–3.