

$$k\Delta y \frac{T_{m-1,n} - T_{m,n}}{\Delta x} + k\Delta x \frac{T_{m,n+1} - T_{m,n}}{\Delta y} + k\Delta y \frac{T_{m+1,n} - T_{m,n}}{\Delta x} + k\Delta x \frac{T_{m,n-1} - T_{m,n}}{\Delta y} + \dot{e}_{m,n} \Delta x \Delta y = 0 \quad (5-32)$$

Al dividir cada término entre $\Delta x \times \Delta y$ y simplificar da

$$\frac{T_{m-1,n} - 2T_{m,n} + T_{m+1,n}}{\Delta x^2} + \frac{T_{m,n-1} - 2T_{m,n} + T_{m,n+1}}{\Delta y^2} + \frac{\dot{e}_{m,n}}{k} = 0 \quad (5-33)$$

para $m = 1, 2, 3, \dots, M - 1$ y $n = 1, 2, 3, \dots, N - 1$. Esta ecuación es idéntica a la ecuación 5.12 obtenida con anterioridad al reemplazar las derivadas de la ecuación diferencial por diferencias para un nodo interior (m, n) . De nuevo, una región rectangular con M nodos igualmente espaciados en la dirección x y N nodos igualmente espaciados en la dirección y tiene un total de $(M + 1)(N + 1)$ nodos y se puede usar la ecuación 5-33 para obtener las ecuaciones en diferencias finitas en todos los nodos interiores.

En el análisis con diferencias finitas por lo común se usa, por sencillez, una **mallá cuadrada** (excepto cuando las magnitudes de los gradientes de temperatura en las direcciones x y y son muy diferentes) y, por tanto, Δx y Δy se consideran iguales. Entonces $\Delta x = \Delta y = l$ y la relación antes dada se simplifica a

$$T_{m-1,n} + T_{m+1,n} + T_{m,n+1} + T_{m,n-1} - 4T_{m,n} + \frac{\dot{e}_{m,n}l^2}{k} = 0 \quad (5-34)$$

Es decir, la formulación en diferencias finitas de un nodo interior se obtiene al *sumar las temperaturas de los cuatro vecinos más cercanos del nodo, menos el cuádruplo de la temperatura del propio nodo y más el término de generación de calor*. También se puede expresar en la forma que sigue, la cual es fácil de recordar:

$$T_{\text{izquierda}} + T_{\text{superior}} + T_{\text{derecha}} + T_{\text{inferior}} - 4T_{\text{nodo}} + \frac{\dot{e}_{\text{nodo}}l^2}{k} = 0 \quad (5-35)$$

Cuando no se tiene generación de calor en el medio, la ecuación en diferencias finitas para un nodo interior todavía se simplifica más a $T_{\text{nodo}} = (T_{\text{izquierda}} + T_{\text{arriba}} + T_{\text{derecha}} + T_{\text{abajo}})/4$, la cual tiene la interpretación interesante de que *la temperatura de cada nodo interior es el promedio aritmético de las temperaturas de los cuatro nodos vecinos*. Esta proposición también se cumple para los problemas tridimensionales, excepto que, en ese caso, los nodos interiores tendrán seis nodos vecinos en lugar de cuatro.

Nodos frontera

El desarrollo de la formulación en diferencias finitas de los nodos *frontera* en los problemas bidimensionales (o tridimensionales) es semejante al realizado en el caso unidimensional descrito al principio. Una vez más, la región se divide entre los nodos mediante la formación de *elementos de volumen* alrededor de ellos y se escribe un *balance de energía* para cada nodo frontera. Como se discutió para una pared plana, se pueden manejar varias condiciones de frontera, excepto que los elementos de volumen en el caso bidimensional comprenden transferencia de calor en la *dirección* y así como en la *dirección* x . Las superficies aisladas todavía se conciben como “espejos” y se puede usar

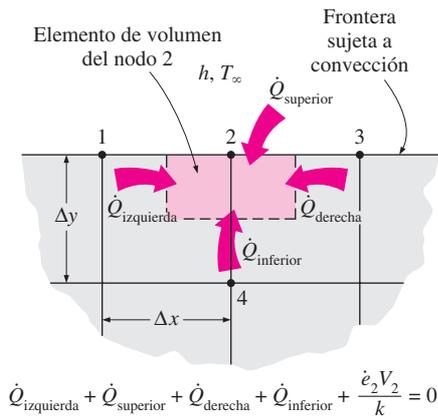


FIGURA 5-25

La formulación en diferencias finitas de un nodo frontera se obtiene al escribir un balance de energía sobre su elemento de volumen.

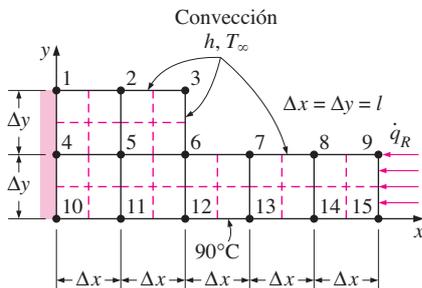
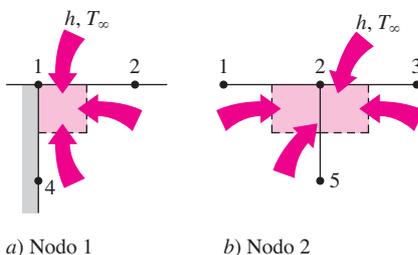


FIGURA 5-26

Esquema para el ejemplo 5-3 y la red nodal (las fronteras de los elementos de volumen de los nodos se indican mediante líneas punteadas).



a) Nodo 1

b) Nodo 2

FIGURA 5-27

Esquemas para los balances de energía sobre los elementos de volumen de los nodos 1 y 2.

el concepto de imagen especular con el fin de tratar los nodos sobre fronteras aisladas como nodos interiores.

Para la transferencia de calor en condiciones *estacionarias*, la ecuación básica que se debe tener presente al escribir un *balance de energía* sobre un elemento de volumen es (figura 5-25)

$$\sum_{\text{Todos los lados}} \dot{Q} + \dot{e}V_{\text{elemento}} = 0 \quad (5-36)$$

sea el problema unidimensional, bidimensional o tridimensional. De nuevo, por conveniencia en la formulación, se supone que toda la transferencia de calor es *hacia* el elemento de volumen desde todas las superficies excepto para el flujo específico de calor, cuya dirección está ya determinada. Esto se demuestra en el ejemplo 5-3 para varias condiciones de frontera.

EJEMPLO 5-3 Conducción bidimensional de calor en estado estacionario en barras en L

Considere la transferencia de calor en estado estacionario en un cuerpo sólido con forma en L, cuya sección transversal se da en la figura 5-26. La transferencia de calor en la dirección perpendicular al plano del papel es despreciable y, por consiguiente, la transferencia de calor en el cuerpo es bidimensional. La conductividad térmica del cuerpo es $k = 15 \text{ W/m} \cdot ^\circ\text{C}$ y se genera calor en éste con una velocidad de $\dot{e} = 2 \times 10^6 \text{ W/m}^3$. La superficie izquierda del cuerpo está aislada y la inferior se mantiene a una temperatura uniforme de 90°C . La superficie superior completa está sujeta a convección hacia el aire ambiental a $T_\infty = 25^\circ\text{C}$, con un coeficiente de convección de $h = 80 \text{ W/m}^2 \cdot ^\circ\text{C}$, y la superficie derecha está sujeta a flujo de calor con una velocidad uniforme de $\dot{q}_R = 5000 \text{ W/m}^2$. La red nodal del problema consta de 15 nodos igualmente espaciados con $\Delta x = \Delta y = 1.2 \text{ cm}$, como se muestra en la figura. Cinco de los nodos están en la superficie inferior y, como consecuencia, sus temperaturas se conocen. Obtenga las ecuaciones en diferencias finitas en los nueve nodos restantes y determine las temperaturas nodales al resolverlas.

SOLUCIÓN Se considera la transferencia de calor en una barra sólida larga con forma de L, con condiciones de frontera específicas. Con el método de diferencias finitas se deben determinar las nueve temperaturas nodales desconocidas.

Suposiciones 1 La transferencia de calor es estacionaria y bidimensional, como se expresa. 2 La conductividad térmica es constante. 3 La generación de calor es uniforme. 4 La transferencia de calor por radiación es despreciable.

Propiedades Se dice que la conductividad térmica es $k = 15 \text{ W/m} \cdot ^\circ\text{C}$.

Análisis Se observa que todos los nodos son frontera, excepto el 5, que es interior. Por lo tanto, se tiene que apoyar en los balances de energía para obtener las ecuaciones en diferencias finitas. Pero, en principio, se forman los elementos de volumen al dividir la región entre los nodos de manera equitativa, al trazar líneas punteadas entre los nodos. Si se considera que el elemento de volumen representado por un nodo interior es de *tamaño completo* (es decir, $\Delta x \times \Delta y \times 1$), entonces el elemento de volumen representado por un nodo frontera común, como el 2, se convierte en uno de *mitad de tamaño* (es decir, $\Delta x \times \Delta y/2 \times 1$) y el de un nodo de esquina, como el 1, es de un *cuarto de tamaño* (es decir, $\Delta x/2 \times \Delta y/2 \times 1$). Se tiene presente la ecuación 5-36 para el balance de energía, las ecuaciones en diferencias finitas para cada uno de los nueve nodos se obtienen como sigue:

a) *Nodo 1.* El elemento de volumen de este nodo de esquina está aislado a la izquierda y sujeto a convección en la parte superior y a conducción en las superficies derecha e inferior. Un balance de energía sobre este elemento da [figura 5-27a]

$$0 + h \frac{\Delta x}{2} (T_\infty - T_1) + k \frac{\Delta y}{2} \frac{T_2 - T_1}{\Delta x} + k \frac{\Delta x}{2} \frac{T_4 - T_1}{\Delta y} + \dot{e}_1 \frac{\Delta x \Delta y}{2} = 0$$

Al tomar $\Delta x = \Delta y = l$, se simplifica a

$$-\left(2 + \frac{hl}{k}\right) T_1 + T_2 + T_4 = -\frac{hl}{k} T_\infty - \frac{\dot{e}_1 l^2}{2k}$$

b) *Nodo 2.* El elemento de volumen de este nodo frontera está sujeto a convección en la parte superior y a conducción en las superficies derecha, inferior e izquierda. Un balance de energía sobre este elemento da [figura 5-27b]

$$h\Delta x(T_\infty - T_2) + k \frac{\Delta y}{2} \frac{T_3 - T_2}{\Delta x} + k\Delta x \frac{T_5 - T_2}{\Delta y} + k \frac{\Delta y}{2} \frac{T_1 - T_2}{\Delta x} + \dot{e}_2 \Delta x \frac{\Delta y}{2} = 0$$

Al tomar $\Delta x = \Delta y = l$, se simplifica a

$$T_1 - \left(4 + \frac{2hl}{k}\right) T_2 + T_3 + 2T_5 = -\frac{2hl}{k} T_\infty - \frac{\dot{e}_2 l^2}{k}$$

c) *Nodo 3.* El elemento de volumen de este nodo de esquina está sujeto a convección en las superficies superior y derecha, y a conducción en las superficies inferior e izquierda. Un balance de energía sobre este elemento da [figura 5-28a]

$$h\left(\frac{\Delta x}{2} + \frac{\Delta y}{2}\right)(T_\infty - T_3) + k \frac{\Delta x}{2} \frac{T_6 - T_3}{\Delta y} + k \frac{\Delta y}{2} \frac{T_2 - T_3}{\Delta x} + \dot{e}_3 \frac{\Delta x \Delta y}{2} = 0$$

Al considerar $\Delta x = \Delta y = l$, se simplifica a

$$T_2 - \left(2 + \frac{2hl}{k}\right) T_3 + T_6 = -\frac{2hl}{k} T_\infty - \frac{\dot{e}_3 l^2}{2k}$$

d) *Nodo 4.* Este nodo está sobre la frontera aislada y se puede tratar como un nodo interior al reemplazar el aislamiento por un espejo. Esto pone una imagen reflejada del nodo 5 a la izquierda del 4. Dado que $\Delta x = \Delta y = l$, la relación del nodo interior general para el caso bidimensional de estado estacionario (ecuación 5-35) da [figura 5-28b]

$$T_5 + T_1 + T_5 + T_{10} - 4T_4 + \frac{\dot{e}_4 l^2}{k} = 0$$

o bien, dado que $T_{10} = 90^\circ \text{C}$,

$$T_1 - 4T_4 + 2T_5 = -90 - \frac{\dot{e}_4 l^2}{k}$$

e) *Nodo 5.* Éste es un nodo interior, y dado que $\Delta x = \Delta y = l$, la formulación en diferencias finitas de este nodo se obtiene directamente a partir de la ecuación 5-35 como [figura 5-29a]

$$T_4 + T_2 + T_6 + T_{11} - 4T_5 + \frac{\dot{e}_5 l^2}{k} = 0$$

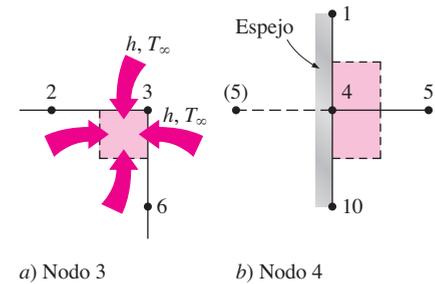


FIGURA 5-28

Esquemas para los balances de energía sobre los elementos de volumen de los nodos 3 y 4.

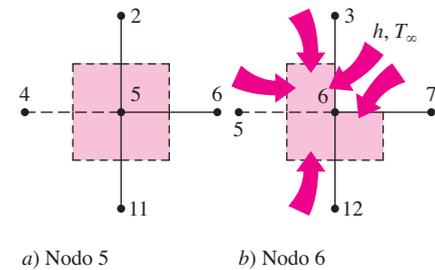


FIGURA 5-29

Esquemas para los balances de energía sobre los elementos de volumen de los nodos 5 y 6.

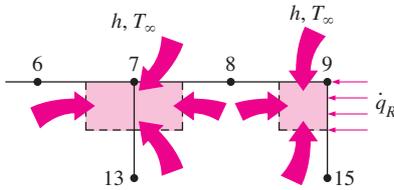


FIGURA 5-30

Esquemas para los balances de energía sobre los elementos de volumen de los nodos 7 y 9.

o bien, dado que $T_{11} = 90^\circ\text{C}$,

$$T_2 + T_4 - 4T_5 + T_6 = -90 - \frac{\dot{e}_5 l^2}{k}$$

f) *Nodo 6.* El elemento de volumen de este nodo de esquina interior está sujeto a convección en la superficie expuesta con forma de L y a conducción en las otras superficies. Un balance de energía sobre este elemento da [figura 5-29b]

$$\begin{aligned} h\left(\frac{\Delta x}{2} + \frac{\Delta y}{2}\right)(T_\infty - T_6) + k\frac{\Delta y}{2}\frac{T_7 - T_6}{\Delta x} + k\Delta x\frac{T_{12} - T_6}{\Delta y} \\ + k\Delta y\frac{T_5 - T_6}{\Delta x} + k\frac{\Delta x}{2}\frac{T_3 - T_6}{\Delta y} + \dot{e}_6\frac{3\Delta x\Delta y}{4} = 0 \end{aligned}$$

Si $\Delta x = \Delta y = l$ y dado que $T_{12} = 90^\circ\text{C}$ se simplifica a

$$T_3 + 2T_5 - \left(6 + \frac{2hl}{k}\right)T_6 + T_7 = -180 - \frac{2hl}{k}T_\infty - \frac{3\dot{e}_6 l^2}{2k}$$

g) *Nodo 7.* El elemento de volumen de este nodo frontera está sujeto a convección en la parte superior y a conducción en las superficies derecha, inferior e izquierda. Un balance de energía sobre este elemento da [figura 5-30a]

$$\begin{aligned} h\Delta x(T_\infty - T_7) + k\frac{\Delta y}{2}\frac{T_8 - T_7}{\Delta x} + k\Delta x\frac{T_{13} - T_7}{\Delta y} \\ + k\frac{\Delta y}{2}\frac{T_6 - T_7}{\Delta x} + \dot{e}_7\Delta x\frac{\Delta y}{2} = 0 \end{aligned}$$

Si $\Delta x = \Delta y = l$ y dado que $T_{13} = 90^\circ\text{C}$ se simplifica a

$$T_6 - \left(4 + \frac{2hl}{k}\right)T_7 + T_8 = -180 - \frac{2hl}{k}T_\infty - \frac{\dot{e}_7 l^2}{k}$$

h) *Nodo 8.* Este nodo es idéntico al 7 y se puede obtener la formulación en diferencias finitas de aquel a partir del nodo 7 al desplazar en 1 los números de los nodos (es decir, reemplazar el subíndice m por $m + 1$). Esto da

$$T_7 - \left(4 + \frac{2hl}{k}\right)T_8 + T_9 = -180 - \frac{2hl}{k}T_\infty - \frac{\dot{e}_8 l^2}{k}$$

i) *Nodo 9.* El elemento de volumen de este nodo de esquina está sujeto a convección en la superficie superior, a flujo de calor en la superficie derecha y a conducción en las superficies inferior e izquierda. Un balance de energía sobre este elemento da [figura 5-30b]

$$h\frac{\Delta x}{2}(T_\infty - T_9) + \dot{q}_R\frac{\Delta y}{2} + k\frac{\Delta x}{2}\frac{T_{15} - T_9}{\Delta y} + k\frac{\Delta y}{2}\frac{T_8 - T_9}{\Delta x} + \dot{e}_9\frac{\Delta x}{2}\frac{\Delta y}{2} = 0$$

Si $\Delta x = \Delta y = l$ y dado que $T_{15} = 90^\circ\text{C}$ se simplifica a

$$T_8 - \left(2 + \frac{hl}{k}\right)T_9 = -90 - \frac{\dot{q}_R l}{k} - \frac{hl}{k}T_\infty - \frac{\dot{e}_9 l^2}{2k}$$

Con esto se completa el desarrollo de la formulación en diferencias finitas para este problema. Al sustituir las cantidades dadas, el sistema de nueve ecuaciones para la determinación de las nueve temperaturas nodales desconocidas queda

$$\begin{aligned} -2.064T_1 + T_2 + T_4 &= -11.2 \\ T_1 - 4.128T_2 + T_3 + 2T_5 &= -22.4 \\ T_2 - 2.128T_3 + T_6 &= -12.8 \\ T_1 - 4T_4 + 2T_5 &= -109.2 \\ T_2 + T_4 - 4T_5 + T_6 &= -109.2 \\ T_3 + 2T_5 - 6.128T_6 + T_7 &= -212.0 \\ T_6 - 4.128T_7 + T_8 &= -202.4 \\ T_7 - 4.128T_8 + T_9 &= -202.4 \\ T_8 - 2.064T_9 &= -105.2 \end{aligned}$$

el cual es un sistema de nueve ecuaciones algebraicas con nueve incógnitas. Mediante un programa para resolver ecuaciones, se determina que es

$$\begin{array}{lll} T_1 = 112.1^\circ\text{C} & T_2 = 110.8^\circ\text{C} & T_3 = 106.6^\circ\text{C} \\ T_4 = 109.4^\circ\text{C} & T_5 = 108.1^\circ\text{C} & T_6 = 103.2^\circ\text{C} \\ T_7 = 97.3^\circ\text{C} & T_8 = 96.3^\circ\text{C} & T_9 = 97.6^\circ\text{C} \end{array}$$

Note que se tiene la temperatura más alta en el nodo 1 y la más baja en el 8. Esto resulta coherente con nuestras esperanzas, puesto que el nodo 1 es el más alejado de la superficie inferior, la cual se mantiene a 90°C y tiene un lado aislado, y el 8 tiene el área expuesta más grande con relación a su volumen, mientras al mismo tiempo está cercano a la superficie a 90°C .

Fronteras irregulares

En los problemas con configuraciones geométricas simples, se puede llenar la región completa mediante elementos de volumen simples, como tiras, para una pared plana, y elementos rectangulares para la conducción bidimensional en una región rectangular. También se pueden usar elementos con la forma de capas cilíndricas o esféricas para cubrir por completo cuerpos cilíndricos o esféricos. Sin embargo, muchas configuraciones que se encuentran en la práctica, como las paletas de las turbinas o los monobloques de los motores, no tienen formas simples y es difícil llenar esas configuraciones que tienen fronteras irregulares con elementos sencillos de volumen. Una manera práctica de tratar con esas configuraciones es reemplazar la configuración irregular por una serie de elementos simples de volumen, como se muestra en la figura 5-31. Con frecuencia este simple procedimiento resulta satisfactorio para los fines prácticos, en especial cuando los nodos están cerca uno de otro en la vecindad de la frontera. Se cuenta con procedimientos más elaborados para manejar fronteras irregulares y es común que se encuentren incorporados en los paquetes comerciales de software.

EJEMPLO 5-4 Pérdida de calor a través de chimeneas

Gases calientes de la combustión de un horno fluye por una chimenea cuadrada hecha de concreto ($k = 1.4 \text{ W/m} \cdot ^\circ\text{C}$). La sección de flujo de la chimenea es de $20 \text{ cm} \times 20 \text{ cm}$ y el espesor de la pared es de 20 cm . La temperatura promedio

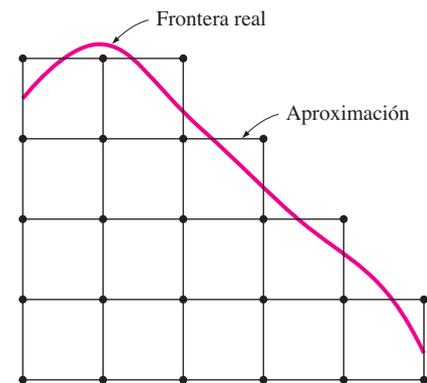


FIGURA 5-31

Aproximación de una frontera irregular con una malla rectangular.

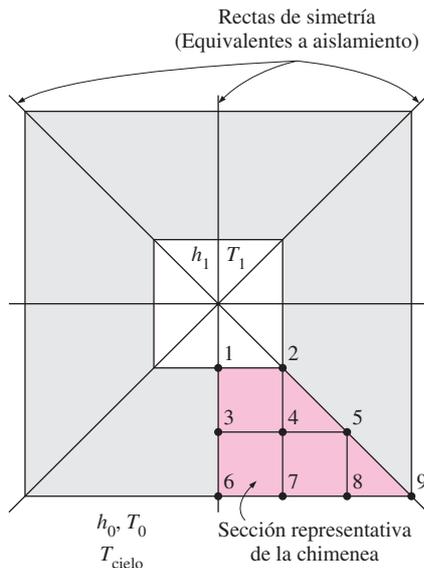


FIGURA 5-32

Esquema de la chimenea discutida en el ejemplo 5-4 y la red nodal para una sección representativa.

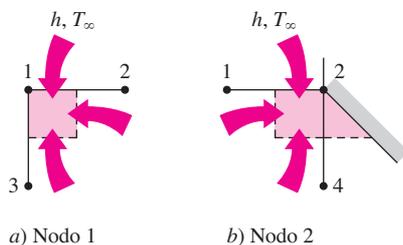


FIGURA 5-33

Esquema para los balances de energía sobre los elementos de volumen de los nodos 1 y 2.

de los gases calientes en la chimenea es $T_i = 300^\circ\text{C}$ y el coeficiente promedio de transferencia de calor por convección dentro de la chimenea es $h_i = 70 \text{ W/m}^2 \cdot ^\circ\text{C}$. La chimenea pierde calor desde su superficie exterior hacia el aire ambiente que está a $T_o = 20^\circ\text{C}$ por convección, con un coeficiente de transferencia de calor de $h_o = 21 \text{ W/m}^2 \cdot ^\circ\text{C}$ y hacia el cielo por radiación. La emisividad de la superficie exterior de la pared es $\varepsilon = 0.9$ y se estima que la temperatura efectiva del cielo es de 260 K . Mediante el método de las diferencias finitas, con $\Delta x = \Delta y = 10 \text{ cm}$ y al tomar plena ventaja de la simetría, determine las temperaturas en los puntos nodales de una sección transversal y la razón de la pérdida de calor para una sección de 1 m de largo de la chimenea.

SOLUCIÓN Se considera la transferencia de calor a través de una chimenea cuadrada. Se deben determinar las temperaturas nodales y la razón de la pérdida de calor por unidad de longitud con el método de las diferencias finitas.

Suposiciones 1 La transferencia de calor es estacionaria, ya que no se tiene indicación de cambio con el tiempo. 2 La transferencia de calor a través de la chimenea es bidimensional, puesto que la altura de ella es grande en relación con su sección transversal y, como consecuencia, la conducción de calor a través de la misma en la dirección axial es despreciable. Se intenta simplificar el problema todavía más al considerar la transferencia de calor en cada pared como unidimensional, el cual sería el caso si las paredes fueran delgadas y, por consiguiente, los efectos de las esquinas fueran despreciables. En este caso, dicha suposición no se puede justificar puesto que las paredes son muy gruesas y las secciones de las esquinas constituyen una parte considerable de la estructura de la chimenea. 3 La conductividad térmica es constante.

Propiedades Se dan las propiedades de la chimenea como $k = 1.4 \text{ W/m} \cdot ^\circ\text{C}$ y $\varepsilon = 0.9$.

Análisis En la figura 5-32 se da la sección transversal de la chimenea. El aspecto más sorprendente de este problema es la aparente simetría con respecto a las rectas verticales y horizontales que pasan por el punto medio de la chimenea, así como con respecto a los ejes diagonales, como se indica en la figura. Por lo tanto, en la solución sólo se necesita considerar un octavo de la configuración geométrica, cuya red nodal consta de nueve nodos igualmente espaciados.

Nada de calor puede cruzar una línea de simetría y, como consecuencia, estas rectas se pueden tratar como superficies aisladas y, por consiguiente, como "espejos" en la formulación de diferencias finitas. Entonces los nodos en medio de esas rectas se pueden considerar interiores mediante el uso de imágenes especulares. Seis de los nodos son frontera, de modo que se tendrían que escribir balances de energía para obtener sus formulaciones en diferencias finitas. En principio, se parte la región entre los nodos de manera equitativa al trazar entre ellos líneas punteadas que pasen por la mitad. Entonces la región en torno a un nodo rodeado por la frontera o líneas punteadas representa el elemento de volumen de ese nodo. Si se considera una profundidad unitaria y mediante el procedimiento del balance de energía para los nodos frontera (si se supone una vez más por conveniencia que toda la transferencia de energía es hacia el elemento de volumen) y la fórmula para los interiores, las ecuaciones en diferencias finitas para los nueve nodos se determinan como sigue:

a) Nodo 1. Sobre la frontera interior, sujeto a convección, figura 5-33a,

$$0 + h_i \frac{\Delta x}{2} (T_i - T_1) + k \frac{\Delta y}{2} \frac{T_2 - T_1}{\Delta x} + k \frac{\Delta x}{2} \frac{T_3 - T_1}{\Delta y} + 0 = 0$$

Al tomar $\Delta x = \Delta y = l$, se simplifica a

$$-\left(2 + \frac{h_i l}{k}\right) T_1 + T_2 + T_3 = -\frac{h_i l}{k} T_i$$

b) Nodo 2. Sobre la frontera interior, sujeto a convección, figura 5-33b,

$$k \frac{\Delta y}{2} \frac{T_1 - T_2}{\Delta x} + h_i \frac{\Delta x}{2} (T_i - T_2) + 0 + k \Delta x \frac{T_4 - T_2}{\Delta y} = 0$$

Si $\Delta x = \Delta y = l$, se simplifica a

$$T_1 - \left(3 + \frac{h_i l}{k}\right) T_2 + 2T_4 = -\frac{h_i l}{k} T_i$$

c) Nodos 3, 4 y 5. (Nodos interiores, figura 5-34)

$$\text{Nodo 3: } T_4 + T_1 + T_4 + T_6 - 4T_3 = 0$$

$$\text{Nodo 4: } T_3 + T_2 + T_5 + T_7 - 4T_4 = 0$$

$$\text{Nodo 5: } T_4 + T_4 + T_8 + T_8 - 4T_5 = 0$$

d) Nodo 6. (Sobre la frontera exterior, sujeto a convección y radiación)

$$0 + k \frac{\Delta x}{2} \frac{T_3 - T_6}{\Delta y} + k \frac{\Delta y}{2} \frac{T_7 - T_6}{\Delta x} + h_o \frac{\Delta x}{2} (T_o - T_6) + \varepsilon \sigma \frac{\Delta x}{2} (T_{\text{cielo}}^4 - T_6^4) = 0$$

Si $\Delta x = \Delta y = l$, se simplifica a

$$T_2 + T_3 - \left(2 + \frac{h_o l}{k}\right) T_6 = -\frac{h_o l}{k} T_o - \frac{\varepsilon \sigma l}{k} (T_{\text{cielo}}^4 - T_6^4)$$

e) Nodo 7. (Sobre la frontera exterior, sujeto a convección y radiación, figura 5-35)

$$k \frac{\Delta y}{2} \frac{T_6 - T_7}{\Delta x} + k \Delta x \frac{T_4 - T_7}{\Delta y} + k \frac{\Delta y}{2} \frac{T_8 - T_7}{\Delta x} + h_o \Delta x (T_o - T_7) + \varepsilon \sigma \Delta x (T_{\text{cielo}}^4 - T_7^4) = 0$$

Si $\Delta x = \Delta y = l$, se simplifica a

$$2T_4 + T_6 - \left(4 + \frac{2h_o l}{k}\right) T_7 + T_8 = -\frac{2h_o l}{k} T_o - \frac{2\varepsilon \sigma l}{k} (T_{\text{cielo}}^4 - T_7^4)$$

f) Nodo 8. Igual que el nodo 7, excepto por el desplazamiento de los números del nodo hacia arriba en 1 (reemplace 4 por 5, 6 por 7, 7 por 8 y 8 por 9 en la última relación)

$$2T_5 + T_7 - \left(4 + \frac{2h_o l}{k}\right) T_8 + T_9 = -\frac{2h_o l}{k} T_o - \frac{2\varepsilon \sigma l}{k} (T_{\text{cielo}}^4 - T_8^4)$$

g) Nodo 9. (Sobre la frontera exterior, sujeto a convección y radiación, figura 5-35)

$$k \frac{\Delta y}{2} \frac{T_8 - T_9}{\Delta x} + 0 + h_o \frac{\Delta x}{2} (T_o - T_9) + \varepsilon \sigma \frac{\Delta x}{2} (T_{\text{cielo}}^4 - T_9^4) = 0$$

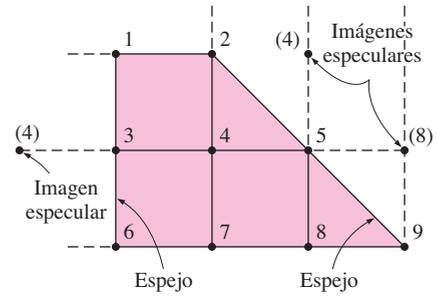


FIGURA 5-34

Conversión de los nodos frontera 3 y 5 que están sobre las rectas de simetría en nodos interiores mediante imágenes especulares.

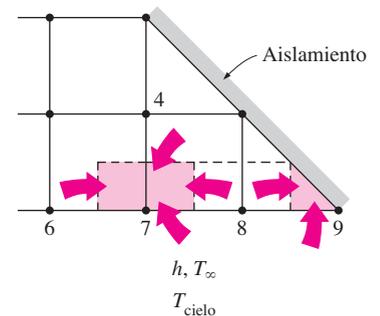


FIGURA 5-35

Esquemas para los balances de energía sobre los elementos de volumen de los nodos 7 y 9.

Si $\Delta x = \Delta y = l$, se simplifica a

$$T_8 - \left(1 + \frac{h_o l}{k}\right) T_9 = -\frac{h_o l}{k} T_o - \frac{\varepsilon \sigma l}{k} (T_{\text{cielo}}^4 - T_9^4)$$

En este problema interviene la radiación, que requiere el uso de temperaturas absolutas y, por tanto, todas las temperaturas deben de expresarse en Kelvin. De modo alternativo, se podría usar °C para todas las temperaturas, siempre que las cuatro temperaturas en los términos de radiación se expresen en la forma $(T + 273)^4$. Al sustituir las cantidades dadas, el sistema de nueve ecuaciones para la determinación de las nueve temperaturas nodales desconocidas, en una forma adecuada para usarse con el método de iteración de Gauss-Seidel, queda

$$T_1 = (T_2 + T_3 + 2865)/7$$

$$T_2 = (T_1 + 2T_4 + 2865)/8$$

$$T_3 = (T_1 + 2T_4 + T_6)/4$$

$$T_4 = (T_2 + T_3 + T_5 + T_7)/4$$

$$T_5 = (2T_4 + 2T_8)/4$$

$$T_6 = (T_2 + T_3 + 456.2 - 0.3645 \times 10^{-9} T_6^4)/3.5$$

$$T_7 = (2T_4 + T_6 + T_8 + 912.4 - 0.729 \times 10^{-9} T_7^4)/7$$

$$T_8 = (2T_5 + T_7 + T_9 + 912.4 - 0.729 \times 10^{-9} T_8^4)/7$$

$$T_9 = (T_8 + 456.2 - 0.3645 \times 10^{-9} T_9^4)/2.5$$

el cual es un sistema de ecuaciones *no lineales*. Mediante un programa para resolver ecuaciones, se determina que su solución es

$$T_1 = 545.7 \text{ K} = 272.6^\circ\text{C} \quad T_2 = 529.2 \text{ K} = 256.1^\circ\text{C} \quad T_3 = 425.2 \text{ K} = 152.1^\circ\text{C}$$

$$T_4 = 411.2 \text{ K} = 138.0^\circ\text{C} \quad T_5 = 362.1 \text{ K} = 89.0^\circ\text{C} \quad T_6 = 332.9 \text{ K} = 59.7^\circ\text{C}$$

$$T_7 = 328.1 \text{ K} = 54.9^\circ\text{C} \quad T_8 = 313.1 \text{ K} = 39.9^\circ\text{C} \quad T_9 = 296.5 \text{ K} = 23.4^\circ\text{C}$$

En la figura 5-36 se muestra la variación de la temperatura en la chimenea.

Note que las temperaturas más elevadas se tienen en la pared interior (pero menores que 300°C) y las más bajas en la exterior (pero mayores que 260 K), como era de esperarse.

La temperatura promedio en la superficie exterior de la chimenea ponderada por el área superficial es

$$\begin{aligned} T_{\text{pared, ext}} &= \frac{(0.5T_6 + T_7 + T_8 + 0.5T_9)}{(0.5 + 1 + 1 + 0.5)} \\ &= \frac{0.5 \times 332.9 + 328.1 + 313.1 + 0.5 \times 296.5}{3} = 318.6 \text{ K} \end{aligned}$$

Entonces se puede determinar aproximadamente la velocidad de la pérdida de calor a través de una sección de 1 m de largo de la chimenea a partir de

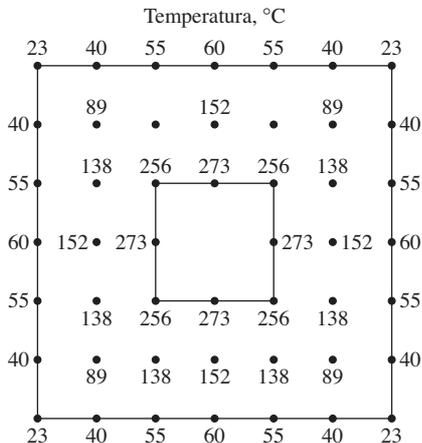


FIGURA 5-36

Variación de la temperatura en la chimenea.

$$\begin{aligned}
 \dot{Q}_{\text{chimenea}} &= h_o A_o (T_{\text{pared, ext}} - T_o) + \varepsilon \sigma A_o (T_{\text{pared, ext}}^4 - T_{\text{cielo}}^4) \\
 &= (21 \text{ W/m}^2 \cdot \text{K}) [4 \times (0.6 \text{ m})(1 \text{ m})] (318.6 - 293) \text{ K} \\
 &\quad + 0.9 (5.67 \times 10^{-8} \text{ W/m}^2 \cdot \text{K}^4) \\
 &\quad [4 \times (0.6 \text{ m})(1 \text{ m})] (318.6 \text{ K})^4 - (260 \text{ K})^4 \\
 &= 1291 + 702 = \mathbf{1\,993 \text{ W}}
 \end{aligned}$$

Se pudo determinar también la transferencia de calor al hallar la temperatura promedio de la pared interior, la cual es $(272.6 + 256.1)/2 = 264.4^\circ\text{C}$, y al aplicar la ley de Newton del enfriamiento en esa superficie:

$$\begin{aligned}
 \dot{Q}_{\text{chimenea}} &= h_i A_i (T_i - T_{\text{pared, int}}) \\
 &= (70 \text{ W/m}^2 \cdot \text{K}) [4 \times (0.2 \text{ m})(1 \text{ m})] (300 - 264.4)^\circ\text{C} = 1\,994 \text{ W}
 \end{aligned}$$

La diferencia entre los dos resultados se debe a la naturaleza aproximada del análisis numérico.

Discusión Se usa un modelo numérico relativamente burdo para resolver este problema para mantener los aspectos complejos en un nivel en el que se pudieran manejar. Se puede mejorar la precisión de la solución obtenida mediante una malla más fina y, de este modo, un número mayor de nodos. Asimismo, cuando interviene la radiación, es más exacto (pero más laborioso) determinar las pérdidas de calor para cada nodo y sumarlas, en lugar de usar la temperatura promedio.

5-5 ■ CONDUCCIÓN DE CALOR EN RÉGIMEN TRANSITORIO

Hasta ahora, en este capítulo se ha aplicado el método de las diferencias finitas a problemas de transferencia de calor *en estado estacionario*. En esta sección se extiende el método para resolver problemas *en régimen transitorio*.

Se aplica el método de las diferencias finitas a los problemas *de estado estacionario* mediante la *diferenciación* del problema en las variables espaciales y resolviendo para las temperaturas en distintos puntos llamados nodos. La solución obtenida es válida para cualquier instante, dado que en condiciones estacionarias las temperaturas no cambian con el tiempo. Sin embargo, en los problemas en régimen transitorio, las temperaturas cambian con el tiempo así como con la posición y, de este modo, la solución en diferencias finitas de este tipo de problemas requiere la *diferenciación en el tiempo* y el espacio, como se muestra en la figura 5-37. Esto se realiza al seleccionar un intervalo apropiado de tiempo, Δt , y resolver para las temperaturas nodales desconocidas varias veces para cada Δt hasta que se obtiene la solución en el instante deseado. Por ejemplo, considere un objeto metálico caliente que se extrae del horno a una temperatura inicial de T_i , en el instante $t = 0$, y se deja enfriar en el aire ambiente. Si se elige un intervalo de tiempo de $\Delta t = 5$ min, la determinación de la distribución de temperatura en la pieza metálica después de 3 h requiere la determinación de la temperatura $3 \times 60/5 = 36$ veces, o sea, en 36 intervalos de tiempo. Por lo tanto, el tiempo requerido de cálculo para este problema será 36 veces el correspondiente a uno de estado estacionario. La elección de un Δt más pequeño aumentará la precisión de la solución, pero también incrementará el tiempo de cálculo.

En los problemas en régimen transitorio se usa el *superíndice* i como el *índice* o *contador* de los intervalos de tiempo, correspondiendo $i = 0$ a la condición inicial específica. En el caso de la pieza metálica caliente antes discu-

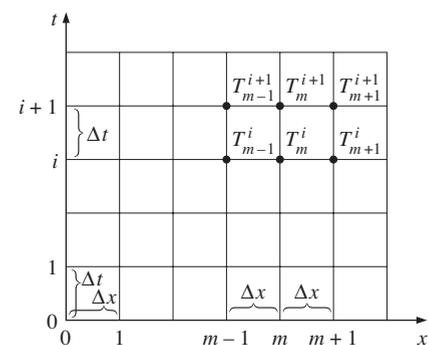


FIGURA 5-37

La formulación en diferencias finitas de problemas que dependen del tiempo comprende puntos discretos en el tiempo así como en el espacio.