2. Vectores en R^2 y R^3

2.1. Definiciones

Iniciamos el análisis con el estudio de vectores en $\mathbf{R^2}$ y $\mathbf{R^3}$. Estos conjuntos se definen de la siguiente manera.

- $\mathbf{R^2} = \{(u_1, u_2)\,|\,u_1, u_2 \in \mathrm{R}\}$
- $\mathbf{R^3} = \{(u_1, u_2, u_3)\,|\,u_1, u_2, u_3 \in \mathrm{R}\}$

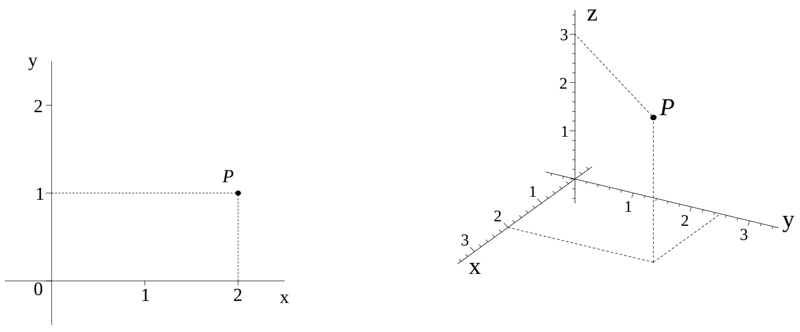
Por ejemplo, $\mathbf{u} = (u_1, u_2) \in \mathbf{R^2}$ denota a un elemento particular de $\mathbf{R^2}$ y a los números u_1 y u_2 se les llama las **componentes** de $\mathbf{u}$.[1] Nótese que los elementos de $\mathbf{R^2}$ son pares ordenados, y los elementos de $\mathbf{R^3}$ son tercias ordenadas. Esto se debe a que el orden en que se colocan las componentes que definen un vector es significativo.

2.2. Representación gráfica

Los vectores en $\mathbf{R^2}$ y $\mathbf{R^3}$ pueden representarse gráficamente como segmentos de recta dirigidos (flechas). Para esto, es necesario definir primero un sistema de coordenadas. Un **sistema de coordenadas** tiene por objeto describir puntos, curvas, superficies u otros objetos matemáticos en el plano o el espacio. Es posible definir una gran cantidad de sistemas de coordenadas y la conveniencia en la elección de uno de ellos en particular depende del problema bajo estudio. El sistema de **coordenadas cartesianas** se define de la siguiente manera. Se elige un punto $\mathcal{O}$ llamado **origen**, y se trazan dos o tres rectas numéricas perpendiculares (es decir, que forman un ángulo de 90^o), según sea el caso de $\mathbf{R^2}$ o $\mathbf{R^3}$, respectivamente, que pasen por el origen. A tales rectas se les llama **ejes de coordenadas**. A cada una de ellas se le asigna una dirección positiva y una escala, no necesariamente la misma, con origen en el punto $\mathcal{O}$. Además, a cada recta numéricas se le asigna un nombre (por ejemplo x, y, z). En la Fig. 1 se muestra un ejemplo para cada uno de los casos en cuestión.

En el caso de $\mathbf{R^3}$, dependiendo de la orientación que se escoja para cada eje de coordenadas (es decir, de la elección de su dirección positiva), se obtiene un sistema de coordenadas orientado a la derecha (sistema derecho) o a la izquierda (sistema izquierdo). El sistema de coordenadas de la Fig. 1(b) es un sistema derecho; al orientar todos los dedos de la mano derecha, excepto el pulgar, a partir de la dirección positiva del eje x y hacia la dirección positiva del eje y, el dedo pulgar apunta hacia

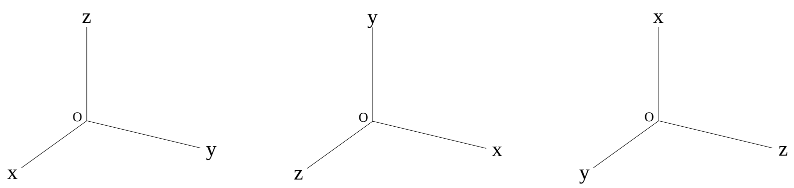
[1] En este documento, a los vectores se les denotará por una letra en negrita



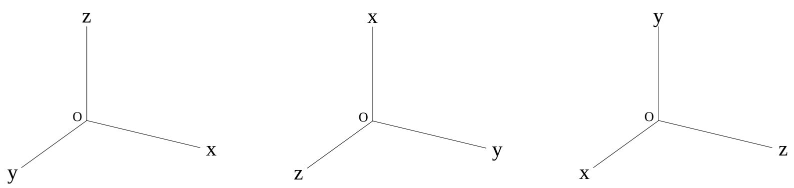
(a) (b)

Figura 1: Coordenadas cartesianas en $\mathbf{R^2}$ y $\mathbf{R^3}$.

la dirección positiva del eje z. De manera análoga, un sistema de coordenadas puede quedar orientado según la mano izquierda. En la Fig. 2 se presentan las orientaciones posibles para sistemas derechos e izquierdos. Nótese que partir de un sistema derecho puede obtenerse otro sistema derecho, pero no uno izquierdo, mediante una rotación de ejes. Lo mismo ocurre entre los sistemas izquierdos.



(a) (b) (c)



(d) (e) (f)

Figura 2: Sistemas de coordenadas en $\mathbf{R^3}$ orientados a la derecha (a) – (c) y a la izquierda (d) – (f).

Cada pareja de ejes de coordenadas define un plano que se designa con el nombre de los ejes seleccionados. Así, en el caso de $\mathbf{R^2}$ se trata del plano xy, y en $\mathbf{R^3}$ se tienen los **planos coordenados** xy, xz y yz. También es conveniente designar a las diferentes regiones del plano y del espacio. $\mathbf{R^2}$ se puede dividir en cuatro regiones llamadas **cuadrantes**, separadas por los ejes de coordenadas, y $\mathbf{R^3}$ en ocho regiones llamadas **octantes**, separadas por los planos coordenados. En las tablas 1 y 2 se indica la manera de designar a cada una de estas regiones.

signo de la componente x	signo de la componente y	cuadrante
+	+	I
-	+	II
-	-	III
+	-	IV

Cuadro 1: Designación de cuadrantes en $\mathbf{R^2}$.

signo de la componente x	signo de la componente y	signo de la componente z	octante
+	+	+	I
-	+	+	II
-	-	+	III
+	-	+	IV
+	+	-	V
-	+	-	VI
-	-	-	VII
+	-	-	VII

Cuadro 2: Designación de octantes en $\mathbf{R^3}$.

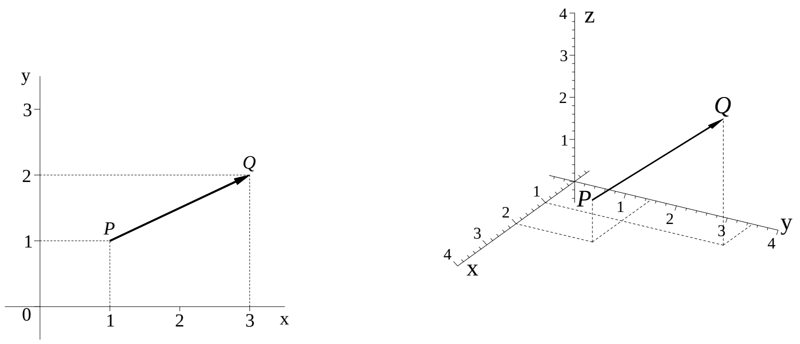
Para localizar al punto $P(x_0, y_0)$, con coordenadas x_0 y y_0, respectivamente, en un sistema de coordenadas cartesianas en $\mathbf{R^2}$, se procede de la siguiente manera. A partir del punto x_0 en el eje x, se traza una recta paralela al eje y, y a partir del punto y_0 sobre el eje y, una recta paralela al eje x. La intersección de estas rectas perpendiculares indica la ubicación del punto P. En la Fig. 1(a) se localiza al punto $P(2, 1)$, el cual está ubicado en el primer cuadrante. Para ubicar al punto $Q(x_0, y_0, z_0) \in \mathbf{R^3}$ se procede de manera similar. Primero, se encuentra el punto de intersección entre dos rectas en uno de los planos de coordenadas. Por ejemplo, se ubica la intersección de las rectas $x = x_0$ y $y = y_0$, en el plano xy. A partir de ese punto se traslada una distancia z_0

(en el sentido indicado por el signo de z_0) sobre una recta paralela al eje z. En la Fig. 1(b) se muestra al punto $P(2, 2{,}5, 3)$, ubicado en el primer octante.

Sea el vector $\mathbf{u} \in \mathbf{R^2}$ con punto inicial en $P(x_1, y_1)$ y punto final en $Q(x_2, y_2)$. Entonces:

$$\mathbf{u} = \overrightarrow{PQ} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1) = (u_1, u_2)\,.$$

En el ejemplo indicado en la Fig. 3(a) se trata del segmento dirigido entre los puntos $P(1, 1)$ y $Q(3, 2)$ y por lo tanto $\mathbf{u} = (2, 1)$.



(a) (b)

Figura 3: Vectores en $\mathbf{R^2}$ y $\mathbf{R^3}$.

La información contenida en un par ordenado es equivalente a la que define a un vector en $\mathbf{R^2}$ como un segmento dirigido caracterizado por su magnitud (tamaño de la flecha) y dirección.[2] La **magnitud** del vector se denota por $||\mathbf{u}||$ y se define como la distancia entre los puntos P y Q:

$$||\mathbf{u}|| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} \tag{1}$$

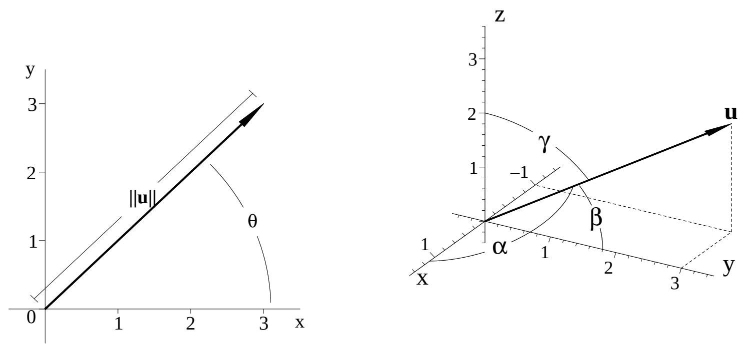
Este resultado coincide con el Teorema de Pitágoras. El sentido del vector está definido por el ángulo θ que éste forma con la dirección positiva del eje x en el sentido contrario a las manecillas del reloj:

$$\theta = \arccos \frac{x_2 - x_1}{||\mathbf{u}||}\,, \quad ||\mathbf{u}|| \neq 0\,, \tag{2}$$

donde $||\mathbf{u}||$ está definido por la Ec. (1). Por lo tanto, también es posible caracterizar a un vector en $\mathbf{R^2}$ por su magnitud, su dirección y por la posición del punto al cual está

[2]Excepto para el vector $\mathbf{0}$ al cual no es posible asignarle una dirección.

anclado el segmento dirigido (el punto inicial).[3] Cuando el punto al cual está anclado el vector es el origen, se le llama un **vector de posición**. Un vector de posición en $\mathbf{R^2}$ se define completamente por su magnitud y dirección pues se entiende que el vector tiene punto inicial en el origen. Esta situación se ilustra en la Fig. 4(a).



(a) (b)

Figura 4: (a) Magnitud y dirección de un vector de posición en $\mathbf{R^2}$ y (b) Ángulos directores de un vector de posición en $\mathbf{R^3}$.

De manera análoga, el segmento dirigido entre los puntos $P(x_1, y_1, z_1)$ y $Q(x_2, y_2, z_2)$ en $\mathbf{R^3}$ corresponde al vector:

$$\mathbf{u} = \overrightarrow{PQ} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1) = (u_1, u_2, u_3)\,,$$

cuya representación gráfica se muestra en la Fig. 3(b) para el vector con punto inicial $P(2, 1{,}5, 1)$ y punto final $Q(1, 3{,}5, 3)$. Un vector en $\mathbf{R^3}$ también puede caracterizarse mediante su magnitud y dirección y por la posición del punto inicial. La magnitud se define como:

$$||\mathbf{u}|| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}\,. \tag{3}$$

Existen varias maneras de definir la dirección de un vector en $\mathbf{R^3}$. En este texto lo haremos en términos de los llamados **ángulos directores**. Se trata de los ángulos que forma el vector con la dirección positiva de cada uno de los ejes de coordenadas x, y y z, y se designan con los símbolos α, β y γ, respectivamente. Los ángulos directores

[3] El análisis de algunas propiedades físicas vectoriales requiere del conocimiento de los puntos iniciales de los vectores. Por ejemplo, la fuerza resultante sobre un objeto se obtiene mediante la suma vectorial de las fuerzas que actúan sobre él sin necesidad de saber en qué punto lo hacen. Véase el ejemplo 2.3.

se obtienen mediante el uso de funciones trigonométricas de la siguiente manera:

$$\alpha = \operatorname{arc\,cos} \frac{x_2 - x_1}{||\mathbf{u}||}\,, \quad \beta = \operatorname{arc\,cos} \frac{y_2 - y_1}{||\mathbf{u}||}\,, \quad \gamma = \operatorname{arc\,cos} \frac{z_2 - z_1}{||\mathbf{u}||}\,, \quad ||\mathbf{u}|| \neq 0\,, \quad (4)$$

donde $||\mathbf{u}||$ está definido por la Ec. (3). La representación gráfica correspondiente se encuentra en la Fig. 4(b) para el caso de un vector de posición en el segundo octante. A los cosenos de los ángulos directores se les conoce como **cosenos directores**.

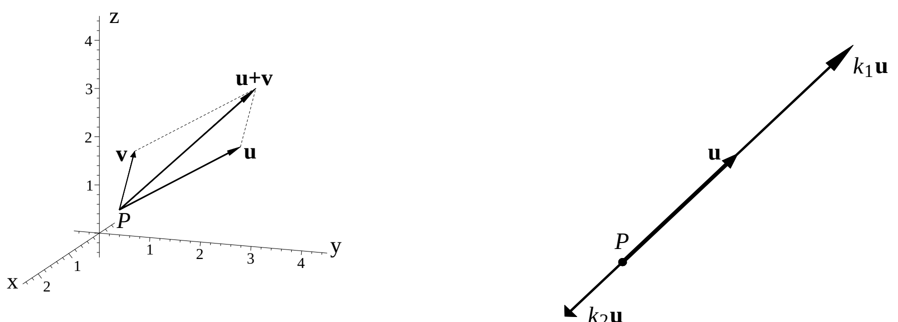
2.3. Suma de vectores y multiplicación por un escalar

Sean $\mathbf{u} = (u_1, u_2, u_3)$, $\mathbf{v} = (v_1, v_2, v_3) \in \mathbf{R^3}$. Sea además $k \in \mathbf{R}$ (un escalar). Se definen las siguientes operaciones:

Suma de vectores: $\mathbf{u} + \mathbf{v} = (u_1 + v_1, u_2 + v_2, u_3 + v_3)$.

Multiplicación de un vector por un escalar: $k\mathbf{u} = (ku_1, ku_2, ku_3)$.

Es decir, los vectores se suman componente a componente, y al multiplicar un vector por un escalar, el producto se realiza sobre todas sus componentes. La resta de vectores se define en términos de las operaciones anteriores: $\mathbf{u} - \mathbf{v} = \mathbf{u} + (-1)\mathbf{v}$. De manera análoga se hacen las definiciones correspondientes en $\mathbf{R^2}$. La suma de vectores y la multiplicación por un escalar también tienen una interpretación geométrica. En la Fig. 5(a) se muestra la suma de vectores en el caso de $\mathbf{R^3}$.



(a) (b)

Figura 5: (a) Suma de vectores y (b) multiplicación por un escalar.

Al vector suma $\mathbf{u} + \mathbf{v}$ también se le llama el **vector resultante**. El vector $k\mathbf{u}$ es un vector paralelo al vector $\mathbf{u}$ cuando $k > 0$ y antiparalelo a él cuando $k < 0$.[4] La

[4] Dos **vectores paralelos** tienen la misma dirección y sentido; dos **antiparalelos**, la misma dirección y sentido opuesto.

magnitud del vector $k\mathbf{u}$, respecto a la del vector $\mathbf{u}$, depende de $|k|$. Esta situación se ilustra en la Fig. 5(b), donde a partir del vector $\mathbf{u}$, anclado al punto P, se obtiene un vector paralelo y uno antiparalelo a él, para $k_1 > 1$ y $k_2 \in (-1, 0)$, respectivamente.

Ejemplos.

2.1 *La velocidad de un objeto A relativa a la de un objeto B se define como* $\mathbf{v}_{\mathrm{A/B}} = \mathbf{v}_A - \mathbf{v}_B$*;* $\mathbf{v}_A$ *y* $\mathbf{v}_B$ *son las velocidades de A y B, respectivamente, con respecto a un sistema de referencia. Consideremos un automóvil que se despaza hacia el norte a 20 km/h y otro que se mueve al oeste a 20 km/h. Un sistema de coordenadas adecuado para este ejemplo tiene por ejes x y y a las rectas sobre las que se desplazan los vehículos, orientados hacia el este y norte, respectivamente. Los vectores correspondientes son* $\mathbf{v}_A = (0, 20)$ *y* $\mathbf{v}_B = (-20, 0)$ *en km/h. Por lo tanto,* $\mathbf{v}_{\mathrm{A/B}} = (20, 20)$*. De acuerdo con un observador en B, el automovil A se desplaza hacia el noreste.*

2.2 *Los vectores* $\mathbf{u} = (2, -8, 6)$ *y* $\mathbf{v} = (1, 4, 3)$ *no son paralelos pues no existe una constante* k *tal que* $\mathbf{u} = k\mathbf{v}$.

2.4. Igualdad de vectores

Dos vectores $\mathbf{u} = (u_1, u_2, u_3)$, $\mathbf{v} = (v_1, v_2, v_3) \in \mathbf{R^3}$ son iguales si y sólo si:

$$u_1 = v_1, \quad u_2, = v_2, \quad u_3 = v_3.$$

La igualdad de vectores en $\mathbf{R^2}$ se define de manera análoga. De acuerdo con esta definición, dos vectores pueden ser iguales aunque no estén anclados al mismo punto.

Ejemplo.

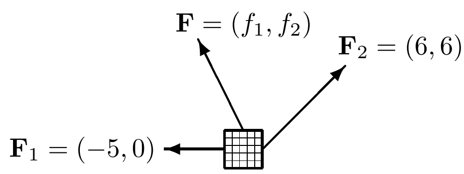
2.3 *La fuerza* $\mathbf{F}$ *necesaria para que la resultante sobre el objeto indicado en la figura sea* $\mathbf{F}_R = (0, 10)$ *N se obtiene a partir de*

$$\mathbf{F}_R = \mathbf{F} + \mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2\,.$$

Como consecuencia de la definición de igualdad de vectores:

$$0 = f_1 - 5N + 6N, \quad 10N = f_2 + 0 + 6N$$

A partir de estas igualdades se obtiene $f_1 = -1$ N y $f_2 = 4$ N.



2.5. Ecuación paramétrica de una recta

Utilizando las definiciones de suma de vectores y multiplicación de un vector por un escalar es posible construir la ecuación paramétrica de una recta. En esta representación, los puntos contenidos en una recta están dados en términos de un conjunto de vectores de posición, como a continuación se indica.

Sean dos puntos $P(x_1, y_1, z_1)$ y $Q(x_2, y_2, z_2)$ contenidos en la misma recta. Sean los vectores $\mathbf{u} = \overrightarrow{OQ}$ y $\mathbf{v} = \overrightarrow{PQ}$. Nótese que $\mathbf{u}$ es un vector de posición con punto final sobre la recta de interés, y que $\mathbf{v}$ es paralelo a la recta. Un vector de posición al punto Q puede expresarse en términos de $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$: $\overrightarrow{OQ} = \mathbf{u} + \mathbf{v}$. De igual manera, un vector de posición a un punto arbitrario $R(x, y, z)$, también contenido en la recta, puede expresarse en términos de los vectores $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$, siempre que éste último sea multiplicado por un escalar t: $\overrightarrow{OR} = \mathbf{u} + t\mathbf{v}$.

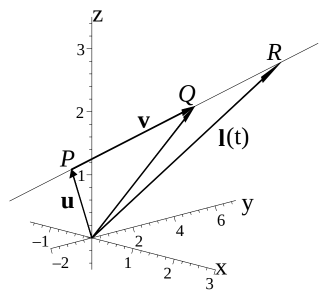


Figura 6: Representación paramétrica de una recta en $\mathbf{R^3}$.

Tal situación se ilustra en la Fig. 6, donde se observa que las coordenadas de todos los puntos contenidos en la recta son iguales a las componentes del vector de posición $\ell(t)$ dado por:

$$\ell(t) = \mathbf{u} + t\mathbf{v}, \quad \text{donde} \quad t \in R \quad \text{y} \quad \mathbf{v} \neq \mathbf{0}\,. \tag{5}$$

La Ec. (5) es la **ecuación paramétrica de la recta**. Se observa que una recta queda definida ya sea por dos puntos contenidos en ella (para poder obtener los vectores $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$), o de manera equivalente por un punto (para obtener al vector $\mathbf{u}$) y un vector que tenga la misma dirección que la recta (el vector $\mathbf{v}$). Dado que el vector de posición a un punto $R(x, y, z)$ contenido en la recta es de la forma

$$\ell(t) = (x, y, z) = (u_1, u_2, u_3) + t(v_1, v_2, v_3)\,,$$

la ecuación parámetrica de la recta puede escribirse especificando cada componente del vector de posición,

$$x = u_1 + tv_1\,, \quad y = u_2 + tv_2\,, \quad z = u_3 + tv_3\,. \tag{6}$$

Además, las siguientes igualdades son equivalentes a las ecuaciones (5) y (6):

$$\frac{x - u_1}{v_1} = \frac{y - u_2}{v_2} = \frac{z - u_3}{v_3} \tag{7}$$

La Ec. (7) se conoce como la **forma simétrica** de la ecuación de la recta en $\mathbf{R^3}$. Concluimos esta sección mencionando que el análisis anterior puede ser realizado también para obtener la representación paramétrica de una recta en $\mathbf{R^2}$.

Ejemplo.

2.4 *Un objeto que se mueve sobre la recta* $\ell(t) = (1-t, 2+t, -3)$*, donde t es el tiempo en segundos, se encuentra en el punto P(0,3,-3) cuando t = 1 s. El vector que indica la dirección del objeto es el vector que define la dirección de la recta,* $\mathbf{v} = (-1, 1, 0)$*; es decir, éste se mueve sobre una recta paralela al plano xy. Véase el ejercicio 5.6.*

2.6. *Ejercicios*

2.1 *Expresar al vector* $\mathbf{u} = (3, 3)$ *en términos de su magnitud y dirección.*

2.2 *Representar gráficamente los vectores de posición* $\mathbf{v} = (3, 5)$ *y* $\mathbf{w} = (3, -1, 4)$*.*

2.3 *Encontrar un vector con punto inicial* $\mathrm{P}(3, -1)$ *y que sea igual al vector* $\mathbf{a} = (2, 6)$*.*

2.4 *Demostar que si* $\mathbf{u}$ *es paralelo a* $\mathbf{v}$ *y* $\mathbf{v}$ *es paralelo a* $\mathbf{w}$*, entonces* $\mathbf{u}$ *es paralelo a* $\mathbf{w}$*.*

2.5 *Sean los vectores* $\mathbf{a} = (2, 1, -3)$ *y* $\mathbf{b} = (-1, 8, 1)$*.*