que contiene a los dos primeros; o bien, mediante la suma de polinomios de grado 2, uno de grado 3. En tales casos, para un vector dado, a partir de la Ec. (9) se obtiene un sistema de ecuaciones inconsistente en el que las incógnitas son los coeficientes de la combinación lineal.

Ejemplo.

3.7 *No es posible expresar al vector* $\mathbf{w} = (1, 6, 4)$ *como combinación lineal de los vectores* $\mathbf{u} = (2, 3, 1)$ *y* $\mathbf{v} = (1, 0, -1)$. *En este caso, la Ec. (9) toma la forma:*

$$\mathbf{w} = k_1\mathbf{u} + k_2\mathbf{v}\,.$$

Al sustituir los vectores anteriores e igualar las componentes, se obtiene el siguiente sistema de ecuaciones lineales inconsistente:

$$\begin{array}{rcrcl} 2k_1 & + & k_2 & = & 1 \\ 3k_1 & & & = & 6 \\ k_1 & - & k_2 & = & 4 \end{array}$$

Geométricamente, ésto significa que el vector $\mathbf{w}$ *no está contenido en el plano generado por* $\mathbf{u}$ *y* $\mathbf{v}$.

3.5. Independencia y dependencia lineal

Sea $\mathbf{V}$ un espacio vectorial. Sean además $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_n \in \mathbf{V}$ y $k_1, k_2, \ldots, k_n \in \mathbf{R}$. El conjunto $\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_n\}$ es **linealmente independiente** si

$$\sum_{i=1}^{n} k_i\mathbf{u_i} = \mathbf{0} \longleftrightarrow k_1 = k_2 = \ldots = k_n = 0\,. \tag{10}$$

Es decir, la única manera de obtener al vector cero como resultado de la combinación lineal de un conjunto de vectores linealmente independiente es que todos los coeficientes de la combinación lineal sean cero. El conjunto será linealmente dependiente cuando la igualdad se cumpla y $\exists\, k_j \neq 0, \quad j \in \{1, 2, \ldots, n\}$. Ésto implica que al menos uno de los vectores del conjunto linealmente dependiente puede ser expresado como combinación lineal de los demás. Sea el conjunto linealmente dependiente, donde $k_j \neq 0$. Entonces:

$$\sum_{i=1}^{n} k_i\mathbf{u_i} \quad = \quad \mathbf{0}\,,$$

$$\mathbf{u}_j \;=\; \sum_{\substack{i=1 \\ i\neq j}}^{n} -\frac{k_i}{k_j}\mathbf{u_i} = \sum_{\substack{i=1 \\ i\neq j}}^{n} c_i\mathbf{u}_i \,,$$

donde $c_i = -k_i/k_j$. Esta situación se ilustra a continuación para $\mathbf{R^3}$.

3.5.1. Interpretación geométrica en $\mathbf{R^3}$

Sean los vectores $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w} \in \mathbf{R^3}$, linealmente dependientes. Sea la combinación lineal de estos vectores igual a cero:

$$k_1\mathbf{u} + k_2\mathbf{v} + k_3\mathbf{w} = 0\,.$$

Por la propiedad de dependendencia lineal, suponemos que $\exists\, k_j \neq 0, j = 1, 2$ ó 3. Sea por ejemplo $k_1 \neq 0$. Entonces:

$$\mathbf{u} = -\frac{k_2}{k_1}\mathbf{u} - \frac{k_3}{k_1}\mathbf{w}\,.$$

Es decir, $\mathbf{u}$ es de la forma:

$$\mathbf{u} = a\mathbf{v} + b\mathbf{w}, \quad a, b \in \mathbf{R}\,,$$

donde $a = -k_2/k_1$ y $b = -k_3/k_1$. Por lo tanto, los vectores $\mathbf{u}$,$\mathbf{v}$ y $\mathbf{w}$ son coplanares (véase Fig. 7). Así, el conjunto $\{\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}\}$ es linealmente dependiente y además no genera $\mathbf{R^3}$ sino sólo un plano, subespacio de este espacio vectorial. Puede suceder que únicamente genere una recta, la cual será también un subespacio de $\mathbf{R^3}$. Incluso puede generar sólo un punto, el origen, que por supuesto también es un subespacio de $\mathbf{R^3}$. Nótese que el conjunto de todas las combinaciones lineales de un conjunto de vectores elementos de $\mathbf{V}$, siempre es un subespacio de $\mathbf{V}$.

De igual manera, si dos vectores son tales que $\mathbf{w} = c\mathbf{v}$, entonces el conjunto $\{\mathbf{v}, \mathbf{w}\}$ es linealmente dependiente y sólo genera una recta, siempre que alguno de ellos sea diferente de $\mathbf{0}$.

Es posible encontrar situaciones donde se tenga un conjunto linealmente independiente que no genera al espacio vectorial del que es subconjunto.