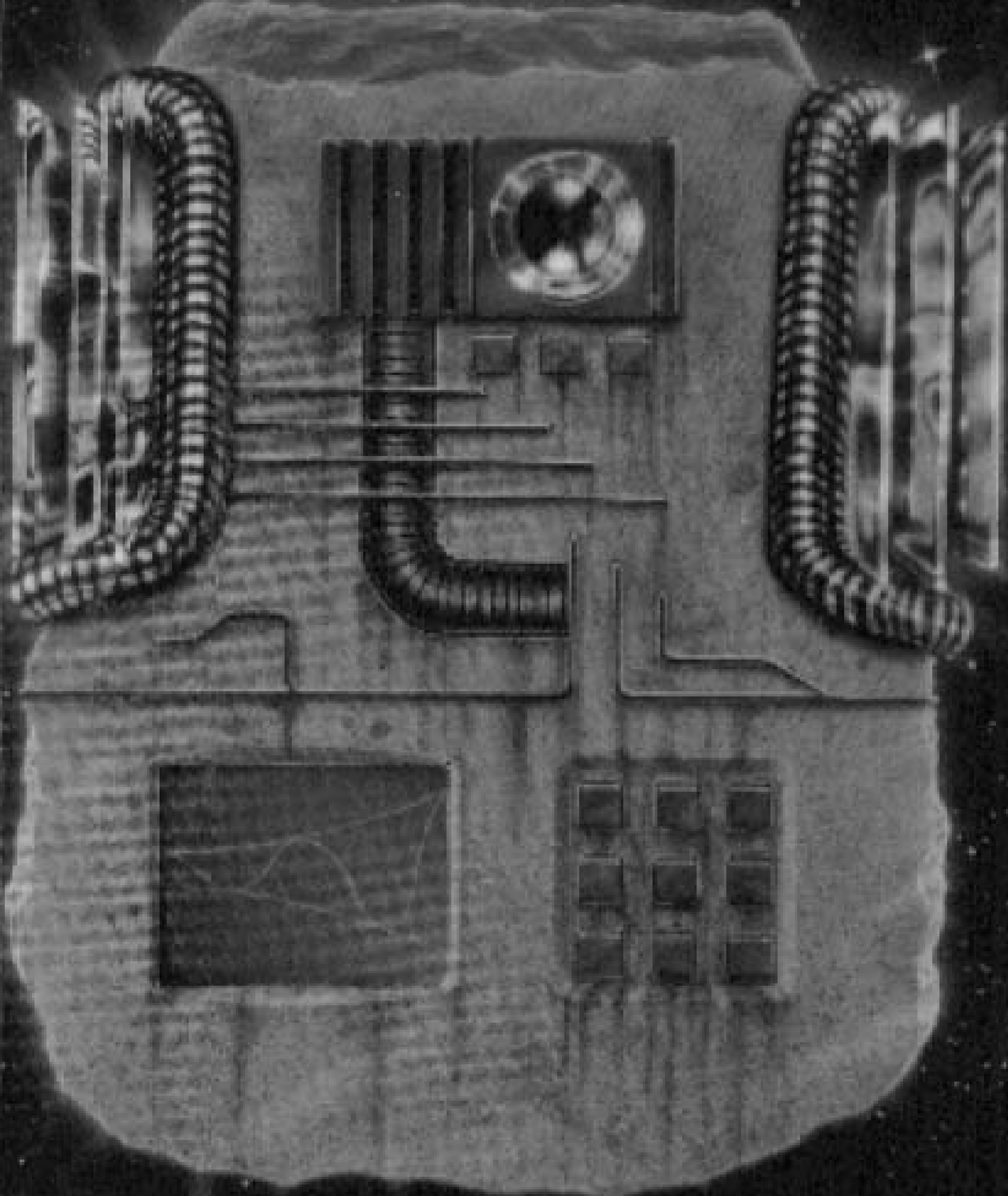
EC7

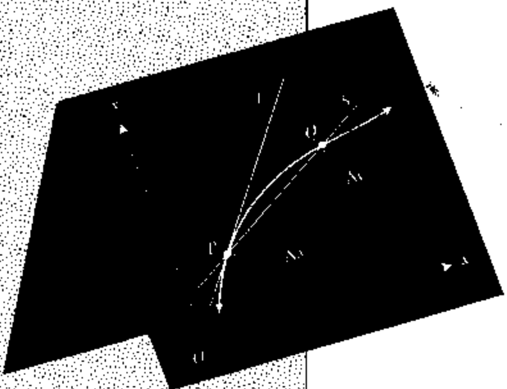
LEITHOLD



EL CÁLCULO · 7 ed.

EL CÁLCULO

7 ed.



Louis Leithold
Pepperdine University

Oxford
University
Press

México • Argentina • Colombia • Chile • Ecuador • Guatemala • Venezuela

DISEÑO PARA LA CUBIERTA

Dan Douke, pintor del Sur de California y actualmente profesor de arte en *California State University* de los Angeles, exhibe su obra de manera regular en *Tortue Gallery*, en Santa Mónica, y en *O. K. Harris Works of Art* en Nueva York. El profesor Douke redactó la siguiente declaración de acuerdo con el cuadro reproducido en la cubierta:

> "El enorme avance de la tecnología en la década final del siglo XX, alentada por los utópicos de la sociedad del Oeste que creen en un paraíso de información electrónica, motivó esta pintura especialmente creada para *EC7*, la cual surge directamente de mi trabajo reciente sobre objetos futuristas. En este cuadro busco mostrar un encuentro con la imagen y la imaginación al borde de la idea fugaz hacia una forma tangible. Deseo que el trabajo tenga un aspecto extrañamente familiar, tal vez como parte de algo más grande, más poderoso y futurista, pero a la vez que parezca usado. El cuadro es de hecho una metáfora que representa el deseo del individuo de buscar y experimentar la adquisición del conocimiento".

Edición: Fidencio Mata González
Alfredo Pérez Guarneros
Producción: Antonio Figueredo Hurtado
Supervisión: Rosario López Santiago
Formación: E. G. Corporación de Servicios Editoriales y Gráficos

EL CÁLCULO. Séptima Edición

OXFORD UNIVERSITY PRESS - HARLA MÉXICO, S.A. de C.V.
Antonio Caso 142, Col. San Rafael, Delegación Cuauhtémoc, C. P. 06470, México, D.F. Tel. 5 92 42 77
Miembro de la Cámara Nacional de la Industria Editorial Mexicana, número de registro 723.

ISBN 970-613-182-5

Traducido de la séptima edición en inglés de:
THE CALCULUS 7

Publicado por acuerdo con Louis Leithold e Interests International, Inc.
ISBN 0-673-46913-1

Impreso en México — *Printed in Mexico*
10 9 8 7 6 5 4 3 2

Esta obra se terminó de imprimir en mayo de 1998
en GRUPO MEXICANO MAPASA, S.A. de C.V.
Emiliano Zapata No. 93
Col. San Juan Ixhuatepec
Tlalnepantla, Edo. de México
C.P. 54180

Se imprimieron 21,000 ejemplares.

A mi hijo Gordon Marc,
sus hijos Justin y Matthew,
y su abuelo David

CONTENIDO

PRÓLOGO

" Todo debe hacerse tan simple como sea posible, pero sin excederse en ello."

Albert Einstein

El Cálculo 7 (de aquí en adelante abreviado como *EC7*) es una obra diseñada tanto para los cursos de especialización en matemáticas como para los estudiantes cuyo interés primario radica en la ingeniería, las ciencias física y sociales, o los campos no técnicos. La exposición está adecuada a la experiencia y madurez del principiante. Las explicaciones detalladas, los abundantes ejemplos desarrollados así como la gran variedad de ejercicios, continúan siendo las características distintivas del texto.

En ningún otro tiempo entre ediciones sucesivas han ocurrido tantos cambios en la enseñanza del Cálculo como en el periodo entre las ediciones sexta y séptima de este texto. Muchos de estos cambios son el resultado de la disponibilidad de la tecnología moderna en la forma de calculadora gráfica o graficadora manual. Algunos otros cambios se deben al movimiento denominado *reforma del Cálculo*. He invitado a seguir este movimiento observando el principio: REFORMA CON RAZÓN. Con el fin de apegarme a este principio, he aplicado las siguientes guías:

1. La tecnología debe incorporarse para mejorar la enseñanza y el aprendizaje del Cálculo, *no* para reemplazar las matemáticas o restar importancia a los temas teóricos.
2. Las definiciones y teoremas deben establecerse formalmente, *no* informalmente.
3. Los estudiantes deben estar concientes de que las demostraciones de los teoremas son necesarias.
4. Cuando se presenta una demostración, debe ser bien motivada y cuidadosamente explicada, de modo que sea entendible para cualquiera que haya alcanzado un dominio promedio de las secciones anteriores del libro.
5. Cuando se establece un teorema sin demostración, la discusión debe aumentarse mediante figuras y ejemplos; en tales casos, debe enfatizarse el hecho de que lo que se presenta es un ejemplo ilustrativo de la proposición del teorema y *no* una demostración del mismo.
6. Debe darse importancia a los modelos matemáticos de las aplicaciones de la vida real.
7. Debe destacarse la redacción en matemáticas.

Los catorce capítulos de *EC7* pueden clasificarse en dos partes: capítulos 1–9, en los que se estudian funciones de una variable y series infinitas; capítulos 10–14, en los que se tratan vectores y funciones de más de una variable. En *EC7* se han realizado cambios en las dos partes. En todo el libro se mantiene un sano equilibrio entre un estudio riguroso y un punto de vista intuitivo, incluso en las modificaciones.

Con objeto de alcanzar los objetivos planteados, se han incorporado las siguientes características:

GRAFICADORA "ACTIVA"

A lo largo de la presentación, *EC7* utiliza la calculadora gráfica o graficadora manual no sólo como un poderoso y fascinante instrumento para el aprendizaje, sino como un instrumento fundamental en la solución de problemas. Se ha integrado la graficadora directamente a la exposición de acuerdo a la filosofía que he aprendido en mis tres veranos con TICAP (Technology Intensive Calculus for Advanced Placement) la cual se resume como sigue:

1. Trabajar *analíticamente* (con papel y lápiz); después **apoyar** *numérica* y *gráficamente* (con la graficadora).
2. Trabajar *numérica* y *gráficamente*; después **confirmar** *analíticamente.*
3. Trabajar *numérica* y *gráficamente* debido a que otros métodos *no son prácticos* o *posibles.*

MODELOS MATEMÁTICOS Y PROBLEMAS VERBALES

Los modelos matemáticos de situaciones prácticas presentadas como problemas verbales surgen en diversos campos como física, química, ingeniería, administración, economía, psicología, sociología, biología y medicina. Las funciones como modelos matemáticos se introducen primero en la sección 1.3 y aparecen con frecuencia en el resto del texto. La sección 1.3 contiene sugerencias para obtener una función como modelo matemático paso a paso.

REDACCIÓN EN MATEMÁTICAS

A fin de completar la solución de cada ejemplo de un problema verbal, se presenta una *conclusión* que responde a las preguntas de éste. El estudiante debe redactar una conclusión semejante, que consista en una o más oraciones completas, para cada ejercicio similar. Al final de cada grupo de ejercicios hay uno o dos de redacción los cuales pueden preguntar sobre *cómo* o *por qué* funciona un procedimiento determinado, o bien, pueden pedirle al estudiante que *describa*, *explique* o *justifique* un proceso particular.

EJERCICIOS

Los ejercicios, revisados de las ediciones anteriores y ordenados por grados de dificultad, proporcionan una gran variedad de tipos de problemas que van desde cálculos y aplicaciones hasta problemas teóricos para la calculadora y ejercicios de redacción, como los mencionados anteriormente. Éstos aparecen al final de cada sección y como ejercicios de repaso al final de cada capítulo.

EJEMPLOS Y EJEMPLOS ILUSTRATIVOS

Los *ejemplos*, cuidadosamente seleccionados, habilitan a los estudiantes en la resolución de los ejercicios, y además sirven como modelos para sus soluciones. Se utiliza un *ejemplo ilustrativo* a fin de mostrar un concepto, definición o teorema particular; es un prototipo de la idea expuesta.

PROGRAMA DE ARTE VISUAL (FIGURAS)

Todas las figuras se han vuelto a trazar para *EC7*. Las gráficas trazadas en la graficadora se muestran en una pantalla de graficadora enmarcada por un borde de color más oscuro a diferencia de las gráficas dibujadas a mano. Todas las figuras tridimensionales se han generado mediante computadora con el fin de obtener precisión matemática. Estas figuras, que son más vívidas que en las ediciones anteriores, fueron creadas con la ayuda de *Matemática®* y *Adobe Illustrator®*.

ASPECTOS PEDAGÓGICOS

Cada capítulo comienza con una introducción titulada *VISIÓN PRELIMINAR*. Al final de cada capítulo se muestra una lista de sugerencias para su revisión. Juntos, estos aspectos sirven como una reseña, de principio a fin del capítulo, cuando el estudiante se prepara para un examen.

DESCRIPCIÓN DE CADA CAPÍTULO

Capítulo 1 Funciones, límites y continuidad

Los tres temas del título de este capítulo conforman la base de cualquier primer curso de Cálculo. Se exponen todos los teoremas de límites incluyendo algunas demostraciones en el texto, mientras que otras se esbozan en los ejercicios. La sección 1.3, nueva en esta edición, presenta las funciones como modelos matemáticos anticipadamente de su uso posterior en aplicaciones. En consecuencia, estos modelos proporcionan al estudiante una vista preliminar de cómo se aplica el Cálculo en situaciones reales. La sección 1.4, también nueva, utiliza la graficadora para introducir el concepto de límite de una función.

Capítulo 2 Derivada y diferenciación

En la sección 2.1 se define la recta tangente a la gráfica de una función antes de estudiar la derivada, esto con el propósito de mostrar un avance de la interpretación geométrica de este concepto. Las aplicaciones físicas de la derivada en el estudio del movimiento rectilíneo se presentan sólo después de haber demostrado los teoremas sobre diferenciación, de modo que dichos teoremas pueden emplearse en estas aplicaciones. En la sección 2.7 se estudian las derivadas de las seis funciones trigonométricas y después se emplean como ejemplos para la presentación inicial de la regla de la cadena en la siguiente sección. La derivada numérica, tema nuevo en esta edición y presentado en la sección 2.3, se utiliza junto con la graficadora para aproximar derivadas y para trazar sus gráficas. En la sección 2.4 se simula el movimiento de una partícula sobre una línea recta.

Capítulo 3 Comportamiento de las funciones y sus gráficas, valores extremos y aproximaciones

En este capítulo se presentan las aplicaciones tradicionales de la derivada que implican máximos y mínimos así como el trazado de una curva. Los límites al infinito y sus aplicaciones para determinar asíntotas horizontales se han cambiado a este capítulo donde se aplican a fin de dibujar gráficas. La graficadora se utiliza frecuentemente con el objeto de apoyar los resultados obtenidos de forma analítica así como para conjeturar propiedades de las funciones, las cuales se confirman después analíticamente. Un aspecto nuevo de esta edición está relacionado con los ejercicios, donde se le pide al estudiante que dibuje la gráfica de una función a partir de la gráfica de su derivada y viceversa. En la sección final del capítulo se presenta la aproximación mediante la recta tangente junto con el método de Taylor y el de diferenciales.

Capítulo 4 Integral definida e integración

Las dos primeras secciones tratan sobre antiderivación (o antidiferenciación). Se utiliza el término antiderivación en lugar de *integración indefinida,* sin embargo, se conserva la notación estándar $\int f(x)\,dx$. Esta notación sugerirá que debe existir alguna relación entre integrales definidas y antiderivadas, pero no veo perjuicio alguno en lo anterior, en tanto la presentación proporcione un panorama teóricamente apropiado de la definición de la integral definida como un límite de sumas. Dichos límites se aplican primero para definir el área de una región plana y después se utilizan en la definición de la integral definida. La capacidad de la graficadora para aproximar el valor de una integral definida se presenta antes de la demostración del segundo teorema fundamental del Cálculo, utilizado para obtener valores de integrales analíticamente. Esta capacidad permite demostrar propiedades de la integral definida en una graficadora tal como se desarrollan. La sección 4.3, sobre ecuaciones diferenciales separables, presenta aplicaciones sobre el movimiento rectilíneo, donde el movimiento se simula en la graficadora. Otras aplicaciones de los conceptos de este capítulo incluyen el estudio completo del área de una región plana así como el volumen de sólidos, presentados posteriormente en la edición anterior. La sección 4.9 se inicia con el cálculo de volúmenes mediante el método de rebanado, se continúa con la determinación de volúmenes de sólidos de revolución mediante los métodos de discos y de arandelas, considerados como casos especiales del método de rebanado. En la sección 4.10 se determinan los volúmenes de sólidos de revolución mediante el método de capas cilíndricas.

Capítulo 5 Funciones logarítmicas, exponenciales, trigonométricas inversas e hiperbólicas

En la primera sección se tratan las funciones inversas, y las cinco secciones siguientes se dedican a las funciones logarítmica y exponencial. Primero se define la función logarítmica natural y después la función exponencial natural como su inversa. Este procedimiento permite dar un significado preciso de un exponente irracional de un número positivo. Posteriormente se define la función exponencial de base *a*, donde *a* es positivo. Las aplicaciones de estas funciones incluyen las leyes naturales de crecimiento y decaimiento, el crecimiento limitado implica la curva de aprendizaje, y la función de densidad de probabilidad normal estandarizada. Las tres últimas secciones se dedican a las funciones trascendentes (no algebraicas) restantes: las funciones trigonométricas inversas y las funciones hiperbólicas.

Capítulo 6 Aplicaciones adicionales de la integral definida

En este capítulo se presentan las aplicaciones de la integral definida, no sólo las técnicas de manipulación sino también los principios fundamentales involucrados. La longitud de arco, una aplicación geométrica, se trata en la sección 6.1. Las otras cuatro secciones están dedicadas a aplicaciones físicas, las cuales incluyen centro de masa de una barra y de regiones planas, trabajo y fuerza ejercida por la presión de un líquido. En cada aplicación, se motivan y explican intuitivamente las definiciones de los términos nuevos. Se han vuelto a escribir todas las secciones y se han agregado ejemplos, en algunos de ellos se utiliza la graficadora para aproximar el valor de la integral definida.

Capítulo 7 Técnicas de integración, formas indeterminadas e integrales impropias

Las técnicas de integración constituyen uno de los aspectos más importantes de las operaciones del Cálculo. Estas técnicas se estudian en las primeras cinco secciones, tratadas en ocho en la edición anterior. Después de una motivación introductoria, se explican los fundamentos teóricos de cada uno de los métodos. El dominio de las técnicas de integración depende de los ejemplos, y se han utilizado como problemas ilustrativos que, seguramente, el estudiante enfrentará en la práctica. En la sección 7.4 se presentan otras dos aplicaciones de la integración: crecimiento logístico, que surge en economía, biología y sociología; y la ley química de acción de masas. En la sección 7.6 se estudian dos métodos numéricos para aproximar integrales definidas. Estos procedimientos son importantes debido a que resultan muy adecuados para el uso de computadoras y graficadoras. Los temas sobre aproximación de integrales definidas incluyen el establecimiento de teoremas acerca de las cotas para el error implicado en estas aproximaciones. Las cuatro secciones restantes, que tratan acerca de las formas indeterminadas e integrales impropias, se han reubicado en esta edición; preceden inmediatamente a los temas de series, en donde se aplican muchos de los resultados obtenidos. Las aplicaciones de las integrales impropias incluyen la función de densidad de probabilidad así como algunas otras relacionadas con geometría y economía.

Capítulo 8 Aproximaciones polinomiales, sucesiones y series infinitas

Las secciones acerca de sucesiones y series se han considerado en un solo capítulo y no en dos como en la edición anterior. Todos los temas se incluyen, pero algunas de las discusiones se han acortado sin sacrificar la integridad matemática. Este capítulo es independiente y puede estudiarse en cualquier momento después de completar los primeros siete capítulos. La primera sección trata acerca de aproximaciones polinomiales mediante la fórmula de Taylor. Esta fórmula se generaliza a la serie de Taylor en la sección 8.9. Las secciones 8.2–8.6 se han dedicado a las sucesiones y series infinitas de términos constantes, y en la sección 8.6 se presenta un resumen de los criterios de convergencia para series infinitas. En las secciones 8.7–8.10 se estudian las series de términos variables denominadas series de potencias. Los temas de este capítulo conducen por sí mismos a la incorporación de la graficadora, no sólo para facilitar el estudio sino que permite a los estudiantes examinar e investigar la convergencia o divergencia de una serie infinita y de aproximaciones polinomiales.

Capítulo 9 Ecuaciones paramétricas, curvas planas y gráficas polares

Los tres temas de este capítulo se han agrupado para completar el estudio del cálculo de una variable. Las dos primeras secciones tratan sobre ecuaciones paramétricas y curvas planas, constituyen un requisito previo para el estudio de vectores. En las dos secciones siguientes se estudian gráficas polares, mientras que en la sección final se presenta un tratamiento unificado de las secciones cónicas y las ecuaciones polares de las cónicas. La discusión de las secciones cónicas en coordenadas rectangulares ahora se estudian por lo general en un curso previo al Cálculo, en esta edición se tratan en el apéndice.

Capítulo 10 Vectores, rectas, planos y superficies en el espacio

En esta edición, los vectores bidimensionales y tridimensionales se estudian en el mismo capítulo y no en forma separada como en ediciones anteriores. En la sección 10.1 se definen los vectores en el plano. En la sección 10.2, antes de definir un vector tridimensional, se presenta el espacio numérico tridimensional, el cual se denota por R^3. En el capítulo también se proporciona una introducción vectorial a la geometría analítica sólida al estudiar, en la sección 10.4, rectas y planos en R^3, y superficies en la sección 10.6.

Capítulo 11 Funciones vectoriales

De igual manera que con los vectores en el capítulo 10, en este capítulo se estudian las funciones vectoriales tanto en el plano como en el espacio tridimensional. Las curvas en los dos espacios, definidas mediante una función vectorial o por medio de un conjunto de ecuaciones paramétricas, así como sus propiedades también se estudian simultáneamente. Las aplicaciones de este capítulo tratan acerca de geometría, física e ingeniería. En la sección 11.5, sobre movimiento curvilíneo, se utiliza la graficadora para simular en movimiento de un proyectil en un plano.

Capítulo 12 Cálculo diferencial de funciones de más de una variable

Los temas contenidos en este capítulo se han reunido y condensado de dos capítulos de las ediciones anteriores, otra vez sin afectar la integridad matemática. En las primeras cinco secciones se estudian límites, continuidad, derivadas parciales, diferenciabilidad y la regla de la cadena para funciones de más de una variable. Las aplicaciones de estas secciones incluyen la determinación de tasas de variación y el cálculo de aproximaciones. La sección 12.6, sobre derivadas direccionales y gradientes, precede a una sección que muestra la aplicación del gradiente en la determinación de planos tangentes y rectas normales a superficies. Otras aplicaciones de las derivadas parciales se presentan en las dos últimas secciones y tratan sobre problemas de extremos y multiplicadores de Lagrange.

Capítulo 13 Integración múltiple

El Cálculo integral de funciones de más de una variable, contenido en las secciones 13.2–13.6, es precedido por una sección en la que se estudian coordenadas cilíndricas y esféricas, reubicadas en esta edición, de modo que estén más cerca a los temas en que se aplican. Las integrales dobles de las funciones de dos variables se estudian en la sección 13.2 y en las dos secciones siguientes se aplican a la física, ingeniería y geometría.

Capítulo 14 Introducción al Cálculo de campos vectoriales

En las seis secciones de este capítulo final se presenta un estudio amplio del Cálculo vectorial. Este estudio incluye campos vectoriales, integrales de línea, el teorema de Green, el teorema de la divergencia de Gauss y el teorema de Stokes. La presentación de estos temas es intuitiva y las aplicaciones son acerca de física e ingeniería.

Apéndice

Los temas de álgebra, trigonometría y geometría analítica, por lo común se estudian en cursos previos al Cálculo, ahora se presentan en el apéndice, dejando así el cuerpo principal del texto para temas estrictamente de Cálculo. Esta modificación tiene como consecuencia el hecho de que las palabras *con geometría analítica* no aparecen en el título de esta edición. Las secciones del apéndice pueden cubrirse en detalle, como un repaso o pueden omitirse por completo, dependiendo de la preparación de los estudiantes de cada grupo.

Secciones suplementarias

Las secciones suplementarias se encuentran después del apéndice; estas secciones contienen temas que pueden ser cubiertos u omitidos sin afectar la comprensión del material subsecuente. Estas secciones designadas mediante el número de la sección del cuerpo principal del texto, contienen discusiones teóricas y algunas de las demostraciones más difíciles.

LOUIS LEITHOLD

RECONOCIMIENTOS

REVISORES

Benita Albert, Oak Ridge High School
Daniel D. Anderson, University of Iowa
Richard Armstrong, Saint Louis Community College at Florissant Valley
Carole A. Bauer, Triton College
Jack Berman, Northwestern Michigan College
Michael L. Berry, West Virginia Wesleyan College
James F. Brown, Midland College
Phillip Clarke, Los Angeles Valley College
Charles Coppin, University of Dallas
Larry S. Dilley, Central Missouri State University
Peter Embalabala, Linclon Land Community College
Leon Gerber, Saint John's University
Ronald E. Goetz, Saint Louis Community College at Maramac
William L. Grimes, Central Missouri State University
Kay Hodge, Midland College
Charles S. Johnson, Los Angeles Valley College
John E. Kinikin, Arcadia High School
Stephen Kokoska, Bloomsburg University of Pennsylvania Ron Lancaster
Benny Lo, Ohlone College
Miriam Long, Madonna University
Robert McCarthy, Community College of Allegheny County
Lawrence P. Merbach, North Dakota State College of Science
Janet Mills, Seattle University
James M. Parks, State University of New York College at Potsdam
Terry Reeves, Red Rock Community College
William H. Richardson, Wichita State University
Ricardo A. Salinas, San Antonio College
Lillian Seese, Saint Louis Community College at Maramac
Luzviminda Villar Shin, Los Angeles Valley College
Lawrence Small, Los Angeles Pierce College
James Smolko, Lakeland Community College
Armond E. Spencer, State University of New York College at Potsdam
Anthony E. Vance, Austin Community College
Jan Vandever, South Dakota State University
Gerald L. White, Western Illinois University
Douglas Wilberscheid, Indian River Community College
Don Williams, Brazosport College
Andre L. Yandl, Seattle University

PREPARACIÓN DE SOLUCIONES Y RESPUESTAS DE LOS EJERCICIOS

Leon Gerber, Saint John's University, asistido por Samuel Gerber

REVISORES DE LAS RESPUESTAS DE LOS EJERCICIOS

Ronald E. Goetz, Saint Louis Community College at Maramac
Charles S. Johnson, Los Angeles Valley College
Robert McCarthy, Community College of Allegheny County
Lawrence P. Merbach, North Dakota State College of Science
Luzviminda Villar Shin, Los Angeles Valley College
Armond E. Spencer, State University of New York College at Potsdam

DISEÑO DE LA CUBIERTA

Dan Douke, cortesía de Tortue Gallery, Santa Mónica

Para estas personas, para el cuerpo técnico de HarperCollins College Publishers y todos los usuarios de las seis ediciones anteriores ofrezco mi más profundo reconocimiento. Deseo agradecer especialmente a Leon Gerber, Saint John's University, y Lawrence Small, Los Angeles Pierce College, por sus esfuerzos diligentes en la revisión del manuscrito en sus diferentes versiones antes de la publicación así como por sus contribuciones significativas a los ejercicios nuevos de esta edición. También agradezco a mi editor, Kevin Connors, HarperCollins College Publishers, por su firme dedicación, coraje y apoyo para este proyecto

L.L.

MATERIAL SUPLEMENTARIO PARA EL CÁLCULO*

Para el estudiante

An Outline for the Study of Calculus (**Un esbozo para el estudio del Cálculo**) por Leon Gerber, de Saint John's University y John Minnick, de DeAnza College.

Para ayudar a los estudiantes en su estudio de *EC7*, este manual, en tres volúmenes, contiene las soluciones detalladas paso a paso de todos los ejercicios cuyo número es divisible entre 4. Los manuales también contienen todos los teoremas y definiciones importantes así como exámenes simples con sus soluciones para cada capítulo.

Para el profesor

Instructor's Solutions Manual for THE CALCULUS 7 (**Manual de soluciones para el profesor**) por Leon Gerber, de Saint John's University.

Este manual, en dos volúmenes, contiene las soluciones para todos los ejercicios de *EC7.*

Test Generator/Editor with Quizmaster (**Generador de exámenes/Editor con Quizmaster**)

Este banco de exámenes computarizado está disponible en versiones para DOS y Macintosh, y puede trabajarse completamente en redes. El *Generador de Exámenes*, escrito para *EC7*, puede emplearse para seleccionar problemas y preguntas al elaborar exámenes ya preparados. El *Editor* permite a los profesores editar cualesquiera datos preexistentes o crear sus propias preguntas. *Quizmaster* permite a los instructores crear exámenes y cuestionarios del *Generador de Exámenes* y almacenarlos en discos de modo que puedan ser utilizados por los estudiantes en computadoras personales o en una red.

También está disponible un banco de exámenes impresos que incluye todos los problemas y preguntas del banco de exámenes computarizado.

Libros auxiliares de interés para estudiantes y profesores de Cálculo publicados por Oxford University Press, Harla, México

Estos materiales se encuentran listados en la tercera de forros de este libro.

* **N. del E.** Este material sólo está disponible en inglés. En un futuro próximo esta editorial tendrá el "Manual de resoluciones para el profesor".

ASPECTOS HISTÓRICOS DEL CÁLCULO

Algunas de los ideas fundamentales del Cálculo se remontan a los antiguos matemáticos griegos del tiempo de **Arquímedes** (287-212 a.C.) así como a los trabajos de los primeros años del siglo XVII realizados por **René Descartes** (1596-1650), **Pierre de Fermat** ((1601-1665), **John Wallis** (1616-1703) e **Isaac Barrow** (1630-1677). Sin embargo, la invención del Cálculo se atribuye a **Sir Isaac Newton** (1642-1727) y **Gottfried Wilhelm Leibniz** (1646-1716) debido a que ellos iniciaron la generalización y unificación de estos conceptos matemáticos. Asimismo, otros matemáticos de los siglos XVII y XVIII intervinieron en el desarrollo del Cálculo, algunos de ellos fueron: **Jakob Bernoulli** (1654-1705), **Johann Bernoulli** (1667-1748), **Leonhard Euler** (1707-1783) y **Joseph L. Lagrange** (1736-1813). No obstante, no fue sino hasta el siglo XIX en que se establecieron los fundamentos de las nociones y de los procesos del Cálculo por matemáticos tales como **Bernhard Bolzano** (1781-1848), **Augustin L. Cauchy** (1789-1857), **Karl Weierstrass** (1815-1897) y **Richard Dedekin** (1831-1916).

PREPARACIÓN PARA EL ESTUDIO DEL CÁLCULO

Aprender Cálculo puede ser una de las experiencias educacionales más estimulantes y excitantes. Para que esto sea así, usted debe iniciar su curso de Cálculo con el conocimiento de ciertos conceptos de matemáticas concernientes a álgebra, geometría, trigonometría y geometría analítica.

Los temas de álgebra, trigonometría y geometría analítica de especial importancia se presentan en las secciones A.1–A.11 del apéndice al final del libro. Las propiedades específicas de los números reales así como algunas notaciones básicas se presentan en la sección A.1. Debe familiarizarse con estos temas antes de iniciar el capítulo 1. Refiérase a las secciones A.2–A.8 y A.10 para revisar los temas de geometría analítica. En la sección A.9 se estudian las funciones trigonométricas. Tal vez necesite estudiar la sección A.11, donde se presentan las fracciones parciales, antes de tratar la sección 7.4 sobre integración de funciones racionales.

La visualización mediante gráficas juega un papel importante en el estudio del Cálculo. Estas gráficas se obtendrán en dos formas: a mano y mediante un dispositivo de graficación automático de alta velocidad como las graficadoras y computadoras con el *software* apropiado. Estos dispositivos funcionan de manera similar, pero para el estudiante resultará más práctico utilizar una graficadora que una computadora personal. En consecuencia, en el texto se empleará la graficadora.

Cuando se trate de una gráfica realizada a mano se usará la terminología *dibuje la gráfica*, y cuando deba emplear un dispositivo electrónico en su elaboración se indicará *trace la gráfica*. Las gráficas trazadas en una graficadora están representadas por figuras que muestran una pantalla de graficadora enmarcada por un rectángulo y las ecuaciones de las gráficas mostradas se indican en la parte inferior de la pantalla. Las graficadoras no son estrictamente automáticas debido a que requieren de un operador (una persona que las haga funcionar) que presione teclas específicas; sin embargo, como estas teclas dependen del fabricante y del modelo de la graficadora, deberá consultar el manual de funcionamiento para obtener información sobre cómo realizar operaciones específicas.

Con los conocimientos básicos preliminares, está usted preparado para iniciar su curso de Cálculo, que es el fundamento para muchas de las ramas matemáticas y para la mayoría de los conocimientos del mundo moderno.

EL CÁLCULO

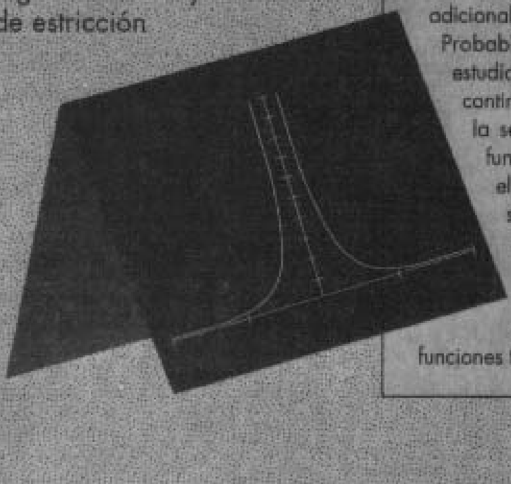
Capítulo

1

Funciones, límites y continuidad

VISIÓN PRELIMINAR

- **1.1** Funciones y sus gráficas
- **1.2** Operaciones con funciones y tipos de funciones
- **1.3** Funciones como modelos matemáticos
- **1.4** Introducción gráfica a los límites de funciones
- **1.5** Definición de límite de una función y teoremas sobre límites
- **1.6** Límites laterales
- **1.7** Límites infinitos
- **1.8** Continuidad de una función en un número
- **1.9** Continuidad de una función compuesta y continuidad en un intervalo
- **1.10** Continuidad de las funciones trigonométricas y teorema de estricción



Indudablemente habrá tratado funciones en sus cursos anteriores de matemáticas, y debido a que son fundamentales en Cálculo y sirven como un concepto unificador a lo largo de este texto, se dedicarán las dos primeras secciones a su estudio. La sección 1.3 está designada para proporcionarle práctica en la obtención de funciones como modelos matemáticos de situaciones del mundo real así como para mostrarle algunas aplicaciones del Cálculo.

Las dos operaciones matemáticas fundamentales en Cálculo son la *diferenciación* y la *integración*. Estas operaciones implican la determinación de la *derivada* y de la *integral definida*, cada una con base en la noción de *límite*, probablemente el concepto más importante en Cálculo. Se inicia el estudio de límites en la sección 1.4 mediante una introducción gráfica a los límites de funciones. Primero se proporciona una fundamentación paso a paso de la noción de límite, la cual comienza con el cálculo del valor de una función que se aproxima a un número y termina desarrollando una noción intuitiva del proceso de límite. La definición formal de límite y los teoremas sobre límites se introducen el la sección 1.5 para simplificar cálculos de límites de funciones algebraicas elementales. En las secciones 1.6 y 1.7, se extiende el concepto de límite para incluir tipos de funciones adicionales y límites infinitos.

Probablemente la clase de funciones más importante estudiados en Cálculo sean las *funciones continuas*. La continuidad de una función en un número se define en la sección 1.8 mientras que la continuidad de una función compuesta, la continuidad en un intervalo y el teorema del valor intermedio son temas de la sección 1.9. *El teorema de estricción* se presenta en la sección 1.10 y se aplica ahí para determinar el límite del cociente de sen t conforme t se aproxima a cero. Este resultado es importante al estudiar la continuidad de las funciones trigonométricas en esta misma sección.

1.1 FUNCIONES Y SUS GRÁFICAS

Con frecuencia, en las aplicaciones prácticas el valor de una variable depende del valor de otra. Por ejemplo, el salario de una persona puede depender del número de horas que trabaje; la producción total de una fábrica puede depender del número de máquinas que se utilicen; la distancia recorrida por un objeto puede depender del tiempo transcurrido desde que salió de un punto específico; el volumen del espacio ocupado por un gas a presión constante depende de su temperatura; la resistencia de un cable eléctrico de longitud fija depende de su diámetro; etc. La relación entre este tipo de cantidades suele expresarse mediante una *función*. Para fines exclusivos de este texto, las cantidades involucradas en estas relaciones son números reales.

Una función puede considerarse como una correspondencia de un conjunto X de números reales x a un conjunto Y de números reales y, donde el número y es único para cada valor específico de x.

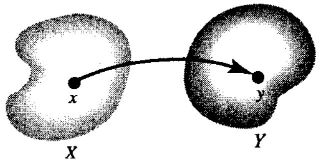


FIGURA 1

En la figura 1 se muestra la representación de una correspondencia de este tipo. Se puede establecer el concepto de función de otra manera: considere intuitivamente que el número real y del conjunto Y es una *función* del número x del conjunto X, si existe una regla mediante la cual se asocia un solo valor de y a un valor x. Esta regla se expresa frecuentemente por medio de una ecuación. Por ejemplo, la ecuación

$$y = x^2$$

define una función para la cual X es el conjunto de todos los números reales y Y es el conjunto de los números no negativos. El valor de y asignado al valor de x se obtiene al multiplicar x por sí mismo. La tabla 1 proporciona algunos de estos valores y la figura 2 ilustra la correspondencia de los números de la tabla.

Tabla 1

x	$y = x^2$
1	1
$\frac{3}{2}$	$\frac{9}{4}$
4	16
0	0
-1	1
$-\frac{3}{2}$	$\frac{9}{4}$
-4	16

Para denotar funciones se utilizan símbolos como f, g y h. El conjunto X de los números reales indicado anteriormente es el *dominio* de la función y el conjunto Y de números reales asignados a los valores de x en X es el *contradominio* de la función. El dominio y el contradominio suelen expresarse en la notación de intervalos descrita en la sección A.1 del apéndice.

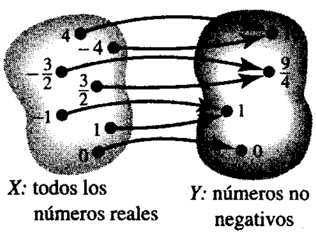


FIGURA 2

▷ **EJEMPLO ILUSTRATIVO 1** Con notación de intervalos, el dominio y contradominio de la función definida por la ecuación

$$y = x^2$$

es $(-\infty, +\infty)$ y el contradominio es $[0, +\infty)$. ◀

▷ **EJEMPLO ILUSTRATIVO 2** Sea f la función definida por la ecuación

$$y = \sqrt{x - 2}$$

Como los números se han restringido a los números reales, y es una función de x sólo si $x - 2 \geq 0$ debido a que para cualquier x que satisfaga esta desigualdad, se determina un solo valor de y. Sin embargo, si $x < 2$, se tiene la raíz cuadrada de un número negativo, y en consecuencia, no se obtendrá un número real y. Por tanto, se debe restringir x de manera que $x \geq 2$. De este modo, el dominio de f es el intervalo $[2, +\infty)$, y su contradominio es $[0, +\infty)$. ◀

▷ EJEMPLO ILUSTRATIVO 3 Sea g la función definida por la ecuación

$$y = \sqrt{x^2 - 9}$$

Se observa que y es una función de x sólo para $x \geq 3$ o $x \leq -3$ (o simplemente, $|x| \geq 3$); para cualquier x que satisfaga alguna de estas desigualdades, se determinará un solo valor de y. No se determinará ningún valor real de y si x está en el intervalo abierto $(-3, 3)$, ya que para estos valores de x se obtiene la raíz cuadrada de un número negativo. Por tanto, el dominio de g es $(-\infty, -3] \cup [3, +\infty)$, y el contradominio es $[0, +\infty)$. ◀

Se puede considerar una función como un conjunto de *pares ordenados*. Por ejemplo, la función definida por la ecuación $y = x^2$ consta de todos los pares ordenados (x, y) que satisfacen la ecuación. Los pares ordenados de esta función proporcionados por la tabla 1 son $(1, 1)$, $(\frac{3}{2}, \frac{9}{4})$, $(4, 16)$, $(0, 0)$, $(-1, 1)$, $(-\frac{3}{2}, \frac{9}{4})$ y $(-4, 16)$. Por supuesto, existe un número ilimitado de pares ordenados de esta función, algunos otros son $(2, 4)$, $(-2, 4)$, $(5, 25)$, $(-5, 25)$, $(\sqrt{3}, 3)$, etcétera.

▷ EJEMPLO ILUSTRATIVO 4 La función f del ejemplo ilustrativo 2 es el conjunto de pares ordenados (x, y) para los cuales $y = \sqrt{x - 2}$. En símbolos esto se expresa como

$$f = \{(x, y) \mid y = \sqrt{x - 2}\}$$

Algunos de los pares ordenados de f son $(2, 0)$, $(\frac{9}{4}, \frac{1}{2})$, $(3, 1)$, $(4, \sqrt{2})$, $(5, \sqrt{3})$, $(6, 2)$, $(11, 3)$. ◀

▷ EJEMPLO ILUSTRATIVO 5 La función g del ejemplo ilustrativo 3 es el conjunto de pares ordenados (x, y) para los cuales $y = \sqrt{x^2 - 9}$; es decir,

$$g = \{(x, y) \mid y = \sqrt{x^2 - 9}\}$$

Algunos de los pares ordenados de g son $(3, 0)$, $(4, \sqrt{7})$, $(5, 4)$, $(-3, 0)$, $(-\sqrt{13}, 2)$. ◀

A continuación se establecerá formalmente la definición de función como un conjunto de pares ordenados. Al definir una función de esta manera, y no como una regla de correspondencia, se hace más preciso su significado.

1.1.1 Definición de función

Una función es un conjunto de pares ordenados de números (x, y) en los que no existen dos pares ordenados diferentes con el mismo primer número. El conjunto de todos los valores admisibles de x se denomina **dominio** de la función, y el conjunto de todos los valores resultantes de y recibe el nombre de **contradominio*** de la función.

En esta definición, la restricción de que dos pares ordenados no pueden tener el mismo primer número asegura que y es único para cada valor específico de x. Los símbolos x y y denotan **variables.** Debido a que el valor de y depende de la elección de x, x denota a la **variable independiente** mientras que y representa a la **variable dependiente.**

Si f es la función tal que los elementos de su dominio se representan por x, y los elementos de su contradominio se denotan por y, entonces el símbolo $f(x)$ (léase "f de x") denota el valor particular de y que corresponde al valor de x. La notación $f(x)$, denominada **valor de función,** se debe al matemático y físico suizo **Leonhard Euler** (1707-1783).

▷ EJEMPLO ILUSTRATIVO 6 En el ejemplo ilustrativo 2, $f = \{(x, y) \mid y = \sqrt{x-2}\}$. De modo que

$$f(x) = \sqrt{x-2}$$

A continuación se calculará $f(x)$ para algunos valores específicos de x.

$$\begin{aligned} f(3) &= \sqrt{3-2} & f(5) &= \sqrt{5-2} \\ &= 1 & &= \sqrt{3} \\ f(6) &= \sqrt{6-2} & f(9) &= \sqrt{9-2} \\ &= 2 & &= \sqrt{7} \end{aligned}$$ ◀

Cuando se define una función, debe indicarse el dominio implícita o explícitamente. Por ejemplo, si f está definida por

$$f(x) = 3x^2 - 5x + 2$$

la función tiene un valor si x es cualquier número real; por tanto, el dominio es el conjunto de todos los números reales. Sin embargo, si f está definida por

$$f(x) = 3x^2 - 5x + 2 \qquad 1 \leq x \leq 10$$

entonces el dominio de f consta de todos los números reales entre 1 y 10, incluidos éstos.

De manera semejante, si g está definida por la ecuación

$$g(x) = \frac{5x-2}{x+4}$$

está implícito que $x \neq -4$, debido a que el cociente no está definido para $x = -4$; en consecuencia, el dominio de g es el conjunto de todos los números reales excepto -4.

Si h está definida por la ecuación

$$h(x) = \sqrt{4-x^2}$$

el dominio de h es el intervalo cerrado $[-2, 2]$ porque $\sqrt{4-x^2}$ no es un número real para $x > 2$ o $x < -2$. El contradominio de h es $[0, 2]$.

* **N. del T.** La palabra inglesa *range* se ha traducido generalmente como *rango*, y corresponde al nombre del conjunto de valores asignados a la variable dependiente de una función. Otros nombres para este conjunto son: recorrido (poco empleado en cálculo); ámbito (término muy reciente para este concepto); imagen (muy empleado en álgebra y teoría de conjuntos); rango (muy empleado en cálculo).

EJEMPLO 1 Dado que f es la función definida por

$$f(x) = x^2 + 3x - 4$$

determine: **(a)** $f(0)$; **(b)** $f(2)$; **(c)** $f(h)$; **(d)** $f(2h)$; **(e)** $f(2x)$; **(f)** $f(x + h)$; **(g)** $f(x) + f(h)$

Solución

(a) $f(0) = 0^2 + 3 \cdot 0 - 4$
$= -4$

(b) $f(2) = 2^2 + 3 \cdot 2 - 4$
$= 6$

(c) $f(h) = h^2 + 3h - 4$

(d) $f(2h) = (2h)^2 + 3(2h) - 4$
$= 4h^2 + 6h - 4$

(e) $f(2x) = (2x)^2 + 3(2x) - 4$
$= 4x^2 + 6x - 4$

(f) $f(x + h) = (x + h)^2 + 3(x + h) - 4$
$= x^2 + 2hx + h^2 + 3x + 3h - 4$
$= x^2 + (2h + 3)x + (h^2 + 3h - 4)$

(g) $f(x) + f(h) = (x^2 + 3x - 4) + (h^2 + 3h - 4)$
$= x^2 + 3x + (h^2 + 3h - 8)$ ◀

Compare los cálculos del inciso (f) y (g) del ejemplo 1. En el inciso (f) se realiza el cálculo de $f(x + h)$, que es el valor de la función para la suma de x y h. En el inciso (g), en donde se calcula $f(x) + f(h)$, se obtiene la suma de los dos valores de la función $f(x)$ y $f(h)$.

En el capítulo 2 se requerirá calcular cocientes de la forma

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h} \qquad h \neq 0$$

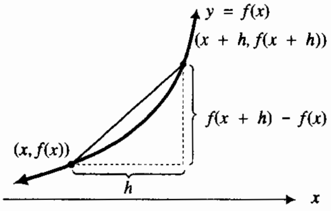


FIGURA 3

Este cociente se presenta como la pendiente de la recta que pasa por los puntos $(x, f(x))$ y $(x + h, f(x + h))$ de la gráfica de la función definida por $y = f(x)$. Consulte la figura 3. En caso de que al efectuar el cálculo aparezca en el numerador la diferencia de dos radicales, se racionaliza el numerador como en el inciso (b) del ejemplo siguiente.

EJEMPLO 2 Determine

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

donde $h \neq 0$, si **(a)** $f(x) = 4x^2 - 5x + 7$; **(b)** $f(x) = \sqrt{x}$.

Solución

$$\textbf{(a)}\quad \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \frac{4(x+h)^2 - 5(x+h) + 7 - (4x^2 - 5x + 7)}{h}$$

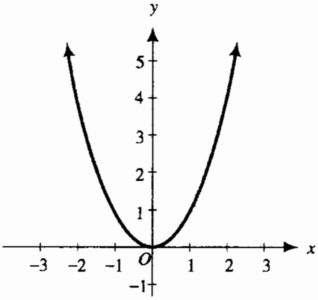
$$= \frac{4x^2 + 8hx + 4h^2 - 5x - 5h + 7 - 4x^2 + 5x - 7}{h}$$

$$= \frac{8hx - 5h + 4h^2}{h}$$

$$= 8x - 5 + 4h$$

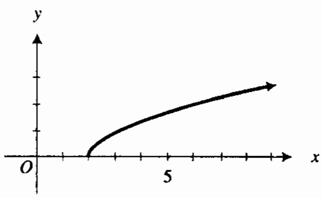
(b)
$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \frac{\sqrt{x+h}-\sqrt{x}}{h}$$
$$= \frac{(\sqrt{x+h}-\sqrt{x})(\sqrt{x+h}+\sqrt{x})}{h(\sqrt{x+h}+\sqrt{x})}$$
$$= \frac{(x+h)-x}{h(\sqrt{x+h}+\sqrt{x})}$$
$$= \frac{h}{h(\sqrt{x+h}+\sqrt{x})}$$
$$= \frac{1}{\sqrt{x+h}+\sqrt{x}}$$

En el segundo paso del inciso (b) de esta solución, se multiplica el numerador y el denominador por el conjugado del numerador para racionalizar el numerador, de donde se obtiene un factor común de h en el numerador y en el denominador. ◀



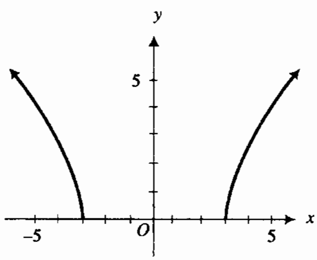
$y = x^2$

FIGURA 4



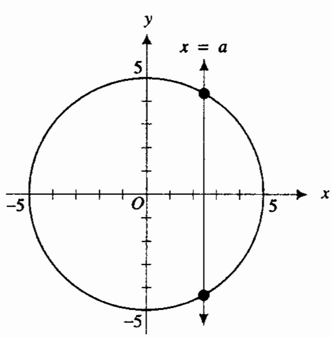
$f(x) = \sqrt{x-2}$

FIGURA 5



$g(x) = \sqrt{x^2-9}$

FIGURA 6



$x^2 + y^2 = 25$

FIGURA 7

El concepto de función como un conjunto de pares ordenados permite enunciar la siguiente definición de *gráfica de una función.*

1.1.2 Definición de gráfica de una función

Si f es una función, entonces la **gráfica de** f es el conjunto de todos los puntos (x, y) del plano R^2 para los cuales (x, y) es un par ordenado de f.

De esta definición, se deduce que la gráfica de una función f es la misma que la gráfica de la ecuación $y = f(x)$.

La gráfica de la función del ejemplo ilustrativo 1 es la parábola dibujada en la figura 4. La gráfica de la función f de los ejemplos ilustrativos 2 y 4 y dibujada en la figura 5 es la mitad superior de la parábola. La gráfica de la función g de los ejemplos ilustrativos 3 y 5 está dibujada en la figura 6; está gráfica es la mitad superior de una hipérbola.

Recuerde que en una función existe un solo valor de la variable dependiente para cada valor de la variable independiente del dominio de la función. En términos geométricos, esto significa que:

Una recta vertical intersecta la gráfica de una función a lo más en un punto.

Observe que en las figuras 4, 5 y 6, cualquier recta vertical intersectará a cada gráfica cuanto más en un punto.

▷ **EJEMPLO ILUSTRATIVO 7** Considere el conjunto $\{(x, y) \mid x^2 + y^2 = 25\}$, cuya gráfica es la circunferencia, de radio 5 y centro en el origen, dibujada en la figura 7. Este conjunto de pares ordenados no es una función porque para cualquier x en el intervalo $(-5, 5)$, dos pares ordenados diferentes tienen a x como primer número. Por ejemplo, $(3, 4)$ y $(3, -4)$ son dos pares ordenados del conjunto dado. Además, observe que cualquier recta vertical cuya ecuación sea $x = a$, donde $-5 < a < 5$, intersecta a la circunferencia en dos puntos. ◀

EJEMPLO 3 Determine el dominio de la función g definida por

$$g(x) = \sqrt{x(x-2)}$$

Apoye la respuesta trazando la gráfica en la graficadora.

Solución Como $\sqrt{x(x-2)}$ no es un número real cuando $x(x-2) < 0$, el dominio de la función g consta de los valores de x para los cuales $x(x-2) \geq 0$. Esta desigualdad se satisface cuando se tiene alguno de los dos casos siguientes: $x \geq 0$ y $x - 2 \geq 0$; o si $x \leq 0$ y $x - 2 \leq 0$.

Caso 1: $x \geq 0$ y $x - 2 \geq 0$. Esto es,

$$x \geq 0 \quad \text{y} \quad x \geq 2$$

Ambas desigualdades se cumplen si $x \geq 2$, lo cual equivale a que x esté en el intervalo $[2, +\infty)$.

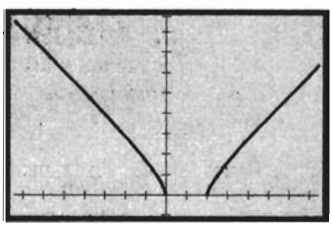
Caso 2: $x \leq 0$ y $x - 2 \leq 0$. Esto es,

$$x \leq 0 \quad \text{y} \quad x \leq 2$$

Las dos desigualdades se cumplen si $x \leq 0$, lo cual equivale a que x pertenezca al intervalo $(-\infty, 0]$.

Las soluciones de estos dos casos se combinan para obtener el dominio de g, el cual es $(-\infty, 0] \cup [2, +\infty)$.

La gráfica de g se muestra en la figura 8. Esta gráfica desciende desde la izquierda hasta $x = 0$, asciende hacia la derecha a partir de $x = 2$, y no contiene puntos cuando x está en el intervalo abierto $(0, 2)$. Por tanto, la gráfica apoya la respuesta. ◀



$[-7.5, 7.5]$ por $[-1, 9]$

$g(x) = \sqrt{x(x-2)}$

FIGURA 8

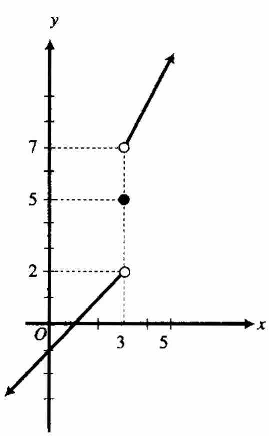
Como se vio, el dominio de una función puede determinarse mediante la definición de la función. Con frecuencia se determina el contradominio a partir de la gráfica de la función, como en el ejemplo siguiente en el que se trata una *función definida a trozos*, la cual se define empleando más de una expresión.

EJEMPLO 4 Sea f la función definida por

$$f(x) = \begin{cases} x - 1 & \text{si } x < 3 \\ 5 & \text{si } x = 3 \\ 2x + 1 & \text{si } 3 < x \end{cases}$$

Determine el dominio y el contradominio de f, y dibuje su gráfica.

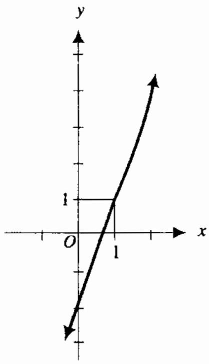
Solución El dominio de f es $(-\infty, +\infty)$. La figura 9 muestra la gráfica de f; consta de la porción de la recta $y = x - 1$ para la cual $x < 3$, el punto $(3, 5)$ y la parte de la recta $y = 2x + 1$ para la cual $3 < x$. Los valores de la función son números menores que 2, el número 5 o números mayores que 7. Por tanto, el contradominio de f es el número 5 y aquellos números en $(-\infty, 2) \cup (7, +\infty)$. ◀



$$f(x) = \begin{cases} x - 1 & \text{si } x < 3 \\ 5 & \text{si } x = 3 \\ 2x + 1 & \text{si } 3 < x \end{cases}$$

FIGURA 9

Las funciones definidas a trozos serán de gran utilidad en el estudio de límites, continuidad y derivada, como ejemplos y contra-ejemplos de funciones que poseen ciertas propiedades. En el caso de la gráfica de la función del ejemplo 4, se rompe en el punto donde $x = 3$ lo que, como aprenderá en la sección 1.8, muestra que la función es *discontinua* para ese valor de x. En el ejemplo siguiente se tiene una función definida a trozos cuya gráfica no se rompe en el valor de x, en el que cambian las expresiones que la definen, en este caso en $x = 1$.



$$g(x) = \begin{cases} 3x - 2 & \text{si } x < 1 \\ x^2 & \text{si } 1 \leq x \end{cases}$$

FIGURA 10

EJEMPLO 5

Sea g la función definida por

$$g(x) = \begin{cases} 3x - 2 & \text{si } x < 1 \\ x^2 & \text{si } 1 \leq x \end{cases}$$

Determine el dominio y el contradominio de g, y dibuje su gráfica.

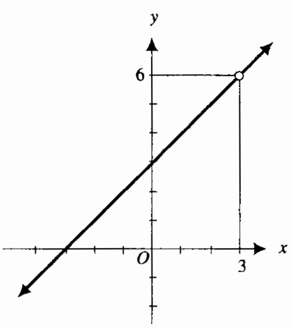
Solución El dominio de g es $(-\infty, +\infty)$. La gráfica contiene la parte de la recta $y = 3x - 2$ para la cual $x < 1$ y la porción de la parábola $y = x^2$ para la cual $1 \leq x$. La gráfica se muestra en la figura 10. El contradominio es $(-\infty, +\infty)$. ◀

EJEMPLO 6

La función h está definida por

$$h(x) = \frac{x^2 - 9}{x - 3}$$

Determine el dominio y el contradominio de h, y dibuje su gráfica.



$$h(x) = \frac{x^2 - 9}{x - 3}$$

FIGURA 11

Solución Como $h(x)$ está definida para todo x, excepto 3, el dominio de h es el conjunto de números reales excepto 3. Cuando $x = 3$, tanto el numerador como el denominador son cero y $0/0$ no está definido.

Al factorizar el numerador como $(x - 3)(x + 3)$ se obtiene

$$h(x) = \frac{(x - 3)(x + 3)}{x - 3}$$

o $h(x) = x + 3$, teniendo en cuenta que $x \neq 3$. En otras palabras, la función h puede definirse por

$$h(x) = x + 3 \qquad \text{si } x \neq 3$$

La gráfica de h consta de todos los puntos de la recta $y = x + 3$ excepto el punto $(3, 6)$, y se muestra en la figura 11. El contradominio de h es el conjunto de todos los números reales excepto 6. ◀

En el ejemplo 6, la gráfica tiene un "hoyo" o "agujero" en $x = 3$, donde $h(3)$ no está definido. En el ejemplo siguiente, también la gráfica tiene un agujero en $x = 3$, pero el valor de la función en 3 sí está definido.

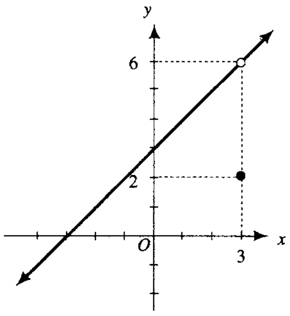
EJEMPLO 7

Sea H la función definida por

$$H(x) = \begin{cases} x + 3 & \text{si } x \neq 3 \\ 2 & \text{si } x = 3 \end{cases}$$

Determine el dominio y el contradominio de H y dibuje su gráfica.

Solución Como H está definida para todo x, su dominio es $(-\infty, +\infty)$. La gráfica de H se muestra en la figura 12. El contradominio de H es el conjunto de todos los números reales, diferentes de 6. ◀



$$H(x) = \begin{cases} x + 3 & \text{si } x \neq 3 \\ 2 & \text{si } x = 3 \end{cases}$$

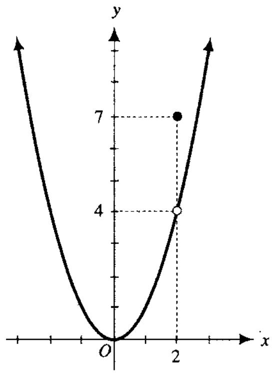
FIGURA 12

▶ ***EJEMPLO 8*** La función f está definida por

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si } x \neq 2 \\ 7 & \text{si } x = 2 \end{cases}$$

Determine el dominio y el contradominio de f y dibuje su gráfica.

Solución Como f está definida para todo x, su dominio es $(-\infty, +\infty)$. La gráfica, mostrada en la figura 13, consta del punto $(2, 7)$ y todos los puntos sobre la parábola $y = x^2$ excepto $(2, 4)$. El contradominio de f es $[0, +\infty)$. ◀



$$f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si } x \neq 2 \\ 7 & \text{si } x = 2 \end{cases}$$

FIGURA 13

La función del ejemplo siguiente se denomina **función valor absoluto.**

▶ ***EJEMPLO 9*** Determine el dominio y el contradominio de la función f para la cual

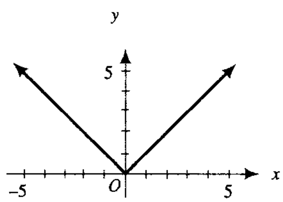
$$f(x) = |x|$$

y dibuje su gráfica.

Solución De la definición de $|x|$,

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{si } x \geq 0 \\ -x & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

El dominio es $(-\infty, +\infty)$. La gráfica de f consta de dos semirectas que pasan por el origen y están por arriba del eje x; una tiene pendiente 1 y la otra tiene pendiente -1. Consulte la figura 14. El contradominio de f es $[0, +\infty)$. ◀



$$f(x) = |x|$$

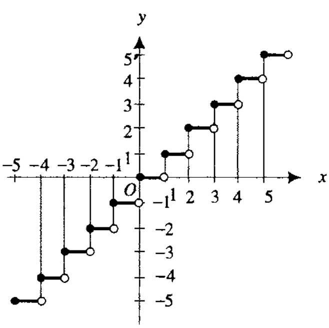
FIGURA 14

La función valor absoluto se ha implementado en las graficadoras y usualmente se denota por *ABS*. Otra función con que cuenta la graficadora es la **función máximo entero** cuyos valores de función se denotan por $[\![x]\!]$ y están definidos por

$$[\![x]\!] = n \qquad \text{si } n \leq x < n + 1, \text{ donde } n \text{ es un entero}$$

Esto es, $[\![x]\!]$ es el máximo entero menor o igual que x. En particular, $[\![1]\!] = 1$, $[\![1.3]\!] = 1$, $[\![0.5]\!] = 0$, $[\![-4.2]\!] = -5$ y $[\![-8]\!] = -8$.

La gráfica de la función máximo entero está dibujada en la figura 15. Su dominio es el conjunto de todos los números reales y su contradominio consiste de todos los números enteros. En muchas graficadoras se denota la función máximo entero por *INT*.



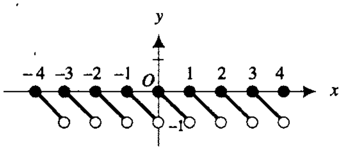
Función máximo entero

FIGURA 15

▶ ***EJEMPLO 10*** Dibuje la función G definida por

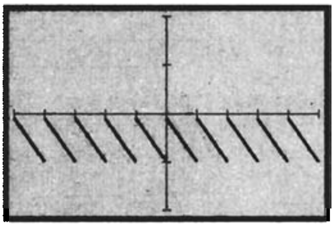
$$G(x) = [\![x]\!] - x$$

y determine su dominio y su contradominio. Apoye su respuesta trazando su gráfica en la graficadora.



$G(x) = [\![x]\!] - x$

FIGURA 16



$[-5, 5]$ por $[-2, 2]$

$G(x) = INT(x) - x$

FIGURA 17

Solución Como G está definida para todos los valores de x, su dominio es $(-\infty, +\infty)$. A partir de la definición de $[\![x]\!]$ se obtiene lo siguiente:

$$
\begin{array}{llll}
\text{si } -2 \le x < -1, & [\![x]\!] = -2; & \text{por tanto, } G(x) = -2 - x, \\
\text{si } -1 \le x < 0, & [\![x]\!] = -1; & \text{por tanto, } G(x) = -1 - x, \\
\text{si } \ \ 0 \le x < 1, & [\![x]\!] = 0; & \text{por tanto, } G(x) = -x, \\
\text{si } \ \ 1 \le x < 2, & [\![x]\!] = 1; & \text{por tanto, } G(x) = 1 - x, \\
\text{si } \ \ 2 \le x < 3, & [\![x]\!] = 2; & \text{por tanto, } G(x) = 2 - x,
\end{array}
$$

y así sucesivamente. De modo más general, si n es cualquier número entero, entonces

$$\text{si } n \le x < n + 1, \ [\![x]\!] = n; \qquad \text{por tanto, } G(x) = n - x$$

Con estos valores de función se puede dibujar la gráfica de G, mostrada en la figura 16. A partir de la gráfica se observa que el contradominio es $(-1, 0]$. Al trazar la gráfica de $G(x) = INT(x) - x$ se obtiene la figura 17, lo cual apoya la respuesta. ◀

EJERCICIOS 1.1

En los ejercicios 1 a 4, determine si el conjunto es una función. Si es una función determine su dominio.

1. **(a)** $\{(x, y) \mid y = \sqrt{x - 4}\}$
(b) $\{(x, y) \mid y = \sqrt{x^2 - 4}\}$
(c) $\{(x, y) \mid y = \sqrt{4 - x^2}\}$
(d) $\{(x, y) \mid x^2 + y^2 = 4\}$

2. **(a)** $\{(x, y) \mid y = \sqrt{x + 1}\}$
(b) $\{(x, y) \mid y = \sqrt{x^2 - 1}\}$
(c) $\{(x, y) \mid y = \sqrt{1 - x^2}\}$
(d) $\{(x, y) \mid x^2 + y^2 = 1\}$

3. **(a)** $\{(x, y) \mid y = x^2\}$ **(b)** $\{(x, y) \mid x = y^2\}$
(c) $\{(x, y) \mid y = x^3\}$ **(d)** $\{(x, y) \mid x = y^3\}$

4. **(a)** $\{(x, y) \mid y = (x - 1)^2 + 2\}$
(b) $\{(x, y) \mid x = (y - 2)^2 + 1\}$
(c) $\{(x, y) \mid y = (x + 2)^3 - 1\}$
(d) $\{(x, y) \mid x = (y + 1)^3 - 2\}$

5. Dada $f(x) = 2x - 1$, determine **(a)** $f(3)$; **(b)** $f(-2)$; **(c)** $f(0)$; **(d)** $f(a + 1)$; **(e)** $f(x + 1)$; **(f)** $f(2x)$; **(g)** $2\,f(x)$; **(h)** $f(x + h)$; **(i)** $f(x) + f(h)$;

(j) $\dfrac{f(x + h) - f(x)}{h}, h \ne 0.$

6. Dada $f(x) = \dfrac{3}{x}$, calcule **(a)** $f(1)$; **(b)** $f(-3)$; **(c)** $f(6)$;

(d) $f(\frac{1}{3})$; **(e)** $f\left(\dfrac{3}{a}\right)$; **(f)** $f\left(\dfrac{3}{x}\right)$; **(g)** $\dfrac{f(3)}{f(x)}$; **(h)** $f(x - 3)$;

(i) $f(x) - f(3)$; **(j)** $\dfrac{f(x + h) - f(x)}{h}, h \ne 0.$

7. Dada $f(x) = 2x^2 + 5x - 3$, determine **(a)** $f(-2)$; **(b)** $f(-1)$; **(c)** $f(0)$; **(d)** $f(3)$; **(e)** $f(h + 1)$; **(f)** $f(2x^2)$; **(g)** $f(x^2 - 3)$; **(h)** $f(x + h)$; **(i)** $f(x) + f(h)$;

(j) $\dfrac{f(x + h) - f(x)}{h}, h \ne 0.$

8. Dada $g(x) = 3x^2 - 4$, calcule **(a)** $g(-4)$; **(b)** $g(\frac{1}{2})$; **(c)** $g(x^2)$; **(d)** $g(3x^2 - 4)$; **(e)** $g(x - h)$; **(f)** $g(x) - g(h)$;

(g) $\dfrac{g(x + h) - g(x)}{h}, h \ne 0.$

9. Dada $F(x) = \sqrt{x + 9}$, encuentre **(a)** $F(x + 9)$; **(b)** $F(x^2 - 9)$; **(c)** $F(x^4 - 9)$; **(d)** $F(x^2 + 6x)$;

(e) $F(x^4 - 6x^2)$;**(f)** $\dfrac{F(x + h) - F(x)}{h}, h \ne 0.$

10. Dada $G(x) = \sqrt{4 - x}$, determine **a)** $G(4 - x)$; (**(b)** $G(4 - x^2)$; **(c)** $G(4 - x^4)$; **(d)** $G(4x - x^2)$;

(e) $G(-x^4 - 4x^2)$; **(f)** $\dfrac{G(x + h) - G(x)}{h}, h \ne 0.$

En los ejercicios 11 a 46, dibuje a mano la gráfica de la función y determine su dominio y su contradominio.

11. $f(x) = 3x - 1$
12. $g(x) = 4 - x$
13. $F(x) = 2x^2$
14. $G(x) = x^2 + 2$
15. $g(x) = 5 - x^2$
16. $f(x) = (x - 1)^2$
17. $G(x) = \sqrt{x - 1}$
18. $F(x) = \sqrt{9 - x}$
19. $f(x) = \sqrt{x^2 - 4}$
20. $g(x) = \sqrt{4 - x^2}$
21. $g(x) = \sqrt{9 - x^2}$
22. $f(x) = \sqrt{x^2 - 1}$
23. $h(x) = |x - 3|$
24. $H(x) = |5 - x|$
25. $F(x) = |3x + 2|$
26. $G(x) = \dfrac{x^2 - 4}{x - 2}$
27. $H(x) = \dfrac{x^2 - 25}{x + 5}$
28. $f(x) = \dfrac{2x^2 + 7x + 3}{x + 3}$

29. $f(x) = \dfrac{x^2 - 4x + 3}{x - 1}$ **30.** $g(x) = \dfrac{(x^2 - 4)(x - 3)}{x^2 - x - 6}$

31. $f(x) = \begin{cases} -2 & \text{si } x \leq 3 \\ 2 & \text{si } 3 < x \end{cases}$

32. $g(x) = \begin{cases} -4 & \text{si } x < -2 \\ -1 & \text{si } -2 \leq x \leq 2 \\ 3 & \text{si } 2 < x \end{cases}$

33. $g(x) = \begin{cases} 2x - 1 & \text{si } x \neq 2 \\ 0 & \text{si } x = 2 \end{cases}$

34. $f(x) = \begin{cases} 3x + 2 & \text{si } x \neq 1 \\ 8 & \text{si } x = 1 \end{cases}$

35. $F(x) = \begin{cases} x^2 - 4 & \text{si } x \neq 3 \\ -2 & \text{si } x = 3 \end{cases}$

36. $G(x) = \begin{cases} 9 - x^2 & \text{si } x \neq -3 \\ 4 & \text{si } x = -3 \end{cases}$

37. $G(x) = \begin{cases} 1 - x^2 & \text{si } x < 0 \\ 3x + 1 & \text{si } 0 \leq x \end{cases}$

38. $F(x) = \begin{cases} x^2 - 4 & \text{si } x < 3 \\ 2x - 1 & \text{si } 3 \leq x \end{cases}$

39. $g(x) = \begin{cases} 6x + 7 & \text{si } x \leq -2 \\ 4 - x & \text{si } -2 < x \end{cases}$

40. $f(x) = \begin{cases} x - 2 & \text{si } x \leq 0 \\ x^2 + 1 & \text{si } 0 < x \end{cases}$

41. $h(x) = \begin{cases} x + 3 & \text{si } x < -5 \\ \sqrt{25 - x^2} & \text{si } -5 \leq x \leq 5 \\ 3 - x & \text{si } 5 < x \end{cases}$

42. $H(x) = \begin{cases} x + 2 & \text{si } x \leq -4 \\ \sqrt{16 - x^2} & \text{si } -4 < x < 4 \\ 2 - x & \text{si } 4 \leq x \end{cases}$

43. $F(x) = \dfrac{x^3 - 2x^2}{x - 2}$ **44.** $G(x) = \dfrac{x^3 + 3x^2}{x + 3}$

45. $f(x) = [\![x - 4]\!]$ **46.** $g(x) = [\![x + 2]\!]$

47. (**a**) Dibuje la gráfica de la *función escalón* (o *salto*) *unitario* denotada por U y definida por

$$U(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ 1 & \text{si } 0 \leq x \end{cases}$$

Defina cada una de las siguientes funciones a trozos y dibuje sus gráficas: (**b**) $U(x - 1)$; (**c**) $U(x) - 1$; (**d**) $U(x) - U(x - 1)$.

48. Defina cada una de las siguientes funciones a trozos y dibuje sus gráficas, donde U es la función escalón unitario definida en el ejercicio 47:
(**a**) $x \cdot U(x)$; (**b**) $(x + 1) \cdot U(x + 1)$;
(**c**) $(x + 1) \cdot U(x + 1) - x \cdot U(x)$.

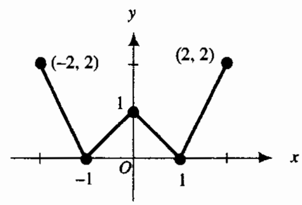
49. (**a**) Dibuje la gráfica de la *función signo* denotada por sgn y definida por

$$\operatorname{sgn} x = \begin{cases} -1 & \text{si } x < 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \\ 1 & \text{si } 0 < x \end{cases}$$

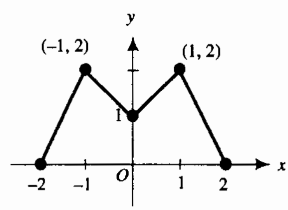
$\operatorname{sgn}(x)$ se lee "signo de x". Defina cada una de las siguientes funciones a trozos y dibuje sus gráficas: (**b**) $x \cdot \operatorname{sgn}(x)$; (**c**) $2 - x \operatorname{sgn}(x)$; (**d**) $x - 2 \operatorname{sgn}(x)$.

50. Defina cada una de las siguientes funciones a trozos, donde sgn es la función signo definida en el ejercicio 49: (**a**) $\operatorname{sgn}(x + 1)$; (**b**) $\operatorname{sgn}(x - 1)$; (**c**) $\operatorname{sgn}(x + 1) - \operatorname{sgn}(x - 1)$.

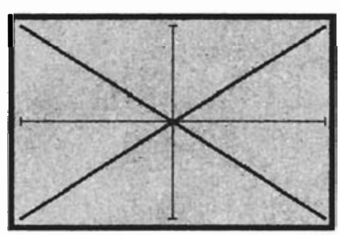
51. La gráfica de la función f de la figura se parece a la letra W. Defina $f(x)$ a trozos.



52. La gráfica de la función f de la figura se parece a la letra M. Defina $f(x)$ a trozos.



53. En la figura, la gráfica se parece a la letra X y es la gráfica de dos funciones f_1 y f_2 trazadas en el rectángulo inspección de $[-1,\ 1]$ por $[-1,\ 1]$. Defina $f_1(x)$ y $f_2(x)$.



$[-1,\ 1]$ por $[-1,\ 1]$

54. Existen tres funciones f_1, f_2 y f_3 cuyas gráficas trazadas simultáneamente en el rectángulo de inspección de $[-1,\ 1]$ por $[-1,\ 1]$ se parecen a la letra Z. Defina $f_1(x)$, $f_2(x)$ y $f_3(x)$.

En los ejercicios 55 a 58, haga lo siguiente: (a) defina la función a trozos sin emplear las barras de valor absoluto; (b) dibuje la gráfica de la función definida en el inciso (a); (c) apoye sus respuestas a los incisos (a) y (b) trazando la gráfica de la función.

55. $f(x) = |x^2 - 1|$ **56.** $g(x) = |4 - x^2|$

57. $g(x) = |x| \cdot |5 - x|$ **58.** $f(x) = |x| \cdot |x - 3|$

En los ejercicios 59 y 60, dibuje la gráfica de la función y determine su dominio y su contradominio. Apoye sus respuestas trazando la gráfica de la función.

59. $h(x) = x - [\![x]\!]$ **60.** $F(x) = x + [\![x]\!]$

61. Las gráficas de las funciones de los ejercicios 51 y 52 parecen letras del alfabeto. Defina otras dos funciones cuyas gráficas se parezcan a dos letras diferentes y dibújelas.

62. En esta sección se utilizaron los símbolos f, $f(x)$ y $y = f(x)$ concernientes a una función particular, los cuales tienen significados diferentes. Explique lo que significa cada notación, invente una función y utilícela para distinguir los tres símbolos.

63. Explique por qué la gráfica de una función es consistente con la definición de la función como un conjunto de pares ordenados. En su explicación utilice un ejemplo específico.

1.2 OPERACIONES CON FUNCIONES Y TIPOS DE FUNCIONES

Se pueden formar nuevas funciones a partir de funciones dadas mediante adición, sustracción, multiplicación y división de sus valores. De acuerdo con esto, las nuevas funciones se conocen como la *suma, diferencia, producto* y *cociente* de las funciones originales.

1.2.1 Definición de la suma, diferencia, producto y cociente de dos funciones

Dadas las dos funciones f y g:

(i) su **suma,** denotada por $f + g$, es la función definida por

$$(f + g)(x) = f(x) + g(x)$$

(ii) su **diferencia,** denotada por $f - g$, es la función definida por

$$(f - g)(x) = f(x) - g(x)$$

(iii) su **producto,** denotado por $f \cdot g$, es la función definida por

$$(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x)$$

(iv) su **cociente,** denotado por f/g, es la función definida por

$$(f/g)(x) = f(x)/g(x) \qquad g(x) \neq 0$$

En cada caso, el *dominio* de la función resultante consta de aquellos valores de x comunes a los dominios de f y g, con el requerimiento adicional en el caso (iv) de que se excluyan los valores de x para los cuales $g(x) = 0$.

EJEMPLO 1 Dado que f y g son las funciones definidas por

$$f(x) = \sqrt{x + 1} \quad \text{y} \quad g(x) = \sqrt{x - 4}$$

defina las siguientes funciones y determine el dominio de las funciones resultantes: **(a)** $f + g$; **(b)** $f - g$; **(c)** $f \cdot g$; **(d)** f/g.

Solución

(a) $(f + g)(x) = \sqrt{x + 1} + \sqrt{x - 4}$

(b) $(f - g)(x) = \sqrt{x + 1} - \sqrt{x - 4}$

(c) $(f \cdot g)(x) = \sqrt{x + 1} \cdot \sqrt{x - 4}$

(d) $(f/g)(x) = \dfrac{\sqrt{x + 1}}{\sqrt{x - 4}}$

El dominio de f es $[-1, +\infty)$ y el dominio de g es $[4, +\infty)$. Así, el dominio de las funciones resultantes en los incisos (a), (b) y (c) es $[4, +\infty)$. En el inciso (d), el denominador es cero cuando $x = 4$; por lo que 4 también se excluye y se obtiene como dominio $(4, +\infty)$. ◀

Otra operación entre funciones es la obtención de la *función compuesta* de dos funciones dadas.

1.2.2 Definición de función compuesta

Dadas las dos funciones f y g, **la función compuesta,** denotada por $f \circ g$, está definida por

$$(f \circ g)(x) = f(g(x))$$

y el dominio de $f \circ g$ es el conjunto de todos los números x del dominio de g tales que $g(x)$ está en el dominio de f.

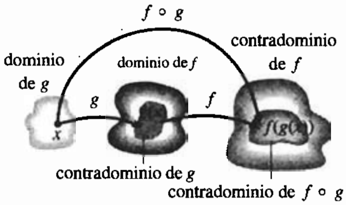


FIGURA 1

Esta definición indica que cuando se calcula $(f \circ g)(x)$, primero se aplica g a x y después se aplica f a $g(x)$. Para visualizar este cálculo Consulte la figura 1. La función g asigna el valor $g(x)$ al número x del dominio de g. La función f asigna el valor $f(g(x))$ al número $g(x)$ del dominio de f. Observe que en la figura 1 el contradominio de g es un subconjunto del dominio de f y que el contradominio de $f \circ g$ es un subconjunto del contradominio de f.

▷ **EJEMPLO ILUSTRATIVO 1** Si f y g están definidas por

$$f(x) = \sqrt{x} \quad \text{y} \quad g(x) = 2x - 3$$

entonces

$$\begin{aligned}(f \circ g)(x) &= f(g(x)) \\ &= f(2x - 3) \\ &= \sqrt{2x - 3}\end{aligned}$$

El dominio de g es $(-\infty, +\infty)$ y el dominio de f es $[0, +\infty)$. Por tanto, el dominio de $f \circ g$ es el conjunto de números reales x para los cuales $2x - 3 \geq 0$ o, equivalentemente, $[\frac{3}{2}, +\infty)$. ◀

▶ ***EJEMPLO 2*** Sean

$$f(x) = \frac{5}{x - 2} \quad \text{y} \quad g(x) = 2x + 1$$

Obtenga $(f \circ g)(3)$ mediante dos métodos: **(a)** calcule $g(3)$ y utilice este número para determinar $f(g(3))$; **(b)** calcule $(f \circ g)(x)$ y emplee el resultado para determinar $(f \circ g)(3)$.

Solución

(a)
$$\begin{aligned}g(3) &= 2(3) + 1 \\ &= 7\end{aligned}$$

Así

$$\begin{aligned}f(g(3)) &= f(7) \\ &= \frac{5}{7 - 2}\end{aligned}$$

(b)
$$\begin{aligned}(f \circ g)(x) &= f(g(x)) \\ &= f(2x + 1) \\ &= \frac{5}{(2x + 1) - 2} \\ &= \frac{5}{2x - 1}\end{aligned}$$

$= 1$

Por tanto

$$(f \circ g)(3) = \frac{5}{2(3) - 1}$$
$$= 1$$

◀

▶ EJEMPLO 3 Dado que f y g están definidas por

$$f(x) = \sqrt{x} \quad \text{y} \quad g(x) = x^2 - 1$$

calcule: **(a)** $f \circ f$; **(b)** $g \circ g$; **(c)** $f \circ g$; **(d)** $g \circ f$. También determine el dominio de cada función compuesta.

Solución El dominio de f es $[0, +\infty)$ y el dominio de g es $(-\infty, +\infty)$.

(a)
$$\begin{aligned}(f \circ f)(x) &= f(f(x)) \\ &= f(\sqrt{x}) \\ &= \sqrt{\sqrt{x}} \\ &= \sqrt[4]{x}\end{aligned}$$

El dominio es $[0, +\infty)$.

(b)
$$\begin{aligned}(g \circ g)(x) &= g(g(x)) \\ &= g(x^2 - 1) \\ &= (x^2 - 1)^2 - 1 \\ &= x^4 - 2x^2\end{aligned}$$

El dominio es $(-\infty, +\infty)$.

(c)
$$\begin{aligned}(f \circ g)(x) &= f(g(x)) \\ &= f(x^2 - 1) \\ &= \sqrt{x^2 - 1}\end{aligned}$$

El dominio es

$(-\infty, -1] \cup [1, +\infty)$.

(d)
$$\begin{aligned}(g \circ f)(x) &= g(f(x)) \\ &= g(\sqrt{x}) \\ &= (\sqrt{x})^2 - 1 \\ &= x - 1\end{aligned}$$

El dominio es $[0, +\infty)$.

En el inciso (d) observe que aunque $x - 1$ está definido para todos los valores de x, el dominio de $g \circ f$, por la definición de función compuesta, es el conjunto de todos los números x del dominio de f tales que $f(x)$ está en el dominio de g. De donde, el dominio de $g \circ f$ debe ser un subconjunto del dominio de f. ◀

Observe en los resultados de los incisos (c) y (d) del ejemplo 3 que $(f \circ g)(x)$ y $(g \circ f)(x)$ no son necesariamente iguales.

Un teorema importante en Cálculo, llamado la *regla de la cadena*, que se estudiará en la sección 2.8, trata sobre funciones compuestas. Cuando se aplica la regla de la cadena, es necesario considerar una función como la composición de otras dos funciones, tal como se muestra en el ejemplo ilustrativo siguiente.

▷ EJEMPLO ILUSTRATIVO 2 Si $h(x) = (4x^2 + 1)^3$, h se puede expresar como la composición de las dos funciones f y g para las cuales

$$f(x) = x^3 \quad \text{y} \quad g(x) = 4x^2 + 1$$

debido a que

$$\begin{aligned}(f \circ g)(x) &= f(g(x)) \\ &= f(4x^2 + 1) \\ &= (4x^2 + 1)^3\end{aligned}$$

◀

La función h del ejemplo ilustrativo 2 también puede expresarse como la composición de otro par de funciones. Por ejemplo, si

$$F(x) = (4x + 1)^3 \quad \text{y} \quad G(x) = x^2$$

entonces

$$\begin{aligned}(F \circ G)(x) &= F(G(x)) \\ &= F(x^2) \\ &= (4x^2 + 1)^3\end{aligned}$$

▶ **EJEMPLO 4** Dada

$$h(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2 + 3}}$$

exprese h como la composición de dos funciones f y g en dos formas: (**a**) la función f contiene el radical; (**b**) la función g contiene el radical.

Solución

(**a**) $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x + 3}}$

$g(x) = x^2$

Entonces

$$\begin{aligned}(f \circ g)(x) &= f(g(x)) \\ &= f(x^2) \\ &= \frac{1}{\sqrt{x^2 + 3}}\end{aligned}$$

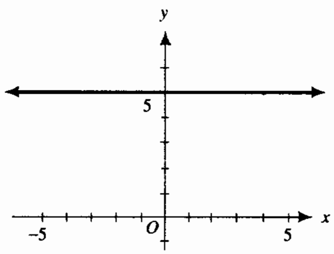
(**b**) $f(x) = \dfrac{1}{x}$

$g(x) = \sqrt{x^2 + 3}$

Entonces

$$\begin{aligned}(f \circ g)(x) &= f(g(x)) \\ &= f(\sqrt{x^2 + 3}) \\ &= \frac{1}{\sqrt{x^2 + 3}}\end{aligned}$$

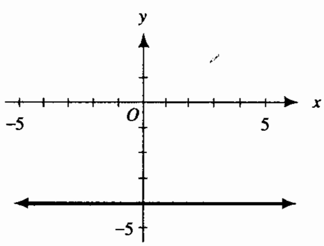
◀



$f(x) = 5$

FIGURA 2

Una función cuyo contradominio consta de un solo número recibe el nombre de **función constante.** De este modo, si $f(x) = c$, y c es cualquier número real, entonces f es una función constante y su gráfica es una recta horizontal a una distancia dirigida de c unidades a partir del eje x.



$g(x) = -4$

FIGURA 3

▷ **EJEMPLO ILUSTRATIVO 3**

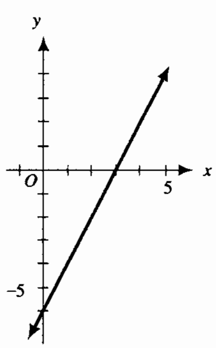
(**a**) La función definida por $f(x) = 5$ es una función constante, y su gráfica, mostrada en la figura 2, es una recta horizontal situada a 5 unidades sobre el eje x.

(**b**) La función definida por $g(x) = -4$ es una función constante cuya gráfica es una recta horizontal ubicada a 4 unidades debajo del eje x. Consulte la figura 3. ◀

Una **función lineal** se define por

$$f(x) = mx + b$$

donde m y b son constantes y $m \neq 0$. Su gráfica es una recta cuya *pendiente* es m y su *intercepción* y u *ordenada al origen* es b.



$f(x) = 2x - 6$

FIGURA 4

▷ **EJEMPLO ILUSTRATIVO 4** La función definida por

$$f(x) = 2x - 6$$

es lineal. Su gráfica es la recta mostrada en la figura 4. ◀

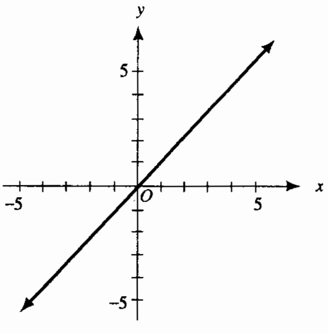


FIGURA 5

La función lineal particular definida por

$$f(x) = x$$

se denomina **función identidad.** Su gráfica, dibujada en la figura 5, es la recta que bisecta los cuadrantes primero y tercero.

Si una función f se define por

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} + \ldots + a_1 x + a_0$$

donde $a_0, a_1, \ldots, a_n$ son números reales $(a_n \neq 0)$ y n es un número entero no negativo, entonces recibe el nombre de **función polinomial** de grado n. Así, la función definida por

$$f(x) = 3x^5 - x^2 + 7x - 1$$

es una función polinomial de grado 5.

Una función lineal es una función polinomial de grado 1. Si el grado de una función polinomial es 2, entonces se le llama **función cuadrática,** y si el grado es 3, entonces recibe el nombre de **función cúbica.**

Si una función puede expresarse como el cociente de dos funciones polinomiales, entonces se denomina **función racional.**

Una **función algebraica** es aquella formada por un número finito de operaciones algebraicas sobre la función identidad y una función constante. Estas operaciones algebraicas incluyen adición, sustracción, multiplicación, división, potenciación (elevación a una potencia) y radicación (extracción de una raíz). Las funciones polinomiales y racionales son tipos particulares de funciones algebraicas. Un ejemplo complejo de una función algebraica es aquella definida por

$$f(x) = \frac{(x^2 - 3x + 1)^3}{\sqrt{x^4 + 1}}$$

Además de las funciones algebraicas, se considerarán las *funciones trascendentes*, ejemplos de estas funciones son las funciones trigonométricas, discutidas en la sección A.9 del apéndice, y las funciones logarítmica y exponencial estudiadas en el capítulo 5.

Una *función par* es aquella cuya gráfica es simétrica con respecto al eje y, y una *función impar* es aquella cuya gráfica es simétrica con respecto al origen. A continuación se presenta la definición formal de estas funciones.

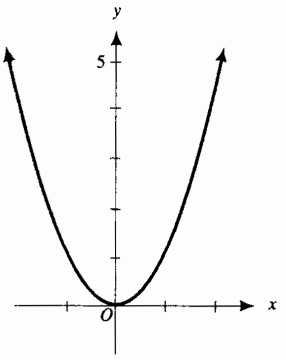
1.2.3 Definición de función par y función impar

(i) Una función f es una **función par** si para cada x del dominio de f, $f(-x) = f(x)$.

(ii) Una función f es una **función impar** si para cada x del dominio de f, $f(-x) = -f(x)$.

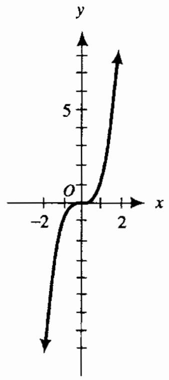
En los dos incisos (i) y (ii) se sobrentiende que $-x$ está en el dominio de f siempre que x lo esté.

Las propiedades de simetría de las funciones pares e impares se deducen de los criterios de simetría dados en la sección A.2 del apéndice.



$f(x) = x^2$

FIGURA 6



$g(x) = x^3$

FIGURA 7

EJEMPLO ILUSTRATIVO 5

(a) Si $f(x) = x^2$, entonces $f(-x) = (-x)^2$. Por tanto, $f(-x) = f(x)$ y en consecuencia, f es una función par. Su gráfica es una parábola simétrica con respecto al eje y. Véa la figura 6.

(b) Si $g(x) = x^3$, entonces $g(-x) = (-x)^3$. Como $g(-x) = -g(x)$, entonces g es una función impar. La gráfica de g, mostrada en la figura 7, es simétrica con respecto al origen. ◀

EJEMPLO 5 Trace la gráfica de la función y a partir de la gráfica conjeture si la función es par, impar o de ninguno de estos dos tipos; después confirme la conjetura analíticamente.

(a) $f(x) = 3x^4 - 2x^2 + 7$

(b) $g(x) = 3x^5 - 4x^3 - 9x$

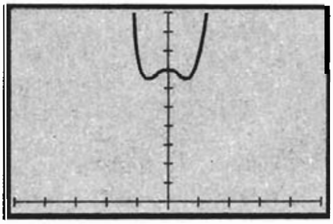
(c) $h(x) = 2x^4 + 7x^3 - x^2 + 9$

Solución

(a) La gráfica de f, trazada en la figura 8, parece simétrica con respecto al eje y. Por tanto, se sospecha que la función es par. Para probar este hecho analíticamente, se calcula $f(-x)$:

$$\begin{aligned} f(-x) &= 3(-x)^4 - 2(-x)^2 + 7 \\ &= 3x^4 - 2x^2 + 7 \\ &= f(x) \end{aligned}$$

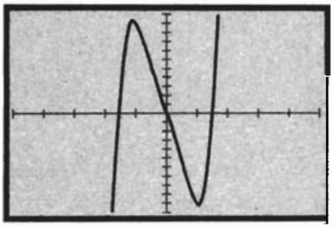
Como $f(-x) = f(x)$, entonces f es par.



[-5, 5] por [0, 10]

$f(x) = 3x^4 - 2x^2 + 7$

FIGURA 8



[-5, 5] por [-11, 11]

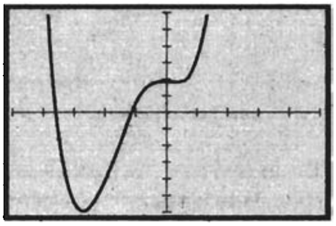
$g(x) = 3x^5 - 4x^3 - 9x$

FIGURA 9

(b) La figura 9 muestra la gráfica de la función g, la cual parece simétrica con respecto al origen. Por tanto, se sospecha que la función es impar. Al calcular $g(-x)$ se obtiene:

$$\begin{aligned} g(-x) &= 3(-x)^5 - 4(-x)^3 - 9(-x) \\ &= -3x^5 + 4x^3 + 9x \\ &= -(3x^5 - 4x^3 - 9x) \\ &= -g(x) \end{aligned}$$

Como $g(-x) = -g(x)$, entonces se ha demostrado analíticamente que la función g es impar.



$[-5, 5]$ por $[-30, 30]$

$h(x) = 2x^4 + 7x^3 - x^2 + 9$

FIGURA 10

(c) Como la gráfica de h, mostrada en la figura 10, no es simétrica con respecto al eje y ni con respecto al origen, la función no es par ni impar. Al calcular $h(-x)$ se obtiene:

$$\begin{aligned} h(-x) &= 2(-x)^4 + 7(-x)^3 - (-x)^2 + 9 \\ &= 2x^4 - 7x^3 - x^2 + 9 \end{aligned}$$

Como $h(-x) \neq h(x)$ y $h(-x) \neq -h(x)$, se ha confirmado que h no es par ni tampoco impar. ◀

▶ EJEMPLO 6 Sea

$$F(x) = |x + 3| - |x - 3|$$

(a) Defina $F(x)$, sin las barras de valor absoluto, a trozos en los intervalos siguientes: $(-\infty, -3)$; $[-3, 3)$; $[3, +\infty)$. (b) Apoye la respuesta gráficamente trazando la gráfica de F a partir de la ecuación dada. (c) De la gráfica del inciso (b) establezca si F es par, impar o de ninguno de estos dos tipos. (d) Confirme la respuesta del inciso (c) analíticamente a partir de la ecuación.

Solución

(a) A partir de la definición del valor absoluto de un número

$$|x + 3| = \begin{cases} x + 3 & \text{si } x + 3 \geq 0 \\ -(x + 3) & \text{si } x + 3 < 0 \end{cases}$$

y

$$|x - 3| = \begin{cases} x - 3 & \text{si } x - 3 \geq 0 \\ -(x - 3) & \text{si } x - 3 < 0 \end{cases}$$

Esto es

$$|x + 3| = \begin{cases} x + 3 & \text{si } x \geq -3 \\ -x - 3 & \text{si } x < -3 \end{cases}$$

y

$$|x - 3| = \begin{cases} x + 3 & \text{si } x \geq 3 \\ -x + 3 & \text{si } x < 3 \end{cases}$$

Si $x \in (-\infty, -3)$, $|x + 3| = -x - 3$ y $|x - 3| = -x + 3$. En consecuencia

$$\begin{aligned} |x + 3| - |x - 3| &= -x - 3 - (-x + 3) \\ &= -6 \end{aligned}$$

Si $x \in [-3, 3)$, $|x + 3| = x + 3$ y $|x - 3| = -x + 3$. Así

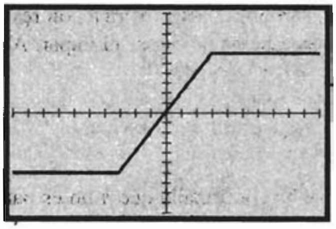
$$\begin{aligned} |x + 3| - |x - 3| &= x + 3 - (-x + 3) \\ &= 2x \end{aligned}$$

Si $x \in [3, +\infty)$, $|x + 3| = x + 3$ y $|x - 3| = x - 3$. Por tanto

$$\begin{aligned} |x + 3| - |x - 3| &= x + 3 - (x - 3) \\ &= 6 \end{aligned}$$

Con estos resultados, se define $F(x)$ a trozos de la siguiente forma

$$F(x) = \begin{cases} -6 & \text{si } x < -3 \\ 2x & \text{si } -3 \leq x < 3 \\ 6 & \text{si } 3 \leq x \end{cases}$$



$[-10, 10]$ por $[-10, 10]$

$F(x) = |x + 3| - |x - 3|$

FIGURA 11

(b) La figura 11 muestra la gráfica de F trazada a partir de la ecuación. La gráfica apoya la respuesta del inciso (a).

(c) Como la gráfica de la figura 11 es simétrica con respecto al origen, la función F es impar.

(d) Al calcular $F(-x)$ a partir de la ecuación dada, se confirma la respuesta del inciso (c):

$$\begin{aligned} F(-x) &= |-x + 3| - |-x - 3| \\ &= |-(x - 3)| - |-(x + 3)| \\ &= |x - 3| - |x + 3| \\ &= -F(x) \end{aligned}$$

Por tanto, se ha demostrado analíticamente que F es impar. ◀

EJERCICIOS 1.2

En los ejercicios 1 a 10, defina las siguientes funciones y determine el dominio de la función resultante: (a) $f + g$; (b) $f - g$; (c) $f \cdot g$; (d) f/g; (e) g/f.

1. $f(x) = x - 5$; $g(x) = x^2 - 1$

2. $f(x) = \sqrt{x}$; $g(x) = x^2 + 1$

3. $f(x) = \dfrac{x+1}{x-1}$; $g(x) = \dfrac{1}{x}$

4. $f(x) = \sqrt{x}$; $g(x) = 4 - x^2$

5. $f(x) = \sqrt{x}$; $g(x) = x^2 - 1$

6. $f(x) = |x|$; $g(x) = |x - 3|$

7. $f(x) = x^2 + 1$; $g(x) = 3x - 2$

8. $f(x) = \sqrt{x - 4}$; $g(x) = x^2 - 4$

9. $f(x) = \dfrac{1}{x+1}$; $g(x) = \dfrac{x}{x-2}$

10. $f(x) = x^2$; $g(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x}}$

En los ejercicios 11 a 14, para las funciones f y g y el número c, obtenga $(f \circ g)(c)$ mediante dos métodos: (a) calcule $g(c)$ y utilice este número para determinar $f(g(c))$; (b) Determine $(f \circ g)(x)$ y emplee ese valor para calcular $(f \circ g)(c)$.

11. $f(x) = 3x^2 - 4x$; $g(x) = 2x - 5$; $c = 4$

12. $f(x) = \sqrt{x^2 - 36}$; $g(x) = x^2 - 3x$; $c = 5$

13. $f(x) = \dfrac{1}{x-1}$; $g(x) = \dfrac{2}{x^2+1}$; $c = \dfrac{1}{2}$

14. $f(x) = \dfrac{2\sqrt{x+3}}{x}$; $g(x) = \dfrac{2x+5}{x^4}$; $c = -2$

En los ejercicios 15 a 24, defina las siguientes funciones y determine el dominio de la función compuesta: (a) $f \circ g$; (b) $g \circ f$; (c) $f \circ f$; (d) $g \circ g$.

15. $f(x) = x - 2$; $g(x) = x + 7$

16. $f(x) = 3 - 2x$; $g(x) = 6 - 3x$

17. Las funciones del ejercicio 1.

18. Las funciones del ejercicio 2.

19. $f(x) = \sqrt{x - 2}$; $g(x) = x^2 - 2$

20. $f(x) = x^2 - 1$; $g(x) = \dfrac{1}{x}$

21. $f(x) = \dfrac{1}{x}$; $g(x) = \sqrt{x}$

22. $f(x) = \sqrt{x}$; $g(x) = -\dfrac{1}{x}$

23. $f(x) = |x|$; $g(x) = |x + 2|$

24. $f(x) = \sqrt{x^2 - 1}$; $g(x) = \sqrt{x - 1}$

En los ejercicios 25 y 26 defina las siguientes funciones y determine el dominio de las funciones resultantes: (a) $f(x^2)$; (b) $[f(x)]^2$; (c) $(f \circ f)(x)$; (d) $(f \circ f)(-x)$.

25. $f(x) = \sqrt{x}$ **26.** $f(x) = \dfrac{1}{x-1}$

En los ejercicios 27 a 32, exprese h como composición de las dos funciones f y g en dos formas.

27. $h(x) = \sqrt{x^2 - 4}$ **28.** $h(x) = (9 + x^2)^{-2}$

29. $h(x) = \left(\dfrac{1}{x-2}\right)^3$ **30.** $h(x) = \dfrac{4}{\sqrt[3]{x^3 + 3}}$

31. $h(x) = (x^2 + 4x - 5)^4$ **32.** $h(x) = \sqrt{|x| + 4}$

En los ejercicios 33 a 38, trace en la graficadora la gráfica de la función y a partir de la gráfica conjeture si la función es par, impar o de ninguno de estos dos tipos. Después confirme su conjetura analíticamente.

33. **(a)** $f(x) = 2x^4 - 3x^2 + 1$ **(b)** $g(x) = 5x^5 + 1$

34. **(a)** $f(x) = x^2 + 2x + 2$ **(b)** $g(x) = x^6 - 1$

35. **(a)** $f(x) = 5x^3 - 7x$ **(b)** $g(x) = |x|$

36. **(a)** $f(x) = 4x^5 + 3x^3$ **(b)** $g(x) = x^3 + 1$

37. **(a)** $f(x) = \sqrt[3]{x}$ **(b)** $g(x) = 5x^4 - 4$

38. **(a)** $f(x) = \dfrac{|x|}{x}$ **(b)** $g(x) = 2|x| + 3$

En los ejercicios 39 y 40, determine analíticamente si la función es par, impar o de ninguno de estos dos tipos.

39. **(a)** $f(y) = \dfrac{y^3 - y}{y^2 + 1}$ **(b)** $g(r) = \dfrac{r^2 - 1}{r^2 + 1}$

(c) $f(x) = \dfrac{|x|}{x^2 + 1}$

40. (**a**) $h(x) = \dfrac{x^2 - 5}{2x^3 + x}$ (**b**) $g(z) = \dfrac{z - 1}{z + 1}$

(**c**) $f(x) = \begin{cases} -1 & \text{si } x < 0 \\ 1 & \text{si } 0 \le x \end{cases}$

En los ejercicios 41 a 44, haga lo siguiente: (a) defina $f(x)$, sin las barras de valor absoluto, en los intervalos indicados. (b) Apoye la respuesta del inciso (a) gráficamente trazando la gráfica de f en la graficadora a partir de la ecuación dada. (c) A partir de la gráfica del inciso (b), establezca si la función es par, impar o de ninguno de estos dos tipos. (d) Confirme la respuesta del inciso (c) analíticamente a partir de la ecuación dada.

41. $f(x) = \dfrac{|x|}{x}$; $(-\infty, 0)$, $(0, +\infty)$

42. $f(x) = x\,|x|$; $(-\infty, 0)$, $[0, +\infty)$

43. $f(x) = |x - 2| - |x + 2|$; $(-\infty, -2)$, $[-2, 2)$, $[2, +\infty)$

44. $f(x) = \dfrac{|x+1| - |x-1|}{x}$

$(-\infty, -1)$, $[-1, 0)$, $(0, 1]$, $(1, +\infty)$

45. ¿Es conmutativa la composición de dos funciones? Es decir, si f y g son dos funciones cualesquiera, ¿son iguales $(f \circ g)(x)$ y $(g \circ f)(x)$? Justifique su respuesta proporcionando un ejemplo.

Si f y g son dos funciones tales que $(f \circ g)(x) = x$ y $(g \circ f)(x) = x$, entonces se dice que f y g son inversas una de la otra. En los ejercicios 46 a 50, demuestre que f y g son inversas una de la otra.

46. $f(x) = 2x - 3$ y $g(x) = \dfrac{x + 3}{2}$

47. $f(x) = \dfrac{1}{x + 1}$ y $g(x) = \dfrac{1 - x}{x}$

48. $f(x) = x^2, x \ge 0,$ y $g(x) = \sqrt{x}$

49. $f(x) = x^2, x \le 0,$ y $g(x) = -\sqrt{x}$

50. $f(x) = (x - 1)^3$ y $g(x) = 1 + \sqrt[3]{x}$

51. La función escalón unitario U y la función signo sgn se definieron en los ejercicios 47 y 49, respectivamente, de la sección 1.1. (**a**) Defina $\operatorname{sgn}(U(x))$ y dibuje la gráfica. (**b**) Defina $U(\operatorname{sgn}(x))$ y dibuje la gráfica.

52. Demuestre que si f y g son funciones impares, entonces $(f + g)$ y $(f - g)$ también son funciones impares, mientras que $f \cdot g$ y f/g son funciones pares.

53. Determine si la función compuesta $f \circ g$ es par o impar en cada uno de los casos siguientes: (**a**) f y g son impares; (**b**) f es par y g es impar; (**c**) g es par.

54. Encuentre fórmulas para $(f \circ g)(x)$ si

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ 2x & \text{si } 0 \le x \le 1 \\ 0 & \text{si } 1 < x \end{cases}$$

y

$$g(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x < 0 \\ \frac{1}{2}x & \text{si } 0 \le x \le 1 \\ 1 & \text{si } 1 < x \end{cases}$$

Dibuje las gráficas de f, g y $f \circ g$.

55. Encuentre fórmulas para $(g \circ f)(x)$ a partir de las funciones del ejercicio 54. Dibuje la gráfica de $g \circ f$.

56. Si $f(x) = x^2 + 2x + 2$, encuentre dos funciones g para las cuales $(f \circ g)(x) = x^2 - 4x + 5$.

57. Si $f(x) = x^2$, encuentre dos funciones g para las cuales $(f \circ g)(x) = 4x^2 - 12x + 9$

58. Demuestre que si f y g son dos funciones lineales, entonces $f \circ g$ es una función lineal.

59. Existe una función cuyo dominio es el conjunto de todos los números reales que es a la vez par e impar. ¿Cuál es esa función? Demuestre que es única esta función.

60. Suponga que $f(x) = \dfrac{1}{x}$, $g(x) = -\dfrac{1}{x}$ y $h(x) = -x$. Demuestre que $(f \circ g)(x) = (g \circ f)(x)$ y explique por qué $f \circ g$ ni $g \circ f$ son la misma que h.

61. Trace en la graficadora las gráficas de las dos funciones F y G definidas por

$$F(x) = \frac{\sqrt{x + 1}}{\sqrt{x - 4}} \quad \text{y} \quad G(x) = \sqrt{\frac{x + 1}{x - 4}}$$

[Observe que F es la misma función que f/g del ejemplo 1(d)]. Explique por qué las gráficas de F y G no son las mismas y, consecuentemente, las funciones no son iguales.

1.3 FUNCIONES COMO MODELOS MATEMÁTICOS

En las aplicaciones del Cálculo, se necesita expresar una situación del mundo real en términos de una relación funcional, denominada **modelo matemático** de la situación. Esta sección está destinada a proporcionarle práctica en la obtención de funciones como modelos matemáticos y al mismo tiempo para mostrarle algunas de las aplicaciones que encontrará posteriormente.

Aunque no siempre se emplea un método específico para obtener un modelo matemático, a continuación se le presentan algunos pasos que le proporcionarán un procedimiento posible que deberá seguir. Conforme estudie los ejemplos, refiérase a estos pasos para ver cómo se aplican.

Sugerencias para resolver problemas que implican una función como modelo matemático

1. Lea el problema cuidadosamente hasta que lo entienda. Para comprenderlo, con frecuencia es útil inventar un ejemplo específico que involucre una situación similar en la que las cantidades son conocidas. Otra ayuda es dibujar un diagrama si es posible, como se muestra en los ejemplos 4 y 5.
2. Determine las cantidades conocidas y desconocidas. Utilice un símbolo, digamos x, para la variable independiente y un símbolo, por decir f, para la función que se obtendrá; entonces $f(x)$ simbolizará el valor de función. Como x y $f(x)$ son símbolos para representar números, sus definiciones deben indicar este hecho. Por ejemplo, si la variable independiente representa longitud y la longitud se mide en pies, entonces si x es el símbolo para la variable, x debe definirse como el número de pies de la longitud o, equivalentemente, x pies es la longitud.
3. Anote cualquier hecho numérico conocido acerca de la variable y del valor de la función.
4. A partir de la información del paso 3, determine dos expresiones algebraicas en términos de la variable y del valor de la función. De estas dos expresiones forme una ecuación que defina la función. Ahora ya se tiene una función como modelo matemático del problema.
5. A fin de terminar el problema una vez que se ha aplicado el modelo matemático, para determinar las cantidades desconocidas, *escriba una conclusión*, la cual consista de una o más oraciones, que respondan a las preguntas del problema. Asegúrese de que la conclusión contenga las unidades de medición correctas.

▶ ***EJEMPLO 1*** El volumen de un gas a presión constante es directamente proporcional a la temperatura absoluta y a la temperatura de 175° el gas ocupa 100 m^3. **(a)** Encuentre un modelo matemático que exprese el volumen como una función de la temperatura. **(b)** ¿Cuál es volumen del gas a una temperatura de 140°?

Solución

(a) Sea $f(x)$ metros cúbicos el volumen del gas cuya temperatura es x grados. Entonces, por la definición de variación directamente proporcional

$$f(x) = kx \qquad \textbf{(1)}$$

donde k es una constante. Como el volumen del gas es 100 m^3 a la temperatura de 175°, se sustituye x por 175 y $f(x)$ por 100 en (1), de donde se obtiene

$$100 = k(175)$$
$$k = \tfrac{4}{7}$$

Al sustituir este valor de k en (1), se obtiene

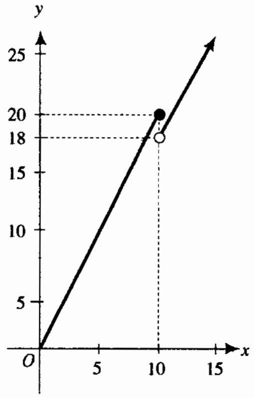
$$f(x) = \tfrac{4}{7}x$$

(b) A partir de la expresión para $f(x)$, se obtiene

$$f(140) = \tfrac{4}{7}(140)$$
$$= 80$$

<u>Conclusión:</u> A una temperatura de 140°, el volumen del gas es de 80 m^3. ◀

▶ **EJEMPLO 2** Un mayorista vende un producto por libra (o fracción de libra); si se ordenan no más de 10 libras, el mayorista cobra \$2 por libra. Sin embargo, para atraer órdenes mayores, el mayorista cobra sólo \$1.80 por libra si se ordenan más de 10 libras. (**a**) Encuentre un modelo matemático que exprese el costo total de la orden como una función de la cantidad de libras ordenadas del producto. (**b**) Dibuje la gráfica de la función del inciso (a). (**c**) Determine el costo total de una orden de 9.5 lb y de una orden de 10.5 lb.



$$C(x) = \begin{cases} 2x & \text{si } 0 \le x \le 10 \\ 1.8x & \text{si } 10 < x \end{cases}$$

FIGURA 1

Solución

(**a**) Sea $C(x)$ dólares el costo total de una orden de x libras del producto. Entonces,

$$C(x) = \begin{cases} 2x & \text{si } 0 \le x \le 10 \\ 1.8x & \text{si } 10 < x \end{cases}$$

(**b**) La gráfica de la función C se muestra en la figura 1.

(**c**) $C(x)$ se obtiene a partir de la ecuación $C(x) = 2x$ cuando $0 \le x \le 10$ y de la ecuación $C(x) = 1.8x$ cuando $10 < x$. Por tanto,

$$\begin{aligned} C(9.5) &= 2\,(9.5) & \qquad C(10.5) &= (1.8)(10.5) \\ &= 19 & &= 18.90 \end{aligned}$$

<u>Conclusión:</u> El costo total de 9.5 lb es \$19 y el costo total de 10.5 lb es \$18.90. ◀

Observe en el inciso (b) del ejemplo 2 que la gráfica de C se rompe en el punto donde $x = 10$, lo cual indica que la función C es *discontinua* en $x = 10$. Se estudiará esta propiedad en la sección 1.8. Por ahora, note que debido a esta discontinuidad de C, sería más ventajoso incrementar el tamaño de algunas órdenes de compra para obtener un costo total menor. En particular, sería imprudente comprar 9.5 lb por \$19 cuando se pueden comprar 10.5 lb por \$18.90.

En el ejemplo siguiente se tiene una función compuesta como un modelo matemático.

▶ **EJEMPLO 3** En un bosque un depredador se alimenta de su presa, y para las primeras 15 semanas a partir del fin de la temporada de caza, la población de depredadores es una función f de x, el número de presas en el bosque, la cual a su vez, es una función g de t, el número de semanas que han pasado desde el fin de la temporada de caza. Si

$$f(x) = \tfrac{1}{48}x^2 - 2x + 50 \quad \text{y} \quad g(t) = 4t + 52$$

donde $0 \le t \le 15$, haga lo siguiente: (**a**) Encuentre un modelo matemático que exprese la población de depredadores como un función del número de semanas a partir del fin de la temporada de caza. (**b**) Determine la población de depredadores 11 semanas después del cierre de la temporada de caza.

Solución

(**a**) La población de depredadores t semanas después del cierre de la temporada de caza está dada por $(f \circ g)(t)$, donde $0 \le t \le 15$.

$$\begin{aligned} (f \circ g)(t) &= f(g(t)) \\ &= f(4t + 52) \\ &= \tfrac{1}{48}(4t + 52)^2 - 2(4t + 52) + 50 \end{aligned}$$

(b) Cuando $t = 11$, se tiene

$$
\begin{aligned}
(f \circ g)(11) &= \tfrac{1}{48}(96)^2 - 2(96) + 50 \\
&= 50
\end{aligned}
$$

<u>**Conclusión:**</u> Once semanas después del cierre de la temporada de caza la población de depredadores es 50. ◀

En la sección 2.8 se considerará la situación del ejemplo 3 y se determinará la tasa a la cual creció la población de depredadores 11 semanas después del cierre de la temporada de caza.

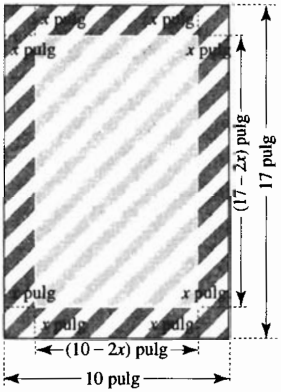


FIGURA 2

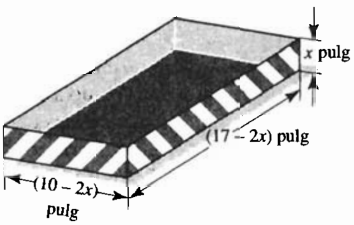
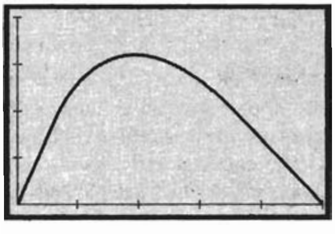


FIGURA 3



[0, 5] por [0, 200]
$V(x) = 170x - 54x^2 + 4x^3$

FIGURA 4

▶ ***EJEMPLO 4*** Un fabricante de cajas de cartón desea elaborar cajas abiertas a partir de piezas de cartón rectangulares de 10 pulg por 17 pulg cortando cuadrados iguales en las cuatro esquinas y doblando hacia arriba los lados. **(a)** Encuentre un modelo matemático que exprese el volumen de la caja como una función de la longitud del lado de los cuadrados que se cortarán. **(b)** ¿Cuál es el dominio de la función obtenida en el inciso (a)? **(c)** En una graficadora determine, con aproximación de dos cifras decimales, la longitud del lado de los cuadrados que se cortarán de modo que la caja tenga el volumen más grande posible. ¿Cuál es el volumen máximo?

Solución

(a) Sea x pulgadas la longitud del lado de los cuadrados que se cortarán y sea $V(x)$ pulgadas cúbicas el volumen de la caja. En la figura 2 se presenta una pieza de cartón dada y la figura 3 muestra la caja obtenida a partir de la pieza de cartón. El número de pulgadas de las dimensiones de la caja son x, $10 - 2x$ y $17 - 2x$. Por tanto,

$$
\begin{aligned}
V(x) &= x(10 - 2x)(17 - 2x) \\
&= 170x - 54x^2 + 4x^3
\end{aligned}
$$

(b) De la expresión para $V(x)$ del inciso (a), se observa que $V(0) = 0$ y $V(5) = 0$. A partir de las condiciones del problema se sabe que x no puede ser un número negativo ni tampoco mayor que 5. En consecuencia, el dominio de V es el intervalo cerrado $[0, 5]$.

(c) La gráfica de la función V trazada en el rectángulo de inspección de $[0, 5]$ por $[0, 200]$ se muestra en la figura 4. Se observa que V tiene un valor máximo en su dominio. La coordenada x del punto más alto de la gráfica proporciona la longitud del lado de los cuadrados, los cuales deben cortarse para obtener la caja de volumen máximo, y la coordenada y proporciona dicho volumen. En la graficadora se determina que el punto más alto es $(2.03, 156.03)$.

<u>**Conclusión:**</u> La longitud del lado de los cuadrados debe ser de 2.03 pulg para obtener la caja cuyo volumen máximo es 156.03 pulg^3. ◀

En la sección 3.2 se aplicará el Cálculo para confirmar analíticamente la respuesta del ejemplo 4(c).

▶ ***EJEMPLO 5*** Una envase cerrado de hojalata, cuyo volumen es de 60 pulg^3, tiene la forma de un cilindro circular recto. **(a)** Determine un modelo matemático que exprese el área de la superficie total del envase como una función del radio de la base. **(b)** ¿Cuál es el dominio de la función obtenida en el inciso (a)? **(c)** En una graficadora determine, con aproximación de dos cifras decimales, el radio de la base del envase si se emplea la cantidad mínima de hojalata en su elaboración.

FIGURA 5

Solución

(a) Observe la figura 5, ésta muestra el envase cilíndrico donde r pulgadas es la longitud del radio de la base y h es la altura. Se empleará la cantidad mínima de hojalata cuando el área de la superficie total sea un mínimo. El área de la superficie lateral es $2\pi rh$ pulg^2, y el área de cada una de las dos tapas es πr^2 pulg^2. Si S pulgadas cuadradas es el área de la superficie total, entonces

$$S = 2\pi rh + 2\pi r^2 \tag{2}$$

Como $\pi r^2 h$ pulgadas cúbicas es el volumen de un cilindro circular recto y el volumen del envase es de 60 pulg^3, se tiene que

$$\pi r^2 h = 60$$

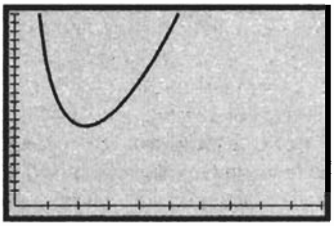
Al despejar h de esta ecuación y sustituirla en (2), se obtiene S como función de r:

$$S(r) = 2\pi r\left(\frac{60}{\pi r^2}\right) + 2\pi r^2$$

$$S(r) = \frac{120}{r} + 2\pi r^2$$

(b) Para obtener el dominio de S, observe en la ecuación que define a $S(r)$ que r no puede ser cero. Sin embargo, teóricamente r puede ser cualquier número positivo. Por tanto, el dominio de S es $(0, +\infty)$.

(c) La figura 6 muestra la gráfica de S trazada en el rectángulo de inspección de $[0, 10]$ por $[0, 200]$. La coordenada r del punto más bajo de la gráfica proporciona el radio para el área de la superficie total mínima. En la graficadora se determina que el punto más bajo es $(2.12, 84.84)$.



$[0, 10]$ por $[0, 200]$

$S(r) = \frac{120}{r} + 2\pi r^2$

FIGURA 6

<u>**Conclusión:**</u> Se empleará la cantidad mínima de hojalata en la elaboración del envase cuando el radio sea de 2.12 pulg. ◀

En la sección 3.9 se confirmará analíticamente la respuesta del ejemplo 5(c) como una aplicación del Cálculo.

▶ ***EJEMPLO 6*** En una comunidad de 8 000 personas, la velocidad con la que se difunde un rumor es conjuntamente proporcional al número de personas que lo han escuchado y al número de personas que no lo han escuchado. Cuando 20 personas han escuchado el rumor, éste circula a una velocidad de 200 personas por hora. **(a)** Encuentre un modelo matemático que exprese la velocidad a la que se esparce el rumor como una función del número de personas que lo han escuchado. **(b)** ¿Qué tan rápido circula el rumor cuando lo han escuchado 500 personas? **(c)** En la graficadora, estime cuántas personas han escuchado el rumor cuando éste corre con la mayor velocidad.

Solución

(a) Sea $f(x)$ el número de personas por hora la velocidad a la cual corre el rumor cuando lo han escuchado x personas. Entonces, por la definición de variación conjuntamente proporcional,

$$f(x) = kx(8\,000 - x) \tag{3}$$

donde k es una constante. Como el rumor circula a la velocidad de 200 personas por hora, cuando 20 personas lo han escuchado, se sustituye x por 20 y $f(x)$ por 200 en (3), obteniéndose

$$200 = k(20)(8\,000 - 20)$$
$$k = \frac{1}{798}$$

Al sustituir k por este valor en (3), se tiene

$$f(x) = \frac{x(8\,000 - x)}{798}$$

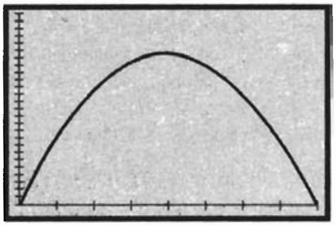
(b) De la expresión anterior para $f(x)$, se obtiene

$$f(500) = \frac{500(8\,000 - 500)}{798}$$
$$= 4\,699.25$$

Conclusión: El rumor se difunde a una tasa de 4 699 personas por hora cuando lo han escuchado 500 personas,

(c) La figura 7 muestra la gráfica de f trazada en el rectángulo de inspección de [0, 8 000] por [0, 25 000]. Se determina que el punto más alto se obtiene cuando $x = 4\,000$.

Conclusión: El rumor se difunde a la mayor velocidad cuando lo han escuchado 4 000 personas, la mitad de la población. ◀



[0, 8 000] por [0, 25 000]

$$f(x) = \frac{x(8\,000 - x)}{798}$$

FIGURA 7

En las secciones 3.2 y 7.4 se considerará la situación del ejemplo 6 para ilustrar dos aplicaciones diferentes del Cálculo. En la sección 3.2 se confirmará analíticamente la respuesta del inciso (c). Después, en la sección 7.4, se obtendrá un modelo que exprese el número de personas que han escuchado el rumor como función del tiempo que el rumor ha sido esparcido, de modo que se puede determinar cuántas personas han escuchado el rumor en cualquier momento particular. Aprenderá que la gráfica de este modelo recibe el nombre de *curva de crecimiento logístico*. También se probará en la sección 7.4 que, finalmente, la población completa escuchará el rumor.

EJERCICIOS 1.3

En cada ejercicio, obtenga una función como un modelo matemático de una situación particular. Muchos de estos modelos aparecerán posteriormente en el texto cuando se aplique el Cálculo a la situación. Defina la variable independiente y el valor de la función como un número e indique las unidades de medición. En algunos de los ejercicios, la variable independiente, por definición, puede representar un número no negativo. Por ejemplo, en el ejercicio 1 si x representa el número de trabajadores, entonces x debe ser un número entero no negativo. En tales ejercicios, para satisfacer los requerimientos de continuidad (que la gráfica no se rompa) necesarios para aplicar el Cálculo posteriormente, considere que la variable independiente representa un número real no negativo, No olvide completar el ejercicio escribiendo una conclusión.

1. La nómina de pago diario de una cuadrilla es directamente proporcional al número de trabajadores, y una cuadrilla de 12 tiene una nómina de $810. **(a)** Encuentre un modelo matemático que exprese la nómina de pago diario como una función del número de trabajadores. **(b)** ¿Cuál es la nómina de pago diario para una cuadrilla de 15 trabajadores?

2. El peso aproximado del cerebro de una persona es directamente proporcional al peso de su cuerpo, y una persona que pesa 150 lb tiene un cerebro cuyo peso aproximado es de 4 lb. **(a)** Encuentre un modelo matemático que exprese el peso aproximado del cerebro como una función del peso de la persona. **(b)** Determine el peso aproximado del cerebro de una persona que pesa 176 lb.

3. El periodo (tiempo para una oscilación completa) de un péndulo es directamente proporcional a la raíz cuadrada de la longitud del péndulo, y un péndulo de 8 pie de longitud tiene un periodo de 2 s. **(a)** Encuentre un modelo matemático que exprese el periodo de un péndulo como una función de su longitud. **(b)** Determine el periodo de un péndulo de 2 pie de longitud.

4. Para una cuerda que vibra, el número de vibraciones es directamente proporcional a la raíz cuadrada de la tensión de la cuerda, y una cuerda particular vibra 864 veces por segundo bajo una tensión de 24 kg. **(a)** Encuentre un modelo matemático que exprese el número de vibraciones como una función de la tensión. **(b)** Determine el número de vibraciones por segundo bajo una tensión de 6 kg.

5. Los cargos de embarques se basan frecuentemente en una fórmula que proporciona el cargo mínimo por libra conforme el cargamento se incrementa. Suponga que los cargos de embarques son los siguientes: \$2.20 por libra si el peso no excede 50 lb; \$2.10 por libra si el peso es mayor que 50 lb pero no excede 200 lb; \$2.05 por libra si el peso es mayor que 200 lb. **(a)** Encuentre un modelo matemático que exprese el costo total de un embarque como una función de su peso. **(b)** Dibuje la gráfica de la función del inciso (a). **(c)** Determine el costo total de un embarque de 50 lb; 51 lb; 52 lb; 53 lb; 200 lb; 202 lb; 204 lb y 206 lb.

6. En 1995, el porte de correo para una carta de primera clase se calculó como sigue: 32 centavos para la primera onza o menos, y 23 centavos por onza (o fracción de onza) adicional para las siguientes 10 oz. **(a)** Encuentre un modelo matemático que exprese el porte de correo para una carta de primera clase, que no pese más de 11 oz, como una función de su peso. **(b)** Dibuje la gráfica de la función del inciso (a). **(c)** Determine el porte de correo para una carta de primera clase que pesa 1.6 oz, 2 oz, 2.1 oz, 8.4 oz y 11 oz.

7. El costo de una llamada telefónica desde Mendocino a San Francisco durante el horario de oficinas es 40 centavos por el primer minuto y 30 centavos por cada minuto o fracción adicional. **(a)** Encuentre un modelo matemático que exprese el costo de una llamada telefónica, que no dura más de 5 min, como una función de la duración de la llamada. **(b)** Dibuje la gráfica de la función del inciso (a). **(c)** Determine el costo de una llamada telefónica que dura 0.5 min, 2 min, 2.5 min, 3 min, 3.5 min y 5 min.

8. El precio de admisión regular para un adulto a una determinada función en el Coast Cinema es de \$7, mientras que para un niño menor de 12 años de edad es de \$4 y el precio para adultos de por lo menos 60 años de edad es de \$5. **(a)** Encuentre un modelo matemático que exprese el precio de admisión como una función de la edad de la persona. **(b)** Dibuje la gráfica de la función del inciso (a).

9. La demanda de un juguete en cierto almacén es una función f de p, el número de dólares de su precio, el cual es a su vez una función g de t, el número de meses desde que el juguete llegó al almacén. Si

$$f(p) = \frac{5\,000}{p^2} \quad \text{y} \quad g(t) = \frac{1}{20}t^2 + \frac{7}{20}t + 5$$

haga lo siguiente: **(a)** encuentre un modelo matemático que exprese la demanda como una función del número de meses desde que el juguete llegó al almacén. **(b)** Determine la demanda cinco meses desde que el juguete llegó al almacén.

10. En un lago, un pez grande se alimenta de un pez mediano y la población del pez grande es una función f de x, el número de peces de tamaño mediano en el lago. A su vez, el pez mediano se alimenta de un pez pequeño, y la población de peces medianos es una función g de w, el número de peces pequeños en el lago. Si

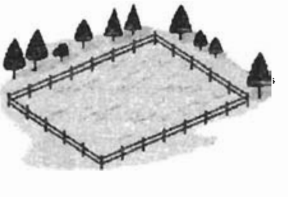
$$f(x) = \sqrt{20x} + 150 \quad \text{y} \quad g(w) = \sqrt{w} + 5\,000$$

haga lo siguiente: **(a)** encuentre un modelo matemático que exprese la población de peces grandes como una función del número de peces pequeños en el lago. **(b)** Determine el número de peces grandes cuando el lago contiene 9 millones de peces pequeños.

11. El área de la superficie de una esfera es función de su radio. Si el radio de una esfera mide r centímetros y $A(r)$ centímetros cuadrados es el área de la superficie, entonces $A(r) = 4\pi r^2$. Suponga que un globo mantiene la forma de una esfera conforme se infla de modo que el radio cambia a una tasa constante de 3 cm/s. Si $f(t)$ centímetros es el radio del globo después de t segundos, haga lo siguiente: **(a)** calcule $(A \circ f)(t)$ e interprete su resultado. **(b)** Determine el área de la superficie del globo después de 4 s.

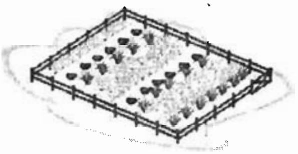
12. El volumen de una esfera es función de su radio. Si el radio de una esfera mide r pies y $V(r)$ pies cúbicos es su volumen, entonces $V(r) = \frac{4}{3}\pi r^3$. Suponga que una bola de nieve de 2 pie de radio comenzó a derretirse a una tasa constante de 4.5 pulg/min. Si $f(t)$ pies es el radio de la bola de nieve después de t minutos, haga lo siguiente: **(a)** calcule $(V \circ f)(t)$ e interprete su resultado. **(b)** Determine el volumen de la bola de nieve después de 3 min.

13. A un campo de forma rectangular se le colocaron 240 m de cerca. **(a)** Encuentre un modelo matemático que exprese el área del terreno como una función de su longitud. **(b)** ¿Cuál es el dominio de la función del inciso (a)? **(c)** Al trazar la gráfica de la función del inciso (a) en la graficadora, estime, con aproximación de metros, las dimensiones del campo rectangular de mayor área que pueda cercarse con 240 m.

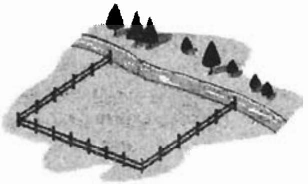


14. En un jardín rectangular se colocaron con 100 pie de cerca. **(a)** Encuentre un modelo matemático que exprese el área del jardín como una función de su longitud. **(b)** ¿Cuál es el dominio de la función del inciso (a)? **(c)** Al trazar la gráfica de la función del inciso (a) en la graficadora, estime, con aproximación de pies, las dimensiones del jar-

dín rectangular de mayor área que pueda cercarse con 100 pie.



15. Realice el ejercicio 13 considerando ahora que un lado del terreno está sobre la orilla de un río, por lo que tiene una límite natural, y el material para cercar se empleará en los otros tres lados.



16. Realice el ejercicio 14 considerando ahora que el jardín está situado de modo que el lado de una casa sirve como límite, y el material para cercar se empleará en los otros tres lados.

17. Un fabricante de cajas de hojalata abiertas desea emplear piezas de hojalata con dimensiones de 8 pulg por 15 pulg, cortando cuadrados iguales en las cuatro esquinas y doblando hacia arriba los lados. **(a)** Encuentre un modelo matemático que exprese el volumen de la caja como una función de la longitud del lado de los cuadrados que se cortarán. **(b)** ¿Cuál es el dominio de la función del inciso (a)? **(c)** Determine en la graficadora, con aproximación de décimos de pulgada, la longitud del lado de los cuadrados que se cortarán de modo que la caja tenga el volumen más grande posible. ¿Cuál es el volumen máximo aproximado a pulgadas cúbicas?

18. Un fabricante de cajas de cartón hace cajas abiertas a partir de piezas cuadradas de cartón de 12 cm de lado, cortando cuadrados iguales en las cuatro esquinas y doblando los lados hacia arriba. **(a)** Encuentre un modelo matemático que exprese el volumen de la caja como una función de la longitud del lado de los cuadrados que se cortarán. **(b)** ¿Cuál es el dominio de la función del inciso (a)? **(c)** Determine en la graficadora, con aproximación de centímetros, la longitud del lado de los cuadrados que se cortarán de modo que el volumen de la caja sea máximo. ¿Cuál es el volumen máximo aproximado a centímetros cúbicos?

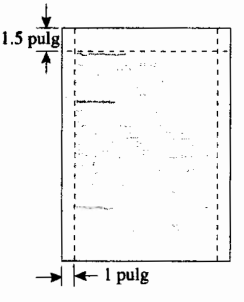
19. Realice el ejercicio 17 considerando ahora que el fabricante elabora las cajas abiertas a partir de piezas de hojalata rectangulares de dimensiones de 12 pulg por 15 pulg. En el inciso (c), determine la longitud del lado de los cuadrados que se cortarán y el volumen aproximado con dos cifras decimales.

20. Realice el ejercicio 18 considerando ahora que el fabricante elabora las cajas abiertas a partir de piezas de cartón rectangulares de dimensiones de 40 cm por 50 cm. En el inciso (c), determine la longitud del lado de los cuadrados que se cortarán y el volumen aproximado con dos cifras decimales.

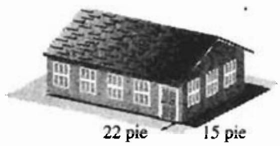
21. Para el envase de hojalata del ejemplo 5, suponga que el costo del material para las tapas es dos veces el costo del material para los lados. **(a)** Determine un modelo matemático que exprese el costo total del material como una función del radio de la base del envase. **(b)** ¿Cuál es el dominio de la función del inciso (a)? **(c)** Detemine en la graficadora, con aproximación de dos cifras decimales, el radio de la base para el cual el costo total del material es el mínimo.

22. Realice el ejemplo 5 considerando ahora que el envase es abierto en lugar de cerrado.

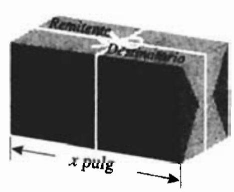
23. Una página impresa contiene una región de impresión de 24 pulg^2, un margen de 1.5 pulg en las partes superior e inferior y un margen de 1 pulg en los lados. **(a)** Encuentre un modelo matemático que exprese el área total de la página como una función del ancho de la región de impresión. **(b)** ¿Cuál es el dominio de la función del inciso (a)? **(c)** Determine, en la graficadora, con aproximación de centésimos de pulgada, las dimensiones de la página más pequeña que satisface estos requerimientos.



24. Un almacén que tiene un piso rectangular de 13 200 pie^2, se construye de modo que tenga pasillos de 22 pie de ancho en el frente y en fondo del almacén, y pasillos de 15 pie de ancho en los lados. **(a)** Encuentre un modelo matemático que exprese el área total del terreno donde se construirá el almacén y los pasillos como una función de la longitud del frente y del fondo del almacén. **(b)** ¿Cuál es el dominio de la función del inciso (a)? **(c)** Determine en la graficadora, con aproximación de centésimos de pie, las dimensiones del terreno que tiene el área mínima en el cual este almacén se construirá.



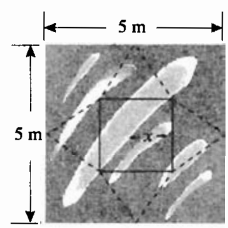
25. Suponga que desea utilizar un servicio de correo particular para enviar un paquete que tiene forma de caja rectangular con una sección transversal cuadrada tal que la suma de su longitud y el perímetro de la sección transversal es 100 pulg, el máximo permitido por el servicio. **(a)** Encuentre un modelo matemático que exprese el volumen de la caja como una función de su longitud. **(b)** ¿Cuál es el dominio de la función del inciso (a)? **(c)** Determine en la graficadora, con aproximación de pulgadas, las dimensiones del paquete que tiene el mayor volumen posible que pueda enviarse por este servicio.



26. En un ambiente limitado donde A es el número óptimo de bacterias soportado por el ambiente, la tasa del crecimiento bacteriano es conjuntamente proporcional al número presente de bacterias y la diferencia entre A y el número presente. Suponga que el número óptimo soportable por un ambiente particular es 1 millón de bacterias, y que la tasa de crecimiento es de 60 bacterias por minuto cuando se tienen 1 000 bacterias presentes. **(a)** Encuentre un modelo matemático que exprese la tasa de crecimiento bacteriano como función del número de bacterias presentes. **(b)** ¿Cuál es la tasa de crecimiento cuando están presentes 100 000 bacterias? **(c)** Determine en la graficadora, con aproximación de miles, cuántas bacterias están presentes cuando la tasa de crecimiento es un máximo.

27. Fort Bragg, en el norte de California, es una ciudad pequeña con 5 000 habitantes. Suponga que la tasa de crecimiento de una epidemia (la tasa de variación del número de personas infectadas) en Fort Bragg es conjuntamente proporcional al número de personas infectadas y el número de personas no infectadas. Cuando 100 personas están infectadas, la epidemia crece a una tasa de 9 personas por día. **(a)** Encuentre un modelo matemático que exprese la tasa de crecimiento de la epidemia como una función del número de personas no infectadas. **(b)** ¿Qué tan rápido es el crecimiento de la epidemia cuando 200 personas están infectadas? **(c)** En la graficadora, determine cuántas personas están infectadas cuando la tasa de crecimiento de la epidemia es un máximo.

28. Una tienda de campaña con forma de pirámide cuadrangular se construye a partir de una pieza cuadrada de material de 5 m de lado. En la base de la pirámide, sea x metros la distancia desde el centro a uno de sus lados. Refiérase a la figura. **(a)** Encuentre un modelo matemático que exprese el volumen de la casa de campaña como una función de x. *Sugerencia:* La fórmula para el volumen de una pirámide es $V = \frac{1}{3}Bh$, donde V, B y h son, respectivamente, las medidas del volumen, el área de la base y la altura. **(b)** Determine el volumen de la pirámide cuando $x = 0.8$. **(c)** Determine en la graficadora, con aproximación de centésimos de metro, el valor de x para el cual el volumen de la pirámide es un máximo.



1.4 INTRODUCCIÓN GRÁFICA A LOS LÍMITES DE FUNCIONES

El primer contacto con límites concierne a *límites de funciones.* Para dar una idea intuitiva del límite de una función se dedicará esta sección a una interpretación gráfica, los resultados de esto se confirmarán analíticamente al emplear desigualdades. La discusión desarrollada aquí facilitará el camino para la definición presentada en la sección 1.5.

Se comenzará con una función particular:

$$f(x) = \frac{2x^2 + x - 3}{x - 1} \qquad \textbf{(1)}$$

Observe que esta función no está definida cuando $x = 1$; esto es, $f(1)$ no existe. Sin embargo, la función está definida para cualquier otro número real. Se investigarán los valores de la función cuando x se aproxima a 1, pero sin lle-

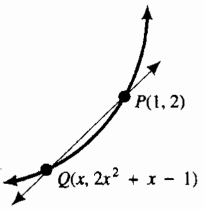


FIGURA 1

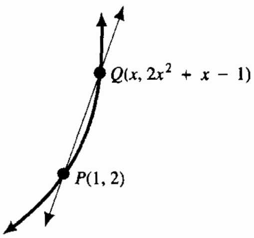


FIGURA 2

Tabla 1

x	$f(x) = \dfrac{2x^2 + x - 3}{x - 1}$
0	3
0.25	3.5
0.5	4
0.75	4.5
0.9	4.8
0.99	4.98
0.999	4.998
0.9999	4.9998
0.99999	4.99998

Tabla 2

x	$f(x) = \dfrac{2x^2 + x - 3}{x - 1}$
2	7
1.75	6.5
1.5	6.0
1.25	5.5
1.1	5.2
1.01	5.02
1.001	5.002
1.0001	5.0002
1.00001	5.00002

gar a ser 1. Usted puede preguntarse por qué se desea considerar estos valores de función. El siguiente ejemplo ilustrativo orientará esa pregunta.

EJEMPLO ILUSTRATIVO 1 El punto $P(1, 2)$ está sobre la curva que tiene como ecuación

$$y = 2x^2 + x - 1$$

Sea $Q(x, 2x^2 + x - 1)$ otro punto sobre esta curva, diferente de P. Cada una de las figuras 1 y 2 muestran una porción de la gráfica de la ecuación y la recta secante que pasa por Q y P, donde Q está cerca de P. En la figura 1, la coordenada x de Q es menor que 1, y en la figura 2 es mayor que 1. Suponga que $f(x)$ es la pendiente de la recta PQ. Entonces

$$f(x) = \frac{(2x^2 + x - 1) - 2}{x - 1}$$

$$f(x) = \frac{2x^2 + x - 3}{x - 1}$$

la cual es la ecuación (1). Además, $x \neq 1$ porque P y Q son puntos distintos. Conforme x se aproximan cada vez más a 1, los valores de $f(x)$ se acercan cada vez más al número que se definirá en la sección 2.1 como la pendiente de la recta tangente a la curva en el punto P. ◀

Considere otra vez la función definida por la ecuación (1) y calcule $f(x)$ cuando x toma los valores 0, 0.25, 0.50, 0.75, 0.9, 0.99, 0.999, 0.9999, 0.99999, y así sucesivamente. Se están tomando valores de x cada vez más cercanos a 1 pero menores que 1; en otras palabras, la variable x se aproxima a 1 a través de números que son menores que 1. La tabla 1 proporciona los valores de la función para estos números.

Ahora considere que la variable se aproxima a 1 a través de números que son mayores que 1; esto es, x toma los valores 2, 1.75, 1.5, 1.25, 1.1, 1.01, 1.001, 1.0001, 1.00001, etc. Los valores de la función para estos números se muestran en la tabla 2.

Observe que en las dos tablas conforme x se aproxima cada vez más a 1, $f(x)$ se acerca más y más a 5; y cuanto más cerca esté x de 1, más cerca estará $f(x)$ de 5. Por ejemplo, de la tabla 1, cuando $x = 0.9$, $f(x) = 4.8$; esto es, cuando x es menor que 1 por 0.1, $f(x)$ es menor que 5 por 0.2. Cuando $x = 0.999$, $f(x) = 4.998$; es decir, cuando x es menor que 1 por 0.001, $f(x)$ es menor que 5 por 0.002. Además, cuando $x = 0.9999$, $f(x) = 0.49998$; esto es, cuando x es menor que 1 por 0.0001, $f(x)$ es menor que 5 por 0.0002.

La tabla 2, muestra que cuando $x = 1.1$, $f(x) = 5.2$; esto es, cuando x es mayor que 1 por 0.1, $f(x)$ es mayor que 5 por 0.2. Cuando $x = 1.001$, $f(x) = 5.002$; es decir, cuando x es mayor que 1 por 0.001, $f(x)$ es mayor que 5 por 0.002. Cuando $x = 1.0001$, $f(x) = 5.0002$; esto es, cuando x es mayor que 1 por 0.0001, $f(x)$ es mayor que 5 por 0.0002.

Por tanto, de las dos tablas se observa que cuando x difiere de 1 por $\pm$ 0.001, (esto es $x = 0.999$ o $x = 1.001$), $f(x)$ difiere de 5 por $\pm$ 0.002 (es decir $f(x) = 4.998$ o $f(x) = 5.002$). Y cuando x difiere de 1 por $\pm$ 0.0001, $f(x)$ difiere de 5 por $\pm$ 0.0002.

Ahora, enfocando la situación desde otro punto de vista, se considerarán primero los valores de $f(x)$. Es posible hacer que los valores de $f(x)$ estén tan cercanos a 5 como se desee, si se toman valores de x suficientemente cercanos a 1; esto es, $|f(x) - 5|$ puede hacerse tan pequeño como se desee haciendo $|x - 1|$ lo suficientemente pequeño. Pero tenga presente que x nunca toma el valor 1.

Esta condición puede escribirse en forma más precisa empleando dos símbolos para las diferencias pequeñas. Los símbolos empleados usualmente son las letras griegas ϵ (épsilon) y δ (delta). De modo que se establece que para cualquier número positivo ϵ existe un número positivo δ, seleccionado adecuadamente, tal que si $|x - 1|$ es menor que δ y $|x - 1| \neq 0$ (esto es, $x \neq 1$), entonces $|f(x) - 5|$ es menor que ϵ. Es importante señalar que primero se elige ϵ y que el valor de δ depende del valor de ϵ. Otra forma de expresar esto es: proporcionado cualquier número positivo ϵ, puede lograrse que $|f(x) - 5| < \epsilon$ tomando $|x - 1|$ lo suficientemente pequeño; es decir, existe un número positivo δ lo suficientemente pequeño tal que

$$\text{si} \quad 0 < |x - 1| < \delta \quad \text{entonces} \quad |f(x) - 5| < \epsilon \tag{2}$$

Observe que el numerador de la fracción en (1) puede factorizarse de modo que

$$f(x) = \frac{(2x + 3)(x - 1)}{x - 1}$$

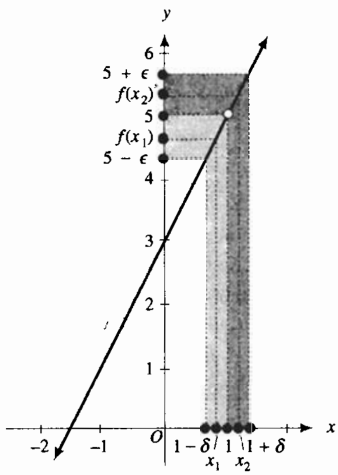
Si $x \neq 1$, entonces el numerador y el denominador pueden dividirse entre $x - 1$ para obtener

$$f(x) = 2x + 3 \qquad x \neq 1 \tag{3}$$

La ecuación (3), junto con la indicación de que $x \neq 1$, es tan adecuada como la ecuación (1) para una definición de $f(x)$.

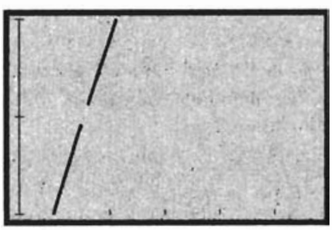
Ahora se verá el significado geométrico de todo esto para la función particular definida por las ecuaciones (1) o (3). La figura 3 ilustra el significado geométrico de ϵ y δ. Observe que si x, en el eje horizontal, está entre $1 - \delta$ y $1 + \delta$, entonces $f(x)$, en el eje vertical, estará entre $5 - \epsilon$ y $5 + \epsilon$; o equivalentemente,

$$\text{si} \quad 0 < |x - 1| < \delta \quad \text{entonces} \quad |f(x) - 5| < \epsilon$$



$$f(x) = \frac{2x^2 + x - 3}{x - 1}$$

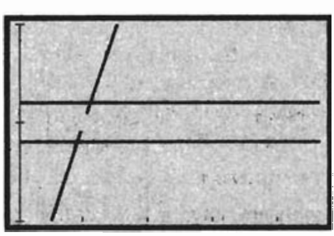
FIGURA 3



[0, 4.7] por [4, 6]

$$f(x) = \frac{2x^2 + x - 3}{x - 1}$$

FIGURA 4



[0, 4.7] por [4, 6]

$$f(x) = \frac{2x^2 + x - 3}{x - 1}$$

$y = 4.8$ y $y = 5.2$

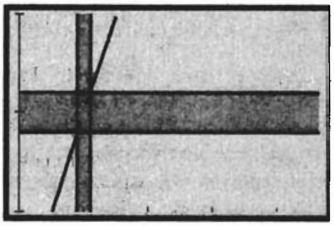
FIGURA 5

Otra manera de establecer esto es la siguiente: $f(x)$, en el eje vertical, puede restringirse a que esté entre $5 - \epsilon$ y $5 + \epsilon$ obligando a que x, en el eje horizontal, esté entre $1 - \delta$ y $1 + \delta$.

A continuación se mostrará gráficamente cómo elegir una δ adecuada para una ϵ dada. La figura 4 muestra la gráfica de la función f trazada en el rectángulo de inspección de [0, 4.7] por [4, 6]. La gráfica tiene un «agujero» en el punto (1, 5), el cual puede o no exhibirse en la graficadora, esto depende del modelo de la graficadora y del rectángulo de inspección elegido.
Suponga que $\epsilon = 0.2$; se desea restringir $f(x)$, en el eje vertical, de modo que esté entre $5 - 0.2$ y $5 + 0.2$ o, equivalentemente, entre 4.8 y 5.2. Se trazan las rectas $y = 4.8$ y $y = 5.2$ y la gráfica de f en el mismo rectángulo de inspección, como se muestra en la figura 5. Se observa que las rectas intersectan a la gráfica de f en los puntos donde $x = 0.9$ y $x = 1.1$, respectivamente. De modo que para $\epsilon = 0.2$, se toma $\delta = 0.1$ y se establece que

$$\text{si} \quad 0 < |x - 1| < 0.1 \quad \text{entonces} \quad |f(x) - 5| < 0.2$$

Esta es la proposición (2) con $\epsilon = 0.2$ y $\delta = 0.1$, lo cual está de acuerdo con lo observado en las tablas 1 y 2. Si su graficadora tiene la característica de *sombra* (*shade*), se podrá tener apoyo gráfico al trazar la gráfica de f: el rectángulo horizontal sombreado entre las rectas $y = 4.8$ y $y = 5.2$, y el



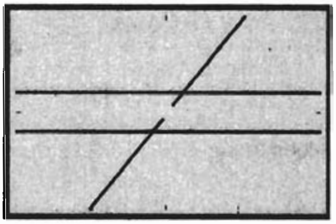
$[0, 4.7]$ por $[4, 6]$

$f(x) = \dfrac{2x^2 + x - 3}{x - 1}$

$y = 4.8$ y $y = 5.2$

$x = 0.9$ y $x = 1.1$

FIGURA 6

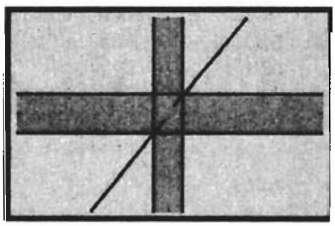


$[0.9, 1.1]$ por $[4.9, 5.1]$

$f(x) = \dfrac{2x^2 + x - 3}{x - 1}$

$y = 4.98$ y $y = 5.02$

FIGURA 7



$[0.9, 1.1]$ por $[4.9, 5.1]$

$f(x) = \dfrac{2x^2 + x - 3}{x - 1}$

$y = 4.98$ y $y = 5.02$

$x = 0.99$ y $x = 1.01$

FIGURA 8

rectángulo vertical sombreado entre las rectas $x = 0.9$ y $x = 1.1$ en el rectángulo de inspección de $[0, 4.7]$ por $[4, 6]$ como se muestra en la figura 6.

Ahora suponga que $\epsilon = 0.02$ y trace la gráfica de f y las rectas $y = 4.98$ y $y = 5.02$ en el rectángulo de inspección de $[0.9, 1.1]$ por $[4.9, 5.1]$ como se muestra en la figura 7. Se observa que las rectas intersectan a la gráfica de f en los puntos donde $x = 0.99$ y $x = 1.01$, respectivamente. Por tanto, para $\epsilon = 0.02$, se toma $\delta = 0.01$ y se establece que

$$\text{si} \quad 0 < |x - 1| < 0.01 \quad \text{entonces} \quad |f(x) - 5| < 0.02$$

Esta es la proposición (2) con $\epsilon = 0.02$ y $\delta = 0.01$, lo cual está de acuerdo con la información de las tablas 1 y 2. Otra vez se obtiene apoyo gráfico adicional de la figura 8, la cual muestra el rectángulo horizontal sombreado entre las rectas $y = 4.98$ y $y = 5.02$, el rectángulo vertical sombreado entre las rectas $x = 0.99$ y $x = 1.01$ y la gráfica de f en el rectángulo de inspección de $[0.9, 1.1]$ por $[4.9, 5.1]$.

Se puede dar como ϵ cualquier número positivo pequeño y determinar un valor adecuado para δ tal que si $|x - 1| < \delta$ y $x \neq 1$ (esto es, $0 < |x - 1| < \delta$), entonces $|f(x) - 5|$ será menor que ϵ. Observe que los valores de ϵ se eligen arbitrariamente y puede ser tan pequeño como se desee, y que el valor de δ depende del valor elegido de ϵ. También debe señalarse que a un valor pequeño de ϵ le corresponderá un valor pequeño de δ. Como para cualquier $\epsilon > 0$ puede determinarse un $\delta > 0$ tal que la proposición (2) se cumpla, se establece que el límite de $f(x)$ conforme x tiende o se aproxima a 1, es igual a 5, o expresado con símbolos

$$\lim_{x \to 1} f(x) = 5$$

Observe que en esta ecuación se tiene un nuevo uso del símbolo "igual". Aquí, ningún valor de x hace que $f(x)$ tenga el valor 5. El símbolo "igual" es apropiado debido a que el lado izquierdo está escrito como $\lim\limits_{x \to 1} f(x)$

De (3) es evidente que puede lograrse que $f(x)$ esté tan cerca de 5 como se desee, tomando x suficientemente cerca de 1, por lo que esta propiedad de la función f no depende de que f esté definida cuando $x = 1$. Este hecho proporciona la diferencia entre $\lim\limits_{x \to 1} f(x)$ y el valor de la función en 1; es decir, $\lim\limits_{x \to 1} f(x) = 5$, *pero* $f(1)$ *no existe*. En consecuencia, en la proposición (2), se escribe $0 < |x - 1|$ debido a que sólo nos interesan los valores de $f(x)$ para x cerca de 1, pero no para $x = 1$.

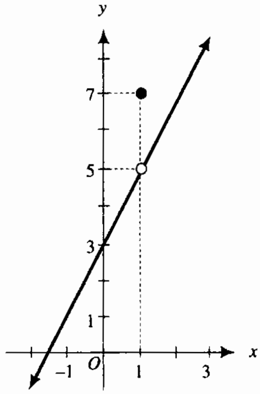
▷ **EJEMPLO ILUSTRATIVO 2** Sea g la función definida por

$$g(x) = \begin{cases} 2x + 3 & \text{si } x \neq 1 \\ 7 & \text{si } x = 1 \end{cases}$$

La gráfica de g se muestra en la figura 9. Excepto en $x = 1$, la función g tiene los mismos valores de la función f definida por la ecuación (1). En consecuencia, como el hecho de que $\lim\limits_{x \to 1} f(x) = 5$ no tiene nada que ver con lo que ocurre en $x = 1$, se puede aplicar el argumento anterior a la función g y concluir que para cualquier $\epsilon > 0$ existe un $\delta > 0$ tal que

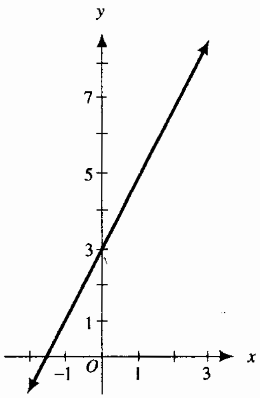
$$\text{si} \quad 0 < |x - 1| < \delta \quad \text{entonces} \quad |g(x) - 5| < \epsilon$$

de modo que $\lim\limits_{x \to 1} g(x) = 5$. Note que $g(1) = 7$; por lo que para esta función, el límite de la función y el valor de la función existen para $x = 1$, pero no son iguales. ◀



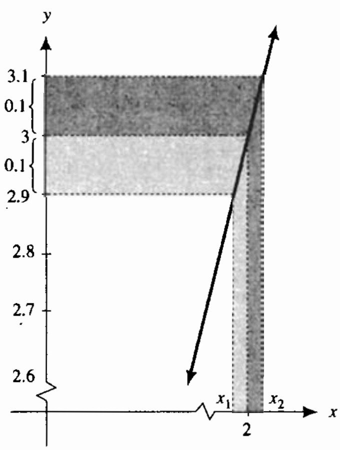
$g(x) = \begin{cases} 2x + 3 & \text{si } x \neq 1 \\ 7 & \text{si } x = 1 \end{cases}$

FIGURA 9



$h(x) = 2x + 3$

FIGURA 10



$f(x) = 4x - 5$

FIGURA 11

EJEMPLO ILUSTRATIVO 3 Sea h la función definida por

$$h(x) = 2x + 3$$

La gráfica de h consta de todos los puntos de la recta $y = 2x + 3$, mostrada en la figura 10. Otra vez, excepto en $x = 1$, se tiene una función con los mismos valores de la función f, definida por la ecuación (1), así como de la función g del ejemplo ilustrativo 2. De este modo, se puede aplicar una vez más el mismo argumento y concluir que para cualquier $\epsilon > 0$ existe un $\delta > 0$ tal que

$$\text{si} \quad 0 < |x - 1| < \delta \quad \text{entonces} \quad |h(x) - 5| < \epsilon$$

de modo que $\lim\limits_{x \to 1} h(x) = 5$. Sin embargo, en esta ocasión, el valor de la función y el límite existen y son iguales para $x = 1$. Una consecuencia de este hecho, como se verá en la sección 1.8, es que la función h es *continua* en $x = 1$. Observe que la gráfica de h de la figura 10 no tiene ningún agujero en $x = 1$, considerando que las gráficas de f y g de las figuras 3 y 9, respectivamente, tienen un agujero en $x = 1$. En la sección 1.8 aprenderá que las funciones f y g son *discontinuas* en $x = 1$. ◀

EJEMPLO 1 Sea f la función definida por

$$f(x) = 4x - 5$$

(a) Utilice una figura semejante a la figura 3 para $\epsilon = 0.1$ con el fin de determinar una $\delta > 0$, tal que

$$\text{si} \quad 0 < |x - 2| < \delta \quad \text{entonces} \quad |f(x) - 3| < 0.1$$

(b) Apoye la elección de δ del inciso (a) con el uso de la graficadora.

Solución

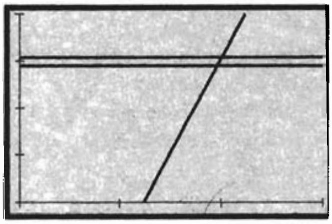
(a) Refiérase a la figura 11 y observe que los valores de la función crecen conforme x se incrementa. Así, la figura indica que se necesita un valor de x_1 tal que $f(x_1) = 2.9$ y un valor de x_2 tal que $f(x_2) = 3.1$; esto es, se necesitan x_1 y x_2 tales que

$$\begin{aligned} 4x_1 - 5 &= 2.9 & \qquad 4x_2 - 5 &= 3.1 \\ x_1 &= \frac{7.9}{4} & x_2 &= \frac{8.1}{4} \\ x_1 &= 1.975 & x_2 &= 2.025 \end{aligned}$$

Debido a que $2 - 1.975 = 0.025$ y $2.025 - 2 = 0.025$, se elige $\delta = 0.025$ de modo que se tiene la proposición

$$\text{si} \quad 0 < |x - 2| < 0.025 \quad \text{entonces} \quad |f(x) - 3| < 0.1$$

(b) En la graficadora se traza la gráfica de f y las rectas $y = 2.9$ y $y = 3.1$ en el rectángulo de inspección de [0, 3] por [0, 4] como se muestra en la figura 12. Con la operación de *intersección* (*intersection*) o las de *rastreo* (*trace*) y *aumento* (*zoom*) de la graficadora, se determina que la recta $y = 2.9$ intersecta a la gráfica de f en $x = 1.975$ y que la recta $y = 3.1$ intersecta a dicha gráfica en $x = 2.025$, lo cual apoya la elección de δ efectuada en el inciso (a). ◀



$[0, 3]$ por $[0, 4]$

$f(x) = 4x - 5$

$y = 2.9$ y $y = 3.1$

FIGURA 12

En el ejemplo siguiente se utiliza el símbolo $\Rightarrow$ por primera vez. La flecha $\Rightarrow$ significa *implica*. También se emplea la doble flecha $\Leftrightarrow$, lo cual significa que las proposiciones precedente y siguiente son *equivalentes*.

EJEMPLO 2 Confirme analíticamente la elección de δ en el ejemplo 1 utilizando propiedades de las desigualdades.

Solución Se desea determinar una $\delta > 0$ tal que

$$
\begin{array}{lllll}
 & \text{si} & 0 < |x - 2| < \delta & \text{entonces} & |f(x) - 3| < 0.1 \\
\Leftrightarrow & \text{si} & 0 < |x - 2| < \delta & \text{entonces} & |(4x - 5) - 3| < 0.1 \\
\Leftrightarrow & \text{si} & 0 < |x - 2| < \delta & \text{entonces} & 4|x - 2| < 0.1 \\
\Leftrightarrow & \text{si} & 0 < |x - 2| < \delta & \text{entonces} & |x - 2| < 0.025
\end{array}
$$

Esta proposición indica que una elección adecuada de δ es 0.025. Con esta δ, se tiene el argumento siguiente:

$$
\begin{array}{rrl}
 & 0 < |x - 2| & < 0.025 \\
 & 4|x - 2| & < 4(0.025) \\
\Rightarrow & |4x - 8| & < 0.1 \\
\Rightarrow & |(4x - 5) - 3| & < 0.1 \\
\Rightarrow & |f(x) - 3| & < 0.1
\end{array}
$$

De esta manera, se ha confirmado analíticamente que

$$\text{si} \quad 0 < |x - 2| < 0.025 \quad \text{entonces} \quad |f(x) - 3| < 0.1 \tag{4}$$

En los ejemplos 1 y 2 cualquier número positivo menor que 0.025 puede utilizarse en lugar de 0.025 como la δ requerida. Observe este hecho en la figura 11. Además, si $0 < \gamma < 0.025$ y si se cumple la desigualdad (4), entonces se tiene que

$$\text{si} \quad 0 < |x - 2| < \gamma \quad \text{entonces} \quad |f(x) - 3| < 0.1$$

ya que cualquier número x que satisfaga la desigualdad $0 < |x - 2| < \gamma$ también satisface la desigualdad $0 < |x - 2| < 0.025$.

Las soluciones de los ejemplos 1 y 2 consistieron en determinar una δ para una ϵ específica. En la sección 1.5 aprenderá que si para cualquier $\epsilon > 0$ se puede determinar una $\delta > 0$, tal que

$$\text{si} \quad 0 < |x - 2| < \delta \quad \text{entonces} \quad |(4x - 5) - 3| < \epsilon$$

entonces se habrá establecido que $\lim_{x \to 2} (4x - 5) = 3$. Esto se hará en el ejemplo 1 de la sección 1.5.

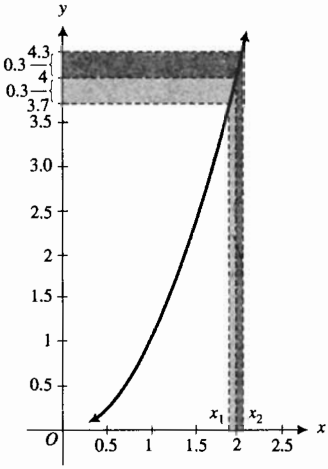
EJEMPLO 3 Sea f la función definida por

$$f(x) = x^2$$

(a) Utilice una figura con $\epsilon = 0.3$ para determinar una $\delta > 0$ tal que

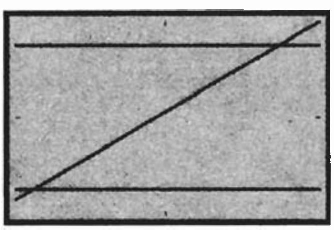
$$\text{si} \quad 0 < |x - 2| < \delta \quad \text{entonces} \quad |f(x) - 4| < 0.3$$

(b) Apoye la elección de δ del inciso (a) con el uso de la graficadora.



$f(x) = x^2$

FIGURA 13



[1.91, 2.09] por [3.6, 4.4]

$f(x) = x^2$

$y = 3.7$ y $y = 4.3$

FIGURA 14

Solución

(a) La figura 13 muestra una porción de la gráfica de f en una vecindad del punto (2, 4). Si $x > 0$, los valores de la función crecen conforme el valor de x se incrementa. Por tanto, la figura indica que se necesita un valor positivo x_1 tal que $f(x_1) = 3.7$ y un valor positivo x_2 tal que $f(x_2) = 4.3$; esto es, se necesitan $x_1 > 0$ y $x_2 > 0$, tales que

$$\begin{array}{ll} x_1^2 = 3.7 & x_2^2 = 4.3 \\ x_1 = \sqrt{3.7}7 & x_2 = \sqrt{4.3} \\ x_1 \approx 1.92 & x_2 \approx 2.07 \end{array}$$

Entonces $2 - 1.92 = 0.08$ y $2.07 - 2 = 0.07$. Debido a que $0.07 < 0.08$, se elige $\delta = 0.07$ de modo que se tiene la proposición

$$\text{si} \quad 0 < |x - 2| < 0.07 \quad \text{entonces} \quad |f(x) - 4| < 0.3$$

Cualquier número positivo menor que 0.07 puede tomarse como la δ requerida.

(b) La figura 14 muestra las gráficas de f y de las rectas $y = 3.7$ y $y = 4.3$ trazadas en el rectángulo de inspección de [1.91, 2.09] por [3.6, 4.4]. En la graficadora se determina que la recta $y = 3.7$ intersecta a la gráfica de f en $x = 1.92$ y que la recta $y = 4.3$ intersecta a dicha gráfica en $x = 2.07$, lo cual apoya la elección de δ del inciso (a). ◀

▶ ***EJEMPLO 4*** Confirme analíticamente la elección de δ del ejemplo 3 empleando propiedades de las desigualdades.

Solución Se desea determinar una $\delta > 0$ tal que

$$\begin{array}{lllll} & \text{si} \quad 0 < |x - 2| < \delta & \text{entonces} & |f(x) - 4| < 0.3 & (5) \\ \Leftrightarrow & \text{si} \quad 0 < |x - 2| < \delta & \text{entonces} & |x^2 - 4| < 0.3 & \\ \Leftrightarrow & \text{si} \quad 0 < |x - 2| < \delta & \text{entonces} & |x - 2|\,|x + 2| < 0.3 & \end{array}$$

Observe en el lado derecho de esta proposición que además del factor $|x - 2|$, se tiene el factor $|x + 2|$. Por tanto, se necesita obtener una desigualdad que contenga a $|x + 2|$. Para hacer esto, se restringe la δ que se requiere. Considere que δ es menor que o igual a 0.1, lo cual parece razonable. Entonces

$$\begin{array}{ll} & 0 < |x - 2| < \delta \quad \text{y} \quad \delta \le 0.1 \\ \Rightarrow & 0 < |x - 2| < 0.1 \\ \Rightarrow & -0.1 < x - 2 < 0.1 \\ \Rightarrow & 3.9 < x + 2 < 4.1 \\ \Rightarrow & |x + 2| < 4.1 \end{array}$$

Así

$$\begin{array}{ll} & 0 < |x - 2| < \delta \quad \text{y} \quad \delta \le 0.1 \\ \Rightarrow & 0 < |x - 2| < \delta \quad \text{y} \quad |x + 2| < 4.1 \\ \Rightarrow & |x - 2| \cdot |x + 2| < \delta(4.1) \end{array}$$

Recuerde que el objetivo consiste en obtener la proposición (5). De modo que, debe pedirse que

$$\delta(4.1) \le 0.3 \quad \Leftrightarrow \quad \delta \le \tfrac{3}{41}$$

Ahora se tienen dos restricciones sobre δ: $\delta \leq 0.1$ y $\delta \leq \frac{3}{41}$. Para que ambas restricciones se cumplan, se toma $\delta = \frac{3}{41}$, el menor de los dos números. Mediante el uso de esta δ, se tiene el argumento siguiente:

$$
\begin{aligned}
& 0 < |x - 2| < \tfrac{3}{41} \\
\Rightarrow \quad & |x - 2| < \tfrac{3}{41} \quad \text{y} \quad |x + 2| < 4.1 \\
\Rightarrow \quad & |x - 2|\,|x + 2| < \tfrac{3}{41}(4.1) \\
\Rightarrow \quad & |x^2 - 4| < 0.3
\end{aligned}
$$

Por tanto, se ha determinado una δ de modo que la proposición (5) se cumple. Puesto que $\frac{3}{41} \approx 0.07$ se ha confirmado la elección de δ del ejemplo 3. ◀

Ahora se aplicarán los conceptos anteriores a fin de determinar cómo debe medirse aproximadamente una cantidad para asegurar una aproximación específica de la medición de una segunda cantidad que depende de la primera.

▶ ***EJEMPLO 5*** Para la situación del ejemplo 1 de la sección 1.3, ¿cuál debe ser la temperatura del gas si éste ocupa un volumen entre 79.5 m^3 y 80.5 m^3?

Solución En el ejemplo 1 de la sección 1.3 se obtuvo el siguiente modelo matemático de la situación:

$$f(x) = \tfrac{4}{7}x$$

donde $f(x)$ metros cúbicos es el volumen de un gas cuya temperatura es x grados. Como $f(140) = 80$, el gas ocupa 80 m^3 a una temperatura de 140°. Se desea determinar qué tan cerca debe estar x de 140 para que $f(x)$ no esté a más de 0.5 de 80; esto es, para $\epsilon = 0.5$ se desea determinar una $\delta > 0$ tal que

$$
\begin{aligned}
& \text{si} \quad 0 < |x - 140| < \delta \quad \text{entonces} \quad |f(x) - 80| < 0.5 \\
\Leftrightarrow \quad & \text{si} \quad 0 < |x - 140| < \delta \quad \text{entonces} \quad |\tfrac{4}{7}x - 80| < 0.5 \\
\Leftrightarrow \quad & \text{si} \quad 0 < |x - 140| < \delta \quad \text{entonces} \quad \tfrac{7}{4}\,|\tfrac{4}{7}x - 80| < \tfrac{7}{4}\,(0.5) \\
\Leftrightarrow \quad & \text{si} \quad 0 < |x - 140| < \delta \quad \text{entonces} \quad |x - 140| < 0.875
\end{aligned}
$$

Por tanto, se toma $\delta = 0.875$, y se tiene el argumento siguiente:

$$
\begin{aligned}
& 0 < |x - 140| < 0.875 \\
\Rightarrow \quad & \tfrac{4}{7}\,|x - 140| < \tfrac{4}{7}(0.875) \\
\Rightarrow \quad & |\tfrac{4}{7}x - 80| < 0.5
\end{aligned}
$$

En consecuencia,

$$\text{si} \quad 0 < |x - 140| < 0.875 \quad \text{entonces} \quad |f(x) - 80| < 0.5$$

Conclusión: Para que el gas ocupe un volumen entre 79.5 y 80.5 m^3 su temperatura debe estar entre 139.125° y 140.875°. ◀

▶ ***EJEMPLO 6*** La cubierta circular de una mesa tiene un área que difiere de 225π pulg^2 en menos de 4 pulg^2. ¿Cuál es la medida aproximada del radio?

$A(r) = \pi r^2$

FIGURA 15

Solución Observe la figura 15. Si la longitud del radio de la cubierta de la mesa es de r pulgadas y $A(r)$ pulgadas cuadradas es el área de la cubierta, entonces

$$A(r) = \pi r^2$$

El área es 225π pulg^2 cuando el radio mide 15 pulg. Se desea determinar qué tan cerca debe estar r de 15, de modo que $A(r)$ no esté a más de 4 unidades de 225π. Esto es, si $\epsilon = 4$, se desea determinar una $\delta > 0$, tal que

$$\begin{aligned} & \text{si } 0 < |r - 15| < \delta \quad \text{entonces} \quad |A(r) - 225\pi| < 4 \\ \Leftrightarrow \quad & \text{si } 0 < |r - 15| < \delta \quad \text{entonces} \quad |\pi r^2 - 225\pi| < 4 \\ \Leftrightarrow \quad & \text{si } 0 < |r - 15| < \delta \quad \text{entonces} \quad |r - 15|\,|r + 15| < \frac{4}{\pi} \qquad (6) \end{aligned}$$

Debido a que se tiene el factor $|x + 15|$ del lado derecho de la proposición (6), se necesita una desigualdad que contenga a este factor. A fin de obtener dicha desigualdad, se restringe δ de modo que $\delta \leq 1$. Entonces

$$\begin{aligned} & 0 < |r - 15| < \delta \;\text{ y }\; \delta \leq 1 \Rightarrow 0 < |r - 15| < 1 \\ \Rightarrow \quad & -1 < r - 15 < 1 \Rightarrow 14 < r < 16 \\ \Rightarrow \quad & 29 < r + 15 < 31 \Rightarrow |r + 15| < 31 \end{aligned}$$

Por tanto,

$$\text{si } 0 < |r - 15| < \delta \;\text{ y }\; \delta \leq 1 \text{ entonces } |r - 15|\,|r + 15| < \delta(31)$$

Como se desea que la proposición (6) se cumpla, será necesario que

$$\delta(31) \leq \frac{4}{\pi} \quad \Leftrightarrow \quad \delta \leq \frac{4}{31\pi}$$

Ahora se tienen dos restricciones sobre δ: $\delta \leq 1$ y $\delta \leq \frac{4}{31\pi}$. Se elige δ como $\frac{4}{31\pi}$, el menor de estos dos números. Con esta δ se tiene el siguiente argumento:

$$\begin{aligned} & 0 < |r - 15| < \frac{4}{31\pi} \\ \Rightarrow \quad & |r - 15| < \frac{4}{31\pi} \;\text{ y }\; |r + 15| < 31 \\ \Rightarrow \quad & |r - 15|\,|r + 15| < \frac{4}{31\pi}(31) \\ \Rightarrow \quad & \pi|r^2 - 225| < 4 \end{aligned}$$

Por tanto,

$$\text{si } \; 0 < |r - 15| < \frac{4}{31\pi} \quad \text{entonces} \quad |A(r) - 225\pi| < 4$$

Como $\frac{4}{31\pi} \approx 0.041$, se tiene la siguiente conclusión.

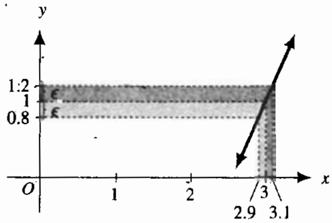
Conclusión: El radio de la cubierta de la mesa debe estar entre 14.959 pulg y 15.041 pulg para que dicha cubierta tenga un área que difiera de 225π pulg^2 por menos de 4 pulg^2.

EJERCICIOS 1.4

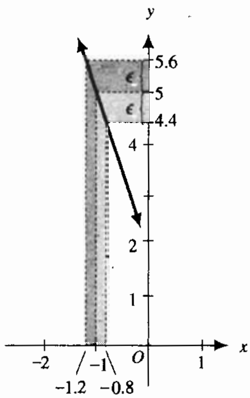
En los ejercicios 1 y 2, se proporcionan $f(x)$, a, L, ϵ y una figura. A partir de la figura determine $\delta > 0$, tal que

$$\text{si} \quad 0 < |x - a| < \delta \text{ entonces} \quad |f(x) - L| < \epsilon$$

1. $f(x) = 2x - 5$; $a = 3$; $L = 1$; $\epsilon = 0.2$



2. $f(x) = 2 - 3x$; $a = -1$; $L = 5$; $\epsilon = 0.6$



En los ejercicios 3 a 14, se proporcionan $f(x)$, a, L y ϵ. (a) Utilice una figura semejante a la de los ejercicios 1 y 2 y el ejemplo 1, y argumentos similares al del ejemplo 1 para determinar una $\delta > 0$, tal que

$$\text{si} \quad 0 < |x - a| < \delta \text{ entonces} \quad |f(x) - L| < \epsilon$$

(b) Apoye la elección de δ del inciso (a) usando una graficadora.

3. $f(x) = x - 1$; $a = 4$; $L = 3$; $\epsilon = 0.03$

4. $f(x) = x + 2$; $a = 3$; $L = 5$; $\epsilon = 0.02$

5. $f(x) = 2x + 4$; $a = 3$; $L = 10$; $\epsilon = 0.01$

6. $f(x) = 3x - 1$; $a = 2$; $L = 5$; $\epsilon = 0.1$

7. $f(x) = 5x - 3$; $a = 1$; $L = 2$; $\epsilon = 0.05$

8. $f(x) = 4x - 5$; $a = 2$; $L = 3$; $\epsilon = 0.001$

9. $f(x) = 3 - 4x$; $a = -1$; $L = 7$; $\epsilon = 0.02$

10. $f(x) = 2 + 5x$; $a = -2$; $L = -8$; $\epsilon = 0.002$

11. $f(x) = \dfrac{x^2 - 4}{x + 2}$; $a = -2$; $L = -4$; $\epsilon = 0.01$

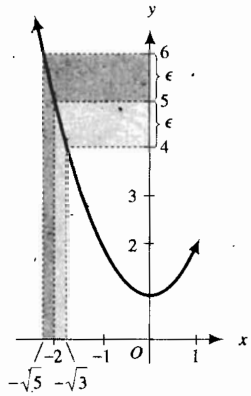
12. $f(x) = \dfrac{9x^2 - 1}{3x - 1}$; $a = \dfrac{1}{3}$; $L = 2$; $\epsilon = 0.01$

13. $f(x) = \dfrac{4x^2 - 4x - 3}{2x + 1}$; $a = -\dfrac{1}{2}$; $L = -4$; $\epsilon = 0.03$

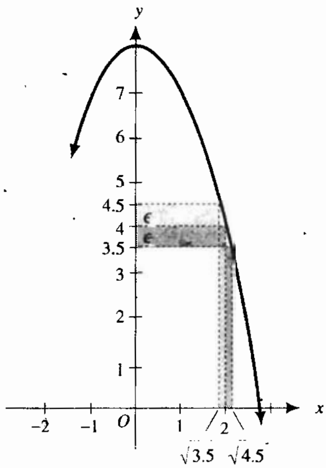
14. $f(x) = \dfrac{3x^2 - 8x - 3}{x - 3}$; $a = 3$; $L = 10$; $\epsilon = 0.05$

Para los ejercicios 15 y 16, siga las mismas instrucciones que para los ejercicios 1 y 2.

15. $f(x) = x^2 + 1$; $a = -2$; $L = 5$; $\epsilon = 1$



16. $f(x) = 8 - x^2$; $a = 2$; $L = 4$; $\epsilon = 0.5$



En los ejercicios 17 a 24, se proporcionan $f(x)$, a, L y ϵ (a). Utilice una figura semejante a la de los ejercicios 15 y 16 y del ejemplo 3, y argumentos similares al de este ejemplo para determinar una $\delta > 0$, tal que

$$\text{si} \quad 0 < |x - a| < \delta \quad \text{entonces} \quad |f(x) - L| < \epsilon$$

17. $f(x) = x^2$; $a = 3$; $L = 9$; $\epsilon = 0.5$

18. $f(x) = x^2$; $a = 0.5$; $L = 0.25$; $\epsilon = 0.1$

19. $f(x) = x^2$; $a = -1$; $L = 1$; $\epsilon = 0.2$

20. $f(x) = x^2 - 5$; $a = 1$; $L = -4$; $\epsilon = 0.15$

21. $f(x) = x^2 - 2x + 1$; $a = 2$; $L = 1$; $\epsilon = 0.4$

22. $f(x) = x^2 + 4x + 4$; $a = -1$; $L = 1$; $\epsilon = 0.08$

23. $f(x) = 2x^2 + 5x + 3; a = -3; L = 6; \epsilon = 0.6$

24. $f(x) = 3x^2 - 7x + 2; a = 1; L = -2; \epsilon = 0.3$

En los ejercicios 25 a 36, confirme analíticamente (empleando propiedades de las desigualdades) la elección de δ del ejercicio indicado.

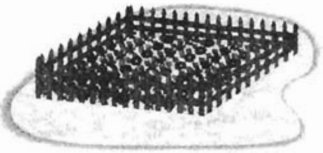
25. Ejercicio 3
26. Ejercicio 4
27. Ejercicio 7
28. Ejercicio 8
29. Ejercicio 13
30. Ejercicio 14
31. Ejercicio 17
32. Ejercicio 18
33. Ejercicio 21
34. Ejercicio 22
35. Ejercicio 23
36. Ejercicio 24

En los ejercicios 37 a 44, primero obtenga una función como modelo matemático de la situación. Defina la variable dependiente y el valor de función como números, e indique las unidades de medición. No olvide completar el ejercicio con una conclusión.

37. A una persona que gana \$15 por hora se le paga sólo por el tiempo real de trabajo. ¿Qué tan cerca de 8 horas debe trabajar una persona para que su salario difiera de \$120 en no más de 25 centavos?

38. Para la situación del ejemplo 1 de la sección 1.3, ¿cuál debe ser la temperatura del gas si éste ocupa un volumen entre 79.95 m^3 y 80.05 m^3?

39. Se construye una cerca alrededor de un jardín de forma cuadrada. ¿Qué tan próxima a 10 pie debe estar la longitud de cada lado del jardín para que la longitud total de la cerca esté entre 39.96 y 40.04 pie?



40. Se construye una señal circular de modo que la longitud de su circunferencia difiera de 6π pie en no más de 0.1 pie. ¿Qué tan cerca de 3 pie debe medir el radio de la señal?

41. Para el jardín del ejercicio 39, ¿qué tan cercana a 10 pie debe estar la longitud de cada lado del jardín para que el área de dicho jardín difiera de 100 pie^2 en no más de 0.5 pie^2?

42. Para la señal del ejercicio 40, ¿qué tan cercano a 3 pie debe medir el radio de la señal para que el área de dicha señal difiera de 9π pie^2 en no más de 0.2 pie^2?

43. El número de pies que cae un cuerpo a partir del reposo en t segundos varía directamente como el cuadrado de t, y un cuerpo cae a partir del reposo 64 pie en 2 s. ¿Qué tiempo cercano a 5 s le tomará a un cuerpo caer entre 398 y 402 pie?

44. El número de libras por pie cuadrado de la fuerza del viento sobre una superficie plana cuando la velocidad del viento es v millas por hora, varía directamente como el cuadrado de v. Suponga que la fuerza es de 2 lb/pie^2 cuando la velocidad del viento es de 20 mi/h. ¿Qué tan cerca de 30 mi/h será la velocidad del viento cuando su fuerza sobre una superficie plana está entre 4.45 lb/pie^2 y 4.55 lb/pie^2?

1.5 DEFINICIÓN DE LÍMITE DE UNA FUNCIÓN Y TEOREMAS DE LÍMITES

Ahora se presentará la definición formal de límite de una función. La definición contiene la proposición que implica las desigualdades con la notación ϵ-δ mostrada con frecuencia en la sección 1.4.

1.5.1 Definición de límite de una función

Sea f una función definida en cada número de algún intervalo abierto que contiene a a, excepto posiblemente en el número a mismo. El **límite de $f(x)$ conforme x se aproxima a a es L,** lo que se escribe como

$$\lim_{x \to a} f(x) = L$$

si la siguiente proposición es verdadera:

dada cualquier $\epsilon > 0$, no importa cuan pequeña sea, existe una $\delta > 0$ tal que

$$\text{si} \quad 0 < |x - a| < \delta \quad \text{entonces} \quad |f(x) - L| < \epsilon \qquad (1)$$

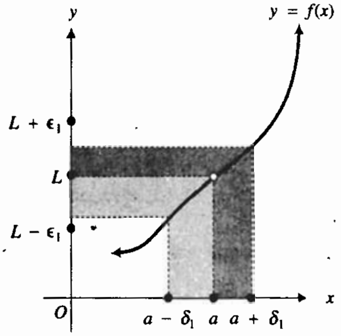


FIGURA 1

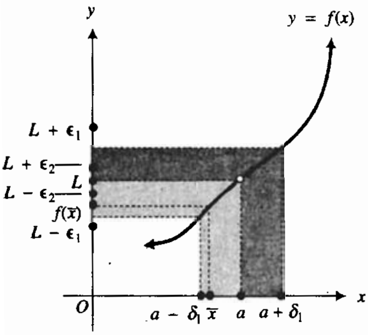


FIGURA 2

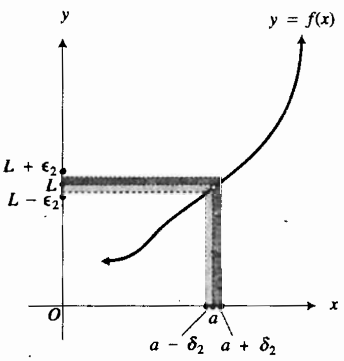


FIGURA 3

En palabras, esta definición establece que los valores de función $f(x)$ se aproximan al límite L conforme x lo hace al número a si el valor absoluto de la diferencia entre $f(x)$ y L puede hacerse tan pequeña como se desee tomando x suficientemente cerca de a pero no igual a a.

Observe que en la definición no se menciona nada acerca del valor de la función cuando $x = a$. Recuerde, como se señaló en la sección 1.4, la función f no necesita estar definida en a, para que el $\lim\limits_{x \to a} f(x)$ exista. Más aún, si f está definida en a, $\lim\limits_{x \to a} f(x)$ puede existir sin que tenga el mismo valor que $f(a)$ como en el caso de la función del ejemplo ilustrativo 2 de la sección 1.4.

Una interpretación geométrica de la definición de límite de una función f se muestra en la figura 1, la cual presenta una porción de la gráfica de f cerca del punto donde $x = a$. Como f no está necesariamente definida en a, no existe un punto en la gráfica de f con abscisa a. Observe que si x, en el eje horizontal, está entre $a - \delta_1$ y $a + \delta_1$, entonces $f(x)$, en el eje vertical, estará entre $L - \epsilon_1$ y $L + \epsilon_1$. En otras palabras, al restringir x, en el eje horizontal, de modo que esté entre $a - \delta_1$ y $a + \delta_1$, se restringe a $f(x)$, en el eje vertical, de manera que esté entre $L - \epsilon_1$ y $L + \epsilon_1$. Así,

$$\text{si} \quad 0 < |x - a| < \delta_1 \quad \text{entonces} \quad |f(x) - L| < \epsilon_1$$

La figura 2 muestra cómo un valor pequeño de ϵ puede requerir una elección diferente para δ. En la figura se aprecia que $\epsilon_2 < \epsilon_1$, y que el valor δ_1 es demasiado grande; esto es, existen valores de x para los cuales $0 < |x - a| < \delta_1$, pero $|f(x) - L|$ no es menor que ϵ_2. Por ejemplo, $0 < |\bar{x} - a| < \delta_1$, pero $|f(\bar{x}) - L| > \epsilon_2$. Por esta razón debe elegirse un valor δ_2 más pequeño, como se muestra en la figura 3, tal que

$$\text{si } 0 < |x - a| < \delta_2 \quad \text{entonces} \quad |f(x) - L| < \epsilon_2$$

Sin embargo, para cualquier elección de $\epsilon > 0$, no importa que tan pequeño sea, existe $\delta > 0$ tal que la proposición (1) se cumple. Por tanto, $\lim\limits_{x \to a} f(x) = L$.

En el primer ejemplo de esta sección, se vuelve a tratar la función mostrada en los ejemplos 1 y 2 de la sección 1.4.

▶ ***EJEMPLO 1*** Utilice la definición de límite para demostrar que

$$\lim_{x \to 2} (4x - 5) = 3$$

Solución El primer requisito de la definición 1.5.1 es que $4x - 5$ esté definida en cada número de un intervalo abierto que contenga a 2, excepto posiblemente en 2. Puesto que $4x - 5$ está definida para todos los números reales, cualquier intervalo abierto que contenga a 2 satisface este requisito. Ahora se debe demostrar que para cualquier $\epsilon > 0$ existe una $\delta > 0$ tal que

$$
\begin{aligned}
& \text{si} \quad 0 < |x - 2| < \delta \quad \text{entonces} \quad |(4x - 5) - 3| < \epsilon & \textbf{(2)}\\
\Leftrightarrow \quad & \text{si} \quad 0 < |x - 2| < \delta \quad \text{entonces} \quad 4|x - 2| < \epsilon \\
\Leftrightarrow \quad & \text{si} \quad 0 < |x - 2| < \delta \quad \text{entonces} \quad |x - 2| < \tfrac{1}{4}\epsilon
\end{aligned}
$$

Esta proposición denota que $\frac{1}{4}\epsilon$ es una δ satisfactoria. Con esta elección de δ se tiene el argumento siguiente:

$$
\begin{aligned}
& 0 < |x - 2| < \delta \\
\Rightarrow \quad & 4|x - 2| < 4\delta \\
\Rightarrow \quad & |4x - 8| < 4\delta
\end{aligned}
$$

$$\Rightarrow \quad |(4x - 5) - 3| < 4\delta$$
$$\Rightarrow \quad |(4x - 5) - 3| < \epsilon \quad (\text{porque } \delta = \tfrac{1}{4}\epsilon)$$

Por tanto, se ha establecido que si $\delta = \frac{1}{4}\epsilon$, entonces se cumple la proposición (2). Esto demuestra que $\lim\limits_{x \to 2} (4x - 5) = 3$.

En particular, si $\epsilon = 0.1$, entonces se toma $\delta = \frac{1}{4}(0.1)$, es decir, $\delta = 0.025$. Este valor de δ corresponde al valor determinado en los ejemplos 1 y 2 de la sección 1.4.

Cualquier número positivo menor que $\frac{1}{4}\epsilon$ puede emplearse también como la δ requerida. ◀

En el suplemento de esta sección, al final del ápendice se proporciona un ejemplo que muestra cómo aplicar la definición 1.5.1 para demostrar que $\lim\limits_{x \to 2} x^2 = 4$.

A fin de calcular límites de manera más fácil que cuando se utiliza la definición se emplean teoremas, cuyas demostraciones están basadas en la definición. Estos teoremas, así como otros que aparecen en secciones posteriores de este capítulo, están señalados con la etiqueta *teorema de límites*.

1.5.2 Teorema 1 de límites — Límite de una función lineal

Si m y b son dos constantes cualesquiera, entonces

$$\lim_{x \to a} (mx + b) = ma + b$$

Demostración A partir de la definición de límite de una función, se debe demostrar que para cualquier $\epsilon > 0$ existe una $\delta > 0$, tal que

$$\text{si} \quad 0 < |x - a| < \delta \text{ entonces } |(mx + b) - (ma + b)| < \epsilon \qquad (3)$$

Caso 1: $m \neq 0$.

Como $|(mx + b) - (ma + b)| = |m| \cdot |x - a|$, se desea encontrar una $\delta > 0$ para cualquier $\epsilon > 0$, tal que

$$\text{si} \quad 0 < |x - a| < \delta \quad \text{entonces} \quad |m| \cdot |x - a| < \epsilon$$

o como $m \neq 0$,

$$\text{si} \quad 0 < |x - a| < \delta \quad \text{entonces} \quad |x - a| < \frac{\epsilon}{|m|}$$

Esta proposición se cumplirá si $\delta = \epsilon / |m|$; por lo que se puede concluir que

$$\text{si} \quad 0 < |x - a| < \delta \text{ y } \delta = \frac{\epsilon}{|m|} \quad \text{entonces} \quad |(mx + b) - (ma + b)| < \epsilon$$

Esto demuestra el teorema para el caso 1.

Caso 2: $m = 0$.

Si $m = 0$, entonces $|(mx + b) - (ma + b)| = 0$ para todos los valores de x. De modo que se toma δ como cualquier número positivo, cumpliéndose así la proposición (3). Esto demuestra el teorema para el caso 2. ■

▷ **EJEMPLO ILUSTRATIVO 1** Del teorema 1 de límites,

$$\lim_{x \to 2} (3x + 5) = 3 \cdot 2 + 5$$
$$= 11$$

◀

1.5.3 Teorema 2 de límites Límite de una función constante

Si c es una constante, entonces para cualquier número a

$$\lim_{x \to a} c = c$$

Este teorema se deduce inmediatamente del teorema 1 de límites tomando $m = 0$ y $b = c$.

1.5.4 Teorema 3 de límites Límite de la función identidad

$$\lim_{x \to a} x = a$$

Este teorema también se deduce inmediatamente del teorema 1 de límites tomando $m = 1$ y $b = 0$.

▷ EJEMPLO ILUSTRATIVO 2 Del teorema 2 de límites,

$$\lim_{x \to 5} 7 = 7$$

y del teorema 3 de límites,

$$\lim_{x \to -6} x = -6$$ ◀

1.5.5 Teorema 4 de límites Límite de la suma y de la diferencia de dos funciones

Si $\lim_{x \to a} f(x) = L$ y $\lim_{x \to a} g(x) = M$, entonces

$$\lim_{x \to a} [f(x) \pm g(x)] = L \pm M$$

pag 1225

La demostración del teorema 4 de límites se presenta en el suplemento de esta sección. En el enunciado del teorema, el hecho de que $\lim_{x \to a} f(x) = L$ y $\lim_{x \to a} g(x) = M$ indica que los límites existen. En otras palabras, no se puede decir simplemente que *el límite de la suma de dos funciones es la suma de sus límites*, se debe agregar la condición de la existencia de los límites: *si los límites existen*. Consulte el ejercicio 44 de la sección 1.6 y el ejercicio 50 de la sección 1.7.

El teorema siguiente de límites es una extensión del teorema 4 de límites para cualquier número finito de funciones. Se le pedirá que proporcione la demostración mediante inducción matemática en el ejercicio suplementario 10.

1.5.6 Teorema 5 de límites Límite de la suma y de la diferencia de n funciones

Si $\lim_{x \to a} f_1(x) = L_1$, $\lim_{x \to a} f_2(x) = L_2$, ..., y $\lim_{x \to a} f_n(x) = L_n$, entonces

$$\lim_{x \to a} [f_1(x) \pm f_2(x) \pm \ldots \pm f_n(x)] = L_1 \pm L_2 \pm \ldots \pm L_n$$

El límite del producto de dos funciones se tiene mediante el teorema siguiente de límites. Otra vez, observe que el teorema establece que el límite

Feb 12 25

del producto de dos funciones es el producto de sus límites si los límites existen. Para la demostración, refiérase al suplemento de esta sección.

1.5.7 Teorema 6 de límites Límite del producto de dos funciones

Si $\lim_{x\to a} f(x) = L$ y $\lim_{x\to a} g(x) = M$, entonces

$$\lim_{x\to a} [f(x) \cdot g(x)] = L \cdot M$$

EJEMPLO ILUSTRATIVO 3 Del teorema 3 de límites, $\lim_{x\to 4} x = 4$, y del teorema 1 de límites, $\lim_{x\to 4} (2x + 1) = 9$. Así, por el teorema 6 de límites

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 4} [x(2x + 1)] &= \lim_{x\to 4} x \cdot \lim_{x\to 4} (2x + 1)\\ &= 4 \cdot 9\\ &= 36\end{aligned}$$

◀

El teorema 6 de límites también puede extenderse a un número finito de funciones mediante la aplicación de la inducción matemática, como se le pedirá que lo haga en el ejercicio suplementario 13.

1.5.8 Teorema 7 de límites Límite del producto de n funciones

Si $\lim_{x\to a} f_1(x) = L_1$, $\lim_{x\to a} f_2(x) = L_2, \ldots,$ y $\lim_{x\to a} f_n(x) = L_n$, entonces

$$\lim_{x\to a} [f_1(x) f_2(x) \ldots f_n(x)] = L_1 L_2 \ldots L_n$$

1.5.9 Teorema 8 de límites Límite de la n-ésima potencia de una función

Si $\lim_{x\to a} f(x) = L$ y n es cualquier número entero positivo, entonces

$$\lim_{x\to a} [f(x)]^n = L^n$$

La demostración es inmediata a partir del teorema 7 de límites, tomando $f_1(x), f_2(x), \ldots, f_n(x)$ todas iguales a $f(x)$ y $L_1, L_2, \ldots, L_n$ todos iguales a L.

EJEMPLO ILUSTRATIVO 4 Del teorema 1 de límites, $\lim_{x\to -2} (5x + 7) = -3$. Por tanto, del teorema 8

$$\begin{aligned}\lim_{x\to -2} (5x + 7)^4 &= \left[\lim_{x\to -2} (5x + 7)\right]^4\\ &= (-3)^4\\ &= 81\end{aligned}$$

◀

El siguiente teorema de límites trata acerca del límite del cociente de dos funciones, y no sólo se requiere la existencia de los límites, sino que también se pide que el límite de la función del denominador sea diferente de cero.

1.5.10 Teorema 9 de límites Límite del cociente de dos funciones

Si $\lim_{x \to a} f(x) = L$ y $\lim_{x \to a} g(x) = M$, entonces

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{L}{M} \quad \text{si } M \neq 0$$

La demostración de este teorema se presenta en la sección 1.9.

EJEMPLO ILUSTRATIVO 5 Del teorema 3 de límites, $\lim_{x \to 4} x = 4$, y del teorema 1 de límites, $\lim_{x \to 4} (-7x + 1) = -27$. Por tanto, del teorema 9 de límites,

$$\begin{aligned}\lim_{x \to 4} \frac{x}{-7x + 1} &= \frac{\lim\limits_{x \to 4} x}{\lim\limits_{x \to 4}(-7x + 1)} \\ &= \frac{4}{-27} \\ &= -\frac{4}{27}\end{aligned}$$

◀

1.5.11 Teorema 10 de límites Límite de la raíz *n*-ésima de una función

Si n es un número entero positivo y $\lim_{x \to a} f(x) = L$, entonces

$$\lim_{x \to a} \sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{L}$$

con la restricción de que si n es par, $L > 0$.

La demostración de este teorema también se proporciona en la sección 1.9.

EJEMPLO ILUSTRATIVO 6 Del ejemplo ilustrativo 5 y del teorema 10 de límites,

$$\begin{aligned}\lim_{x \to 4} \sqrt[3]{\frac{x}{-7x + 1}} &= \sqrt[3]{\lim_{x \to 4} \frac{x}{-7x + 1}} \\ &= \sqrt[3]{-\frac{4}{27}} \\ &= -\frac{\sqrt[3]{4}}{3}\end{aligned}$$

◀

Ahora se establecerán dos teoremas, los cuales son casos especiales de los teoremas 9 y 10 de límites, respectivamente. Cada uno de estos teoremas se utiliza en la sección 1.9 para la demostración de los teoremas de límites correspondientes.

1.5.12 Teorema

Si a es cualquier número real diferente de cero, entonces

$$\lim_{x \to a} \frac{1}{x} = \frac{1}{a}$$

Pag 126

1.5.13 Teorema

Si $a > 0$ y n es un número entero positivo, o si $a \leq 0$ y n es un número entero impar, entonces

$$\lim_{x \to a} \sqrt[n]{x} = \sqrt[n]{a}$$

Las demostraciones de los teoremas 1.5.12 y 1.5.13 se presentan en el suplemento de esta sección.

En los ejemplos siguientes se aplicarán los teoremas anteriores para calcular límites. A fin de indicar qué teorema se ha aplicado se escribirá la abreviación "T.n L.", donde n representa el número del teorema; por ejemplo, "T.2 L." se refiere al teorema 2 de límites.

EJEMPLO 2 Calcule $\lim\limits_{x \to 3}(x^2 + 7x - 5)$, y cuando sea apropiado, indique los teoremas de límites que se aplicaron.

Solución

$$\begin{aligned}
\lim_{x \to 3}(x^2 + 7x - 5) &= \lim_{x \to 3} x^2 + \lim_{x \to 3} 7x - \lim_{x \to 3} 5 && \textbf{(T. 5 L.)}\\
&= \lim_{x \to 3} x \cdot \lim_{x \to 3} x + \lim_{x \to 3} 7 \cdot \lim_{x \to 3} x - \lim_{x \to 3} 5 && \textbf{(T. 6 L.)}\\
&= 3 \cdot 3 + 7 \cdot 3 - 5 && \textbf{(T. 3 L. y T.2 L.)}\\
&= 9 + 21 - 5\\
&= 25
\end{aligned}$$

Es importante que se de cuenta de que el límite del ejemplo 2 se evaluó mediante la aplicación directa de los teoremas de límites. Observe que para la función f del ejemplo no sólo el $\lim\limits_{x \to 3} f(x)$ es igual a 25, sino que también $f(3)$ es igual a 25. Pero recuerde, $\lim\limits_{x \to 3} f(x)$ y $f(a)$ no siempre son iguales.

EJEMPLO 3 Determine el siguiente límite y, cuando sea apropiado, indique los teoremas de límites que se aplicaron:

$$\lim_{x \to 2} \sqrt{\frac{x^3 + 2x + 3}{x^2 + 5}}$$

Solución

$$\begin{aligned}
\lim_{x \to 2} \sqrt{\frac{x^3 + 2x + 3}{x^2 + 5}} &= \sqrt{\lim_{x \to 2} \frac{x^3 + 2x + 3}{x^2 + 5}} && \textbf{(T. 10 L.)}\\
&= \sqrt{\frac{\lim\limits_{x \to 2}(x^3 + 2x + 3)}{\lim\limits_{x \to 2}(x^2 + 5)}} && \textbf{(T. 9 L.)}\\
&= \sqrt{\frac{\lim\limits_{x \to 2} x^3 + \lim\limits_{x \to 2} 2x + \lim\limits_{x \to 2} 3}{\lim\limits_{x \to 2} x^2 + \lim\limits_{x \to 2} 5}} && \textbf{(T. 5 L.)}\\
&= \sqrt{\frac{(\lim\limits_{x \to 2} x)^3 + \lim\limits_{x \to 2} 2 \cdot \lim\limits_{x \to 2} x + \lim\limits_{x \to 2} 3}{(\lim\limits_{x \to 2} x)^2 + \lim\limits_{x \to 2} 5}} && \textbf{(T. 6 L. y T. 8 L.)}\\
&= \sqrt{\frac{2^3 + 2 \cdot 2 + 3}{2^2 + 5}} && \textbf{(T. 3 L. y T. 2 L.)}
\end{aligned}$$

$$= \sqrt{\frac{8+4+3}{9}}$$

$$= \frac{\sqrt{15}}{3}$$ ◀

▶ EJEMPLO 4 Sea

$$f(x) = \frac{x^2 - 25}{x - 5}$$

(a) Utilice una calculadora para determinar y tabular los valores de $f(x)$ cuando x toma los valores 4, 4.5, 4.9, 4.99, 4.999 y cuando x es igual a 6, 5.5, 5.1, 5.01, 5.001. ¿A qué valor parece que se aproxima $f(x)$ conforme x tiende a 5?

(b) Confirme la respuesta del inciso (a) analíticamente mediante el cálculo del $\lim\limits_{x \to 5} f(x)$.

Solución

(a) Las tablas 1 y 2 muestran los valores de $f(x)$ para los valores indicados de x. Observando estas tablas, parece que $f(x)$ se aproxima a 10 conforme x tiende a 5.

Tabla 1

x	$f(x) = \frac{x^2 - 25}{x - 5}$
4	9
4.5	9.5
4.9	9.9
4.99	9.99
4.999	9.999

Tabla 2

x	$f(x) = \frac{x^2 - 25}{x - 5}$
6	11
5.5	10.5
5.1	10.1
5.01	10.01
5.001	10.001

(b) En este caso, se tiene una situación diferente a las de los ejemplos anteriores. No puede aplicarse el teorema 9 de límites al cociente $\frac{x^2 - 25}{x - 5}$ debido a que $\lim\limits_{x \to 5} (x - 5) = 0$. Sin embargo, al factorizar el numerador se obtiene

$$\frac{x^2 - 25}{x - 5} = \frac{(x - 5)(x + 5)}{x - 5}$$

Si $x \neq 5$, entonces el numerador y el denominador pueden dividirse entre $x - 5$ para obtener $x + 5$. Recuerde que cuando se calcula el límite de una función conforme x se aproxima a 5, se consideran los valores de x cercanos a 5, pero sin tomar este valor. Por tanto, es posible dividir el numerador y el denominador entre $x - 5$. La solución se expresa en la siguiente forma.

$$\begin{aligned} \lim_{x \to 5} \frac{x^2 - 25}{x - 5} &= \lim_{x \to 5} \frac{(x - 5)(x + 5)}{x - 5} \\ &= \lim_{x \to 5} (x + 5) \\ &= 10 \qquad \textbf{(T. 1 L.)} \end{aligned}$$ ◀

▶ EJEMPLO 5 Considere

$$g(x) = \frac{\sqrt{x} - 2}{x - 4}$$

(a) Utilice una calculadora para determinar y tabular los valores de $g(x)$ cuando x toma los valores 3, 3.5, 3.9, 3.99, 3.999 y cuando x es igual a 5, 4.5, 4.1, 4.01, 4.001. ¿A qué valor parece que se aproxima $g(x)$ conforme x tiende a 4?

(b) Apoye la respuesta del inciso (a) trazando la gráfica de g en un rectángulo de inspección conveniente.

(c) Confirme la respuesta del inciso (a) analíticamente mediante el cálculo del $\lim\limits_{x \to 4} g(x)$ y, cuando sea apropiado, indique los teoremas que se aplicaron.

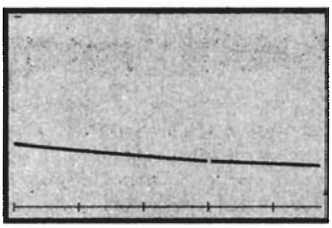
Solución

Tabla 3

x	$g(x) = \dfrac{\sqrt{x} - 2}{x - 4}$
3	0.2679
3.5	0.2583
3.9	0.2516
3.99	0.2502
3.999	0.2500

Tabla 4

x	$g(x) = \dfrac{\sqrt{x} - 2}{x - 4}$
5	0.2361
4.5	0.2426
4.1	0.2485
4.01	0.2498
4.001	0.2500



[1, 5.7] por [0, 1]

$g(x) = \dfrac{\sqrt{x} - 2}{x - 4}$

FIGURA 4

(a) Las tablas 3 y 4 muestran los valores de $g(x)$ para los valores especificados de x. Observando estas tablas, parece que $g(x)$ se aproxima a 0.2500 conforme x tiende a 4.

(b) La figura 4 muestra la gráfica de g trazada en el rectángulo de inspección de [1, 5.7] por [0, 1]. La gráfica tiene un agujero en el punto (4, 0.25). Utilizando el rastreo (*trace*) de la graficadora, se observa que $g(x)$ se aproxima a 0.25 conforme x tiende a 4, lo cual apoya la respuesta del inciso (a).

(c) Como en el ejemplo 4, no se puede aplicar el teorema 9 de límites al cociente $\dfrac{\sqrt{x} - 2}{x - 4}$ debido a que $\lim\limits_{x \to 4} (x - 4) = 0$. Para simplificar el cociente se racionaliza el numerador multiplicando tanto el numerador como el denominador por $\sqrt{x} + 2$.

$$\begin{aligned} \frac{\sqrt{x} - 2}{x - 4} &= \frac{(\sqrt{x} - 2)(\sqrt{x} + 2)}{(x - 4)(\sqrt{x} + 2)} \\ &= \frac{x - 4}{(x - 4)(\sqrt{x} + 2)} \end{aligned}$$

Puesto que se está evaluando el límite conforme x tiende a 4, se consideran sólo los valores de x cercanos a 4 sin tomar este valor. En consecuencia, se pueden dividir el numerador y el denominador entre $x - 4$. Por tanto

$$\frac{\sqrt{x} - 2}{x - 4} = \frac{1}{\sqrt{x} + 2} \qquad \text{si } x \neq 4$$

La solución se expresa como sigue:

$$\begin{aligned} \lim_{x \to 4} \frac{\sqrt{x} - 2}{x - 4} &= \lim_{x \to 4} \frac{(\sqrt{x} - 2)(\sqrt{x} + 2)}{(x - 4)(\sqrt{x} + 2)} \\ &= \lim_{x \to 4} \frac{x - 4}{(x - 4)(\sqrt{x} + 2)} \\ &= \lim_{x \to 4} \frac{1}{\sqrt{x} + 2)} \\ &= \frac{\lim\limits_{x \to 4} 1}{\lim\limits_{x \to 4}(\sqrt{x} + 2)} && \textbf{(T. 9 L.)} \\ &= \frac{1}{\lim\limits_{x \to 4} \sqrt{x} + \lim\limits_{x \to 4} 2} && \textbf{(T. 2 L.) y (T. 4 L.)} \\ &= \frac{1}{\sqrt{\lim\limits_{x \to 4} x} + 2} && \textbf{(T. 10 L.) y (T. 2 L.)} \\ &= \frac{1}{\sqrt{4} + 2} && \textbf{(T. 3 L.)} \\ &= \frac{1}{4} \end{aligned}$$

◀

De vez en cuando se necesitarán otros dos enunciados de límites que son equivalentes a

$$\lim_{x \to a} f(x) = L$$

Estos enunciados se presentan en los dos teoremas siguientes, cuyas demostraciones se le pedirán en los ejercicios 63 y 64.

Apostol, 158

1.5.14 Teorema

$\lim\limits_{x \to a} f(x) = L$ si y sólo si $\lim\limits_{x \to a} [f(x) - L] = 0$

1.5.15 Teorema

$\lim\limits_{x \to a} f(x) = L$ si y sólo si $\lim\limits_{t \to 0} f(t + a) = L$

El teorema siguiente establece que una función no puede aproximarse a dos límites diferentes simultáneamente. Este teorema recibe el nombre de *teorema de unicidad,* debido a que garantiza que si el límite de una función existe, entonces es único.

1.5.16 Teorema

Si $\lim\limits_{x \to a} f(x) = L_1$ y $\lim\limits_{x \to a} f(x) = L_2$, entonces $L_1 = L_2$.

Debido a este teorema se puede establecer que si una función f tiene un límite L en el número a, entonces L es *el* límite de f en a. La demostración del teorema se proporciona en el suplemento de esta sección.

EJERCICIOS 1.5

En los ejercicios 1 a 10, demuestre, aplicando la definición 1.5.1, que el límite es el número indicado.

1. $\lim\limits_{x \to 2} 7 = 7$ **2.** $\lim\limits_{x \to 5} (-4) = -4$

3. $\lim\limits_{x \to 4} (2x + 1) = 9$ **4.** $\lim\limits_{x \to 1} (4x + 3) = 7$

5. $\lim\limits_{x \to 3} (7 - 3x) = -2$ **6.** $\lim\limits_{x \to -4} (2x + 7) = -1$

7. $\lim\limits_{x \to -2} (1 + 3x) = -5$ **8.** $\lim\limits_{x \to -2} (7 - 2x) = 11$

9. $\lim\limits_{x \to -1} \dfrac{x^2 - 1}{x + 1} = -2$ **10.** $\lim\limits_{x \to 3} \dfrac{x^2 - 9}{x - 3} = 6$

En los ejercicios 11 a 24, determine el límite y, cuando sea apropiado, indique los teoremas de límites que se aplicaron.

11. $\lim\limits_{x \to 5} (3x - 7)$ **12.** $\lim\limits_{x \to -4} (5x + 2)$

13. $\lim\limits_{x \to 2} (x^2 + 2x - 1)$ **14.** $\lim\limits_{x \to 3} (2x^2 - 4x + 5)$

15. $\lim\limits_{z \to -2} (z^3 + 8)$

16. $\lim\limits_{y \to -1} (y^3 - 2y^2 + 3y - 4)$

17. $\lim\limits_{x \to 3} \dfrac{4x - 5}{5x - 1}$ **18.** $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{3x + 4}{8x - 1}$

19. $\lim\limits_{t \to 2} \dfrac{t^2 - 5}{2t^3 + 6}$ **20.** $\lim\limits_{x \to -1} \dfrac{2x + 1}{x^2 - 3x + 4}$

21. $\lim\limits_{r \to 1} \sqrt{\dfrac{8r + 1}{r + 3}}$ **22.** $\lim\limits_{x \to 2} \sqrt{\dfrac{x^2 + 3x + 4}{x^3 + 1}}$

23. $\lim\limits_{x \to 4} \sqrt[3]{\dfrac{x^2 - 3x + 4}{2x^2 - x - 1}}$ **24.** $\lim\limits_{x \to -3} \sqrt[3]{\dfrac{5 + 2x}{5 - x}}$

En los ejercicios 25 a 30, haga lo siguiente: (a) utilice una calculadora para determinar con cuatro cifras decimales y tabular los valores de $f(x)$ para los valores especificados de x. ¿A qué valor parece que se aproxima $f(x)$ conforme x tiende a c? (b) Apoye la respuesta del inciso (a) trazando la gráfica de f en un rectángulo de inspección adecuado. (c) Confirme analíticamente la respuesta del inciso (a) calculando el $\lim\limits_{x \to c} f(x)$ y, cuando sea apropiado, indique los teoremas de límites que se aplicaron.

25. $f(x) = \dfrac{x - 2}{x^2 - 4}$; x es 1, 1.5, 1.9, 1.99, 1.999 y x es 3, 2.5, 2.1, 2.01, 2.001; $c = 2$

26. $f(x) = \dfrac{2x^2 + 3x - 2}{x^2 - 6x - 16}$; x es -3, -2.5, -2.1, -2.01, -2.001 y x es -1, -1.5, -1.9, -1.99, -1.999; $c = -2$

27. $f(x) = \dfrac{x^2 + 5x + 6}{x^2 - x - 12}$; x es -4, -3.5, -3.1, -3.01, -3.001, -3.0001 y x es -2, -2.5, -2.9, -2.99, -2.999, -2.9999; $c = -3$

28. $f(x) = \dfrac{2x - 3}{4x^2 - 9}$; x es 1, 1.4, 1.49, 1.499, 1.4999 y x es 2, 1.6, 1.51, 1.501, 1.5001; $c = \frac{3}{2}$

29. $f(x) = \dfrac{3 - \sqrt{x}}{9 - x}$; x es 8, 8.5, 8.9, 8.99, 8.999 y x es 10, 9.5, 9.1, 9.01, 9.001; $c = 9$

30. $f(x) = \dfrac{2 - \sqrt{4 - x}}{x}$; x es $-1, -0.5, -0.1, -0.01, -0.001$ y x es $1, 0.5, 0.1, 0.01, 0.001$; $c = 0$

En los ejercicios 31 a 46, determine el límite y, cuando sea apropiado, indique los teoremas de límites que se aplicaron.

31. $\lim\limits_{x \to 7} \dfrac{x^2 - 49}{x - 7}$

32. $\lim\limits_{z \to -5} \dfrac{z^2 - 25}{z + 5}$

33. $\lim\limits_{x \to 3/2} \dfrac{4x^2 - 9}{2x + 3}$

34. $\lim\limits_{x \to 1/3} \dfrac{3x - 1}{9x^2 - 1}$

35. $\lim\limits_{s \to 4} \dfrac{3s^2 - 8s - 16}{2s^2 - 9s + 4}$

36. $\lim\limits_{x \to 4} \dfrac{3x^2 - 17x + 20}{4x^2 - 25x + 36}$

37. $\lim\limits_{y \to -2} \dfrac{y^3 + 8}{y + 2}$

38. $\lim\limits_{s \to 1} \dfrac{s^3 - 1}{s - 1}$

39. $\lim\limits_{y \to -3} \sqrt{\dfrac{y^2 - 9}{2y^2 + 7y + 3}}$

40. $\lim\limits_{t \to 3/2} \sqrt{\dfrac{8t^3 - 27}{4t^2 - 9}}$

41. $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{\sqrt{x} - 1}{x - 1}$

42. $\lim\limits_{x \to -1} \dfrac{\sqrt{x + 5} - 2}{x + 1}$

43. $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{\sqrt{h + 2} - \sqrt{2}}{h}$

44. $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{\sqrt[3]{x} - 1}{x - 1}$

45. $\lim\limits_{x \to -1} \dfrac{2x^2 - x - 3}{x^3 + 2x^2 + 6x + 5}$

46. $\lim\limits_{x \to -2} \dfrac{x^3 - x^2 - x + 10}{x^2 + 3x + 2}$

47. Si $f(x) = x^2 + 5x - 3$, demuestre analíticamente que $\lim\limits_{x \to 2} f(x) = f(2)$. Apoye su respuesta gráficamente.

48. Si $F(x) = 2x^3 + 7x - 1$, demuestre analíticamente que $\lim\limits_{x \to -1} F(x) = F(-1)$. Apoye su respuesta gráficamente.

49. Si $g(x) = \dfrac{x^2 - 1}{x - 1}$, ¿por qué no existe $g(1)$? Demuestre analíticamente que $\lim\limits_{x \to 1} g(x)$ existe y calcúlelo. Apoye su respuesta gráficamente.

50. Si $G(x) = \dfrac{x - 1}{x^2 - 1}$, ¿por qué no existe $G(1)$? Demuestre analíticamente que $\lim\limits_{x \to 1} G(x)$ existe y calcúlelo. Apoye su respuesta gráficamente.

51. Si $h(x) = \dfrac{\sqrt{x + 9} - 3}{x}$, ¿por qué no existe $h(0)$? Demuestre analíticamente que $\lim\limits_{x \to 0} h(x)$ existe y calcúlelo. Apoye su respuesta gráficamente.

52. Si $H(x) = \dfrac{x}{\sqrt{x + 1} - 1}$, ¿por qué no existe $H(0)$? Demuestre analíticamente que $\lim\limits_{x \to 0} H(x)$ existe y calcúlelo. Apoye su respuesta gráficamente.

53. Si

$$f(x) = \begin{cases} 2x - 1 & \text{si } x \neq 2 \\ 1 & \text{si } x = 2 \end{cases}$$

encuentre el $\lim\limits_{x \to 2} f(x)$ y demuestre que $\lim\limits_{x \to 2} f(x) \neq f(2)$. Dibuje la gráfica de f.

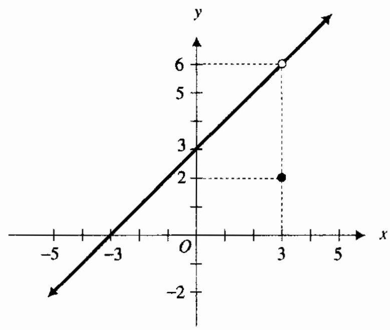
54. Si

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 9 & \text{si } x \neq -3 \\ 4 & \text{si } x = -3 \end{cases}$$

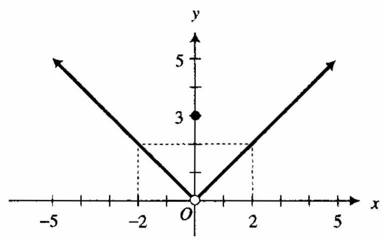
encuentre el $\lim\limits_{x \to -3} f(x)$ y demuestre que $\lim\limits_{x \to -3} f(x) \neq f(-3)$. Dibuje la gráfica de f.

En los ejercicios 55 a 58, responda los incisos (a)-(c) a partir de la gráfica de f dibujada en la figura adjunta.

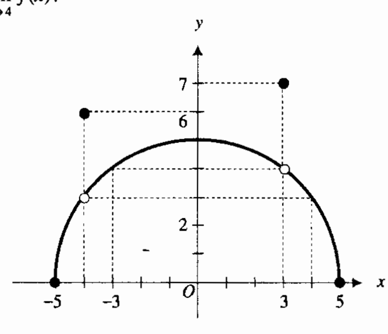
55. El dominio de f es $(-\infty, +\infty)$. **(a)** Defina $f(x)$ a trozos. **(b)** ¿Cuáles son los valores de $f(-3)$, $f(0)$ y $f(3)$? **(c)** ¿Cuáles son los valores de $\lim\limits_{x \to -3} f(x)$, $\lim\limits_{x \to 0} f(x)$ y $\lim\limits_{x \to 3} f(x)$?



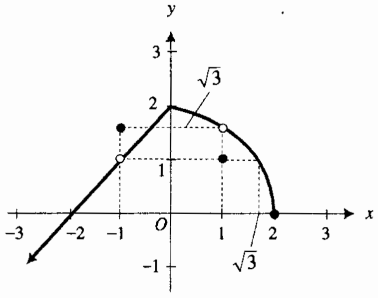
56. El dominio de f es $(-\infty, +\infty)$. **(a)** Defina $f(x)$ a trozos. **(b)** ¿Cuáles son los valores de $f(-2)$, $f(0)$ y $f(2)$? **(c)** ¿Cuáles son los valores de $\lim\limits_{x \to -2} f(x)$, $\lim\limits_{x \to 0} f(x)$ y $\lim\limits_{x \to 2} f(x)$?



57. El dominio de f es $[-5, 5]$. **(a)** Defina $f(x)$ a trozos. **(b)** ¿Cuáles son los valores de $f(-4)$, $f(-3)$, $f(3)$ y $f(4)$? **(c)** ¿Cuáles son los valores de $\lim\limits_{x \to -4} f(x)$, $\lim\limits_{x \to -3} f(x)$, $\lim\limits_{x \to 3} f(x)$ y $\lim\limits_{x \to 4} f(x)$?



58. El dominio de f es $[-\infty, 2]$. **(a)** Defina $f(x)$ a trozos. **(b)** ¿Cuáles son los valores de $f(-1)$, $f(0)$, $f(1)$ y $f(\sqrt{3})$? **(c)** ¿Cuáles son los valores de $\lim\limits_{x\to -1} f(x)$, $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$, $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$ y $\lim\limits_{x\to \sqrt{3}} f(x)$?



En los ejercicios 59 a 62, dibuje la gráfica de alguna función f que satisfaga las condiciones dadas. En cada ejercicio el dominio de f es $(-\infty, +\infty)$.

59. $f(2) = 3$; $\lim\limits_{x\to 2} f(x) = 1$; $\lim\limits_{x\to a} f(x) = f(a)$ si $a \neq 2$; el contradominio de f es el conjunto de todos los números reales.

60. $f(-3) = 4$; $f(3) = -5$; $\lim\limits_{x\to -3} f(x) = -5$; $\lim\limits_{x\to 3} f(x) = 4$; $\lim\limits_{x\to a} f(x) = f(a)$ si $a \neq \pm 3$; el contradominio de f es el conjunto de todos los números reales.

61. $\lim\limits_{x\to -6} f(x) \neq f(-6)$; $\lim\limits_{x\to 6} f(x) \neq f(6)$; $\lim\limits_{x\to a} f(x) = f(a)$ si $a \neq \pm 6$; el contradominio de f es el conjunto de todos los números reales no negativos.

62. $f(-2) \neq f(2)$; $\lim\limits_{x\to -2} f(x) \neq f(-2)$; $\lim\limits_{x\to 2} f(x) \neq f(2)$; $\lim\limits_{x\to a} f(x) = f(a)$ si $a \neq \pm 2$; el contradominio de f es el intervalo cerrado $[-3, 3]$.

63. Demuestre el teorema 1.5.14. *Sugerencia:* Debido a que el teorema tiene el conectivo lógico *si y sólo si*, la demostración debe realizarse en dos partes. Para demostrar que $\lim\limits_{x\to a} f(x) = L$ *si* $\lim\limits_{x\to a} [f(x) - L] = 0$, inicie con $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ y sustituya $f(x)$ por $[f(x) - L] + L$, después aplique el teorema 4 de límites. Para demostrar que $\lim\limits_{x\to a} f(x) = L$ *sólo si* $\lim\limits_{x\to a} [f(x) - L] = 0$ o, equivalentemente, $\lim\limits_{x\to a} [f(x) - L] = 0$ *si* $\lim\limits_{x\to a} f(x) = L$, aplique el teorema 4 de límites a $\lim\limits_{x\to a} [f(x) - L]$.

64. Demuestre el teorema 1.5.15. *Sugerencia:* como en la demostración del teorema 1.5.14, se requieren dos partes. Para demostrar que $\lim\limits_{x\to a} f(x) = L$ *si* $\lim\limits_{t\to 0} f(t + a) = L$, aplique la definición 1.5.1 y después sustituya $t + a$ por x y t por $x - a$. Para demostrar que $\lim\limits_{x\to a} f(x) = L$ *sólo si* $\lim\limits_{t\to 0} f(t + a) = L$ o, equivalentemente, $\lim\limits_{t\to 0} f(t + a) = L$ *si* $\lim\limits_{x\to a} f(x) = L$, aplique la definición 1.5.1 y después sustituya x por $t + a$ y $x - a$ por t.

65. Si P es una función polinomial, ¿por qué existe $\lim\limits_{x\to a} P(x)$ para todos los números a y por qué puede determinarse este límite calculando $P(a)$? Si R es una función racional, ¿por qué no puede tenerse un enunciado semejante al anterior que implique a $\lim\limits_{x\to a} R(x)$? ¿Cómo podría modificar el enunciado anterior para el límite de una función racional?

66. Si $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ existe y $\lim\limits_{x\to a} [f(x) + g(x)]$ no existe, explique por qué puede concluirse que $\lim\limits_{x\to a} g(x)$ no existe.

67. Sin emplear las palabras *límite* o *se aproxima* y sin utilizar símbolos tales como ϵ y δ, establezca en palabras lo que significa el siguiente simbolismo: $\lim\limits_{x\to a} f(x) = L$.

1.6 LÍMITES LATERALES

Hasta ahora, en el estudio del límite de una función conforme la variable independiente x tiende al número a, se han considerado valores de x cercanos a a, tanto mayores como menores que a; esto es, valores de x en un intervalo abierto que contenga a a, el cual no se considera como posible valor de x. Sin embargo, suponga que se tiene la función definida por

$$f(x) = \sqrt{x - 4}$$

Como $f(x)$ no existe si $x < 4$, entonces f no está definida en cualquier intervalo abierto que contenga a 4. De modo que $\lim\limits_{x\to 4} \sqrt{x - 4}$ no tiene significado. Si, de cualquier forma, se restringe x a números mayores que 4, puede lograrse que el valor de $\sqrt{x - 4}$ esté tan cerca de 0 como se desee tomando valores de x suficientemente cercanos a 4 pero mayores que 4. En tal caso, x se aproxima a 4 por la derecha y se considera el *límite por la derecha* (o el *límite lateral derecho*), el cual se define a continuación.

1.6.1 Definición de límite por la derecha

Sea f una función definida en cada número del intervalo abierto (a, c). Entonces, el **límite de $f(x)$, conforme x tiende a a por la derecha, es L,** lo que se denota por

$$\lim_{x \to a^+} f(x) = L$$

si para cualquier $\epsilon > 0$, sin importar qué tan pequeña sea, existe una $\delta > 0$ tal que

$$\text{si } 0 < x - a < \delta \quad \text{entonces} \quad |f(x) - L| < \epsilon$$

Observe que en la última línea de la definición, no se colocaron barras de valor absoluto alrededor de $x - a$ ya que se consideran únicamente valores de x para los cuales $x > a$.

Al calcular, a partir de la definición, el límite de $\sqrt{x - 4}$, conforme x tiende a 4 por la derecha, se tiene

$$\lim_{x \to 4^+} \sqrt{x - 4} = 0$$

Si, cuando se considera el límite de una función, la variable independiente x se restringe a números menores que a, se dice que x se aproxima a a por la izquierda. Este límite recibe el nombre de *límite por la izquierda* (o *límite lateral izquierdo*).

1.6.2 Definición de límite por la izquierda

Sea f una función definida en cada número del intervalo abierto (d, a). Entonces, el **límite de $f(x)$, conforme x tiende a a por la izquierda, es L,** lo que se denota por

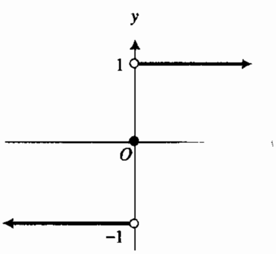
$$\lim_{x \to a^-} f(x) = L$$

si para cualquier $\epsilon > 0$, sin importar qué tan pequeña sea, existe una $\delta > 0$ tal que

$$\text{si } 0 < a - x < \delta \quad \text{entonces} \quad |f(x) - L| < \epsilon$$

Se referirá al $\lim\limits_{x \to a} f(x)$ como el **límite bilateral** para distinguirlo de los límites laterales.

Los teoremas 1 a 10 de límites estudiados en la sección 1.5 siguen siendo válidos si "$x \to a$" se sustituye por "$x \to a^+$" o "$x \to a^-$".



$$\operatorname{sgn} x = \begin{cases} -1 & \text{si } x < 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \\ 1 & \text{si } 0 < x \end{cases}$$

FIGURA 1

EJEMPLO ILUSTRATIVO 1 La figura 1 muestra la gráfica de la función signo definida en el ejercicio 49 de la sección 1.1 mediante

$$\operatorname{sgn} x = \begin{cases} -1 & \text{si } x < 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \\ 1 & \text{si } 0 < x \end{cases}$$

Como $\operatorname{sgn} x = -1$ si $x < 0$ y $\operatorname{sgn} x = 1$ si $0 < x$, se tiene

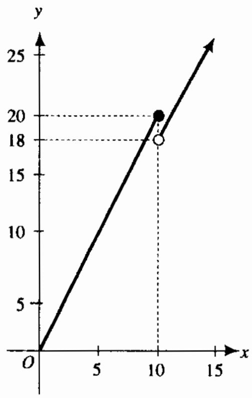
$$\lim_{x \to 0^-} \operatorname{sgn} x = \lim_{x \to 0^-} (-1) \qquad\qquad \lim_{x \to 0^+} \operatorname{sgn} x = \lim_{x \to 0^+} 1$$
$$= -1 \qquad\qquad\qquad\qquad = 1$$

En el ejemplo ilustrativo 1, debido a que el límite por la izquierda y el límite por la derecha no son iguales, el límite bilateral $\lim_{x\to 0} \operatorname{sgn} x$ no existe. El concepto de límite bilateral no existe debido a que los dos límites laterales son diferentes, lo cual es una consecuencia del siguiente teorema.

1.6.3 Teorema

El $\lim_{x\to a} f(x)$ existe y es igual a L si y sólo si $\lim_{x\to a^-} f(x)$ y $\lim_{x\to a^+} f(x)$ existen y son iguales a L.

La demostración de este teorema se deja al estudiante como ejercicio (consulte el ejercicio 34).



$$C(x) = \begin{cases} 2x & \text{si } 0 \le x \le 10 \\ 1.8x & \text{si } 10 < x \end{cases}$$

FIGURA 2

EJEMPLO ILUSTRATIVO 2 En el ejemplo 2 de la sección 1.3 se tuvo la siguiente función en la que $C(x)$ dólares es el costo total de un pedido de x libras de un producto:

$$C(x) = \begin{cases} 2x & \text{si } 0 \le x \le 1 \\ 1.8x & \text{si } 10 < x \end{cases}$$

La gráfica de C se muestra en la figura 2. Observe el rompimiento de la gráfica en $x = 10$. A continuación se examinará el $\lim_{x\to 10} C(x)$. Como la definición de $C(x)$ cuando $x < 10$ es diferente de la definición cuando $x > 10$, debe distinguirse entre el límite por la izquierda en 10 y el límite por la derecha en 10. Al calcular estos límites se obtiene

$$\lim_{x\to 10^-} C(x) = \lim_{x\to 10^-} 2x = 20 \qquad \lim_{x\to 10+} C(x) = \lim_{x\to 10+} 1.8x = 18$$

Puesto que $\lim_{x\to 10^-} C(x) \neq \lim_{x\to 10^+} C(x)$, se concluye, por el teorema 1.6.3, que $\lim_{x\to 10} C(x)$ no existe. En la sección 1.8, se considerará otra vez esta función como un ejemplo de una función *discontinua*. ◀

EJEMPLO 1 Sea g la función definida por

$$g(x) = \begin{cases} |x| & \text{si } x \neq 0 \\ 2 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

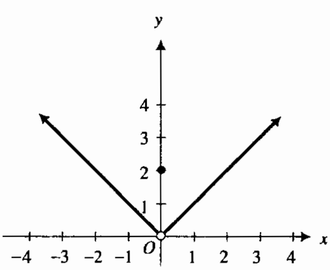
(a) Dibuje la gráfica de g. (b) Determine $\lim_{x\to 0} g(x)$ si existe.

Solución

(a) La gráfica de g se muestra en la figura 3. Observe que la gráfica se rompe en el origen.

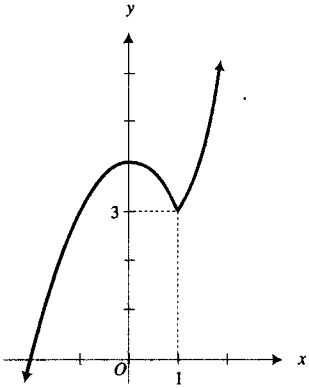
(b) $$\lim_{x\to 0^-} g(x) = \lim_{x\to 0^-} (-x) = 0 \qquad \lim_{x\to 0^+} g(x) = \lim_{x\to 0^+} x = 0$$

Como $\lim_{x\to 0^-} g(x) = \lim_{x\to 0^+} g(x)$, se concluye, por el teorema 1.6.3, que $\lim_{x\to 0} g(x)$ existe y es igual a 0. Observe que $g(0) = 2$, lo cual no afecta al $\lim_{x\to 0} g(x)$. ◀



$$g(x) = \begin{cases} |x| & \text{si } x \neq 0 \\ 2 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

FIGURA 3



$h(x) = \begin{cases} 4 - x^2 & \text{si } x \leq 1 \\ 2 + x^2 & \text{si } 1 < x \end{cases}$

FIGURA 4

EJEMPLO 2 Sea h la función definida por

$$h(x) = \begin{cases} 4 - x^2 & \text{si } x \leq 1 \\ 2 + x^2 & \text{si } 1 < x \end{cases}$$

(a) Dibuje la gráfica de h. **(b)** Determine, si existen, cada uno de los siguientes límites: $\lim\limits_{x \to 1^-} h(x)$; $\lim\limits_{x \to 1+} h(x)$; $\lim\limits_{x \to 1} h(x)$.

Solución

(a) La gráfica de h se muestra en la figura 4.

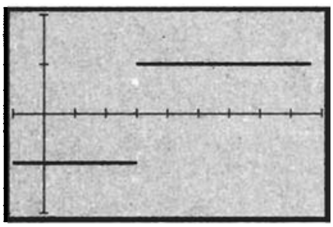
(b)
$$\begin{aligned} \lim_{x \to 1^-} h(x) &= \lim_{x \to 1^-} (4 - x^2) \\ &= 3 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} \lim_{x \to 1+} h(x) &= \lim_{x \to 1+} (2 + x^2) \\ &= 3 \end{aligned}$$

Como $\lim\limits_{x \to 1^-} h(x) = \lim\limits_{x \to 1+} h(x)$ y ambos son iguales a 3, se concluye, por el teorema 1.6.3, que $\lim\limits_{x \to 1} h(x) = 3$. ◀

EJEMPLO 3 Sea f la función definida por

$$f(x) = \frac{|x - 3|}{x - 3}$$

(a) Trace la gráfica de f y a partir de la gráfica haga una conjetura acerca de $\lim\limits_{x \to 3} f(x)$. **(b)** Confirme analíticamente la conjetura del inciso (a).



[−1, 8.4] por [−2, 2]

$f(x) = \dfrac{|x - 3|}{x - 3}$

FIGURA 5

Solución

(a) La figura 5 muestra la gráfica de f trazada en el rectángulo de inspección de [−1, 8.4] por [−2, 2]. Debido a que la gráfica se rompe en el punto donde $x = 3$, se sospecha que $\lim\limits_{x \to 3} f(x)$ no existe.

(b) Como

$$|x - 3| = \begin{cases} x - 3 & \text{si } x \geq 3 \\ 3 - x & \text{si } x < 3 \end{cases} \quad \text{entonces} \quad \frac{|x - 3|}{x - 3} = \begin{cases} 1 & \text{si } x \geq 3 \\ -1 & \text{si } x < 3 \end{cases}$$

Al calcular los límites laterales se obtiene

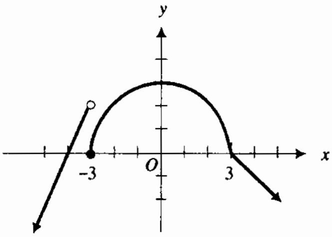
$$\begin{aligned} \lim_{x \to 3^-} f(x) &= \lim_{x \to 3^-} \frac{|x - 3|}{x - 3} \\ &= \lim_{x \to 3^-} (-1) \\ &= -1 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} \lim_{x \to 3^+} f(x) &= \lim_{x \to 3+} \frac{|x - 3|}{x - 3} \\ &= \lim_{x \to 3+} 1 \\ &= 1 \end{aligned}$$

Como $\lim\limits_{x \to 3^-} f(x) \neq \lim\limits_{x \to 3+} f(x)$, se ha confirmado analíticamente que $\lim\limits_{x \to 3} f(x)$ no existe. ◀

EJEMPLO 4 Sea f la función definida por

$$f(x) = \begin{cases} x + 5 & \text{si } x < -3 \\ \sqrt{9 - x^2} & \text{si } -3 \leq x \leq 3 \\ 3 - x & \text{si } 3 < x \end{cases}$$

(a) Dibuje la gráfica de f. **(b)** Determine cada uno de los siguientes límites: $\lim\limits_{x \to -3^-} f(x)$; $\lim\limits_{x \to -3+} f(x)$; $\lim\limits_{x \to -3} f(x)$; $\lim\limits_{x \to 3^-} f(x)$; $\lim\limits_{x \to 3^+} f(x)$; $\lim\limits_{x \to 3} f(x)$.



$$f(x) = \begin{cases} x + 5 & \text{si } x < -3 \\ \sqrt{9 - x^2} & \text{si } -3 \leq x \leq 3 \\ 3 - x & \text{si } 3 < x \end{cases}$$

FIGURA 6

Solución

(a) La gráfica de f se muestra en la figura 6.

(b) $\lim\limits_{x\to -3^-} f(x) = \lim\limits_{x\to -3^-} (x + 5) = 2$ $\qquad$ $\lim\limits_{x\to -3^+} f(x) = \lim\limits_{x\to -3^+} \sqrt{9 - x^2} = 0$

Como $\lim\limits_{x\to -3^-} f(x) \neq \lim\limits_{x\to 3^+} f(x)$, entonces $\lim\limits_{x\to -3} f(x)$ no existe.

$\lim\limits_{x\to 3^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 3^-} \sqrt{9 - x^2} = 0$ $\qquad$ $\lim\limits_{x\to 3^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 3^+} (3 - x) = 0$

Como $\lim\limits_{x\to 3^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 3^+} f(x)$, entonces $\lim\limits_{x\to 3} f(x)$ existe y es igual a 0. ◄

EJERCICIOS 1.6

En los ejercicios 1 a 22, dibuje la gráfica de la función y si existe, determine el límite indicado; si el límite no existe, diga por qué razón.

1. $f(x) = \begin{cases} 2 & \text{si } x < 1 \\ -1 & \text{si } x = 1 \\ -3 & \text{si } 1 < x \end{cases}$

(a) $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)$; **(b)** $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)$; **(c)** $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$

2. $f(x) = \begin{cases} -2 & \text{si } x < 0 \\ 2 & \text{si } 0 \leq x \end{cases}$

(a) $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)$; **(b)** $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)$; **(c)** $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$

3. $f(t) = \begin{cases} t + 4 & \text{si } t \leq -4 \\ 4 - t & \text{si } -4 < t \end{cases}$

(a) $\lim\limits_{x\to -4^+} f(t)$; **(b)** $\lim\limits_{x\to -4^-} f(t)$; **(c)** $\lim\limits_{x\to -4} f(t)$

4. $g(s) = \begin{cases} s + 3 & \text{si } s \leq -2 \\ 3 - s & \text{si } -2 < s \end{cases}$

(a) $\lim\limits_{s\to -2^+} g(s)$; **(b)** $\lim\limits_{s\to -2^-} g(s)$; **(c)** $\lim\limits_{s\to -2} g(s)$

5. $F(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si } x \leq 2 \\ 8 - 2x & \text{si } 2 < x \end{cases}$

(a) $\lim\limits_{x\to 2^+} F(x)$; **(b)** $\lim\limits_{x\to 2^-} F(x)$; **(c)** $\lim\limits_{x\to 2} F(x)$

6. $h(x) = \begin{cases} 2x + 1 & \text{si } x < 3 \\ 10 - x & \text{si } 3 \leq x \end{cases}$

(a) $\lim\limits_{x\to 3^+} h(x)$; **(b)** $\lim\limits_{x\to 3^-} h(x)$; **(c)** $\lim\limits_{x\to 3} h(x)$

7. $g(r) = \begin{cases} 2r + 3 & \text{si } r < 1 \\ 2 & \text{si } r = 1 \\ 7 - 2r & \text{si } 1 < r \end{cases}$

(a) $\lim\limits_{r\to 1^+} g(r)$; **(b)** $\lim\limits_{r\to 1^-} g(r)$; **(c)** $\lim\limits_{r\to 1} g(r)$

8. $g(t) = \begin{cases} 3 + t^2 & \text{si } t < -2 \\ 0 & \text{si } t = -2 \\ 11 - t^2 & \text{si } -2 < t \end{cases}$

(a) $\lim\limits_{x\to -2^+} g(t)$; **(b)** $\lim\limits_{t\to -2^-} g(t)$; **(c)** $\lim\limits_{t\to -2} g(t)$

9. $f(x) = \begin{cases} x^2 - 4 & \text{si } x < 2 \\ 4 & \text{si } x = 2 \\ 4 - x^2 & \text{si } 2 < x \end{cases}$

(a) $\lim\limits_{x\to 2^+} f(x)$; **(b)** $\lim\limits_{x\to 2^-} f(x)$; **(c)** $\lim\limits_{x\to 2} f(x)$

10. $f(x) = \begin{cases} 2x + 3 & \text{si } x < 1 \\ 4 & \text{si } x = 1 \\ x^2 + 2 & \text{si } 1 < x \end{cases}$

(a) $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)$; **(b)** $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)$; **(c)** $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$

11. $F(x) = |x - 5|$

(a) $\lim\limits_{x\to 5^+} F(x)$; **(b)** $\lim\limits_{x\to 5^-} F(x)$; **(c)** $\lim\limits_{x\to 5} F(x)$

12. $f(x) = 3 + |2x - 4|$

(a) $\lim\limits_{x\to 2^+} f(x)$; **(b)** $\lim\limits_{x\to 2^-} f(x)$; **(c)** $\lim\limits_{x\to 2} f(x)$

13. $G(x) = |2x - 3| - 4$

(a) $\lim\limits_{x\to 3/2^+} G(x)$; **(b)** $\lim\limits_{x\to 3/2^-} G(x)$; **(c)** $\lim\limits_{x\to 3/2} G(x)$

14. $F(x) = \begin{cases} |x - 1| & \text{si } x < -1 \\ 0 & \text{si } x = -1 \\ |1 - x| & \text{si } -1 < x \end{cases}$

(a) $\lim\limits_{x\to -1^+} F(x)$; **(b)** $\lim\limits_{x\to -1^-} F(x)$; **(c)** $\lim\limits_{x\to -1} F(x)$

15. $f(x) = \dfrac{|x|}{x}$

(a) $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)$; **(b)** $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)$; **(c)** $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$

16. $S(x) = |\operatorname{sgn} x|$ (la función $\operatorname{sgn} x$ se definió en el ejemplo ilustrativo 1)

(a) $\lim\limits_{x\to 0^+} S(x)$; **(b)** $\lim\limits_{x\to 0^-} S(x)$; **(c)** $\lim\limits_{x\to 0} S(x)$

17. $f(x) = \begin{cases} 2 & \text{si } x < -2 \\ \sqrt{4 - x^2} & \text{si } -2 \leq x \leq 2 \\ -2 & \text{si } 2 < x \end{cases}$

(a) $\lim\limits_{x\to -2^-} f(x)$; **(b)** $\lim\limits_{x\to -2^+} f(x)$; **(c)** $\lim\limits_{x\to -2} f(x)$ **(d)** $\lim\limits_{x\to 2^-} f(x)$; **(e)** $\lim\limits_{x\to 2^+} f(x)$; **(f)** $\lim\limits_{x\to 2} f(x)$

18. $f(x) = \begin{cases} x + 1 & \text{si } x < -1 \\ x^2 & \text{si } -1 \leq x \leq 1 \\ 2 - x & \text{si } 1 < x \end{cases}$

(a) $\lim\limits_{x\to -1^-} f(x)$; **(b)** $\lim\limits_{x\to -1^+} f(x)$; **(c)** $\lim\limits_{x\to -1} f(x)$ **(d)** $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)$; **(e)** $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)$; **(f)** $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$

19. $f(t) = \begin{cases} \sqrt[3]{t} & \text{si } t < 0 \\ \sqrt{t} & \text{si } 0 \le t \end{cases}$

(a) $\lim\limits_{t \to 0^+} f(t)$; **(b)** $\lim\limits_{t \to 0^-} f(t)$; **(c)** $\lim\limits_{t \to 0} f(t)$

20. $g(x) = \begin{cases} \sqrt[3]{-x} & \text{si } x \le 0 \\ \sqrt[3]{x} & \text{si } 0 < x \end{cases}$

(a) $\lim\limits_{x \to 0^+} g(x)$; **(b)** $\lim\limits_{x \to 0^-} g(x)$; **(c)** $\lim\limits_{x \to 0} g(x)$

21. $F(x) = \begin{cases} \sqrt{x^2 - 9} & \text{si } x \le -3 \\ \sqrt{9 - x^2} & \text{si } -3 < x < 3 \\ \sqrt{x^2 - 9} & \text{si } 3 \le x \end{cases}$

(a) $\lim\limits_{x \to -3^-} F(x)$; **(b)** $\lim\limits_{x \to -3^+} F(x)$; **(c)** $\lim\limits_{x \to -3} F(x)$; **(d)** $\lim\limits_{x \to 3^-} F(x)$; **(e)** $\lim\limits_{x \to 3^+} F(x)$; **(f)** $\lim\limits_{x \to 3} F(x)$

22. $G(t) = \begin{cases} \sqrt[3]{t + 1} & \text{si } t \le -1 \\ \sqrt{1 - t^2} & \text{si } -1 < t < 1 \\ \sqrt[3]{t - 1} & \text{si } 1 \le t \end{cases}$

(a) $\lim\limits_{t \to -1^-} G(t)$; **(b)** $\lim\limits_{t \to -1^+} G(t)$; **(c)** $\lim\limits_{t \to -1} G(t)$; **(d)** $\lim\limits_{t \to 1^-} G(t)$; **(e)** $\lim\limits_{t \to 1^+} G(t)$; **(f)** $\lim\limits_{t \to 1} G(t)$

23. Sea $F(x) = x - 2 \operatorname{sgn} x$, donde $\operatorname{sgn} x$ está definida en el ejemplo ilustrativo 1. Si existen, determine: **(a)** $\lim\limits_{x \to 0^+} F(x)$; **(b)** $\lim\limits_{x \to 0^-} F(x)$; **(c)** $\lim\limits_{x \to 0} F(x)$.

24. Sea $h(x) = \operatorname{sgn} x - U(x)$, donde $\operatorname{sgn} x$ está definida en el ejemplo ilustrativo 1 y U es la función salto unitario definida por

$$U(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ 1 & \text{si } 0 \le x \end{cases}$$

Si existen, determine: **(a)** $\lim\limits_{x \to 0^+} h(x)$; **(b)** $\lim\limits_{x \to 0^-} h(x)$; **(c)** $\lim\limits_{x \to 0} h(x)$.

25. Si existen, determine: **(a)** $\lim\limits_{x \to 2^+} [\![x]\!]$; **(b)** $\lim\limits_{x \to 2^-} [\![x]\!]$; **(c)** $\lim\limits_{x \to 2} [\![x]\!]$.

26. Si existen, determine: **(a)** $\lim\limits_{x \to 4^+} [\![x - 3]\!]$; **(b)** $\lim\limits_{x \to 4^-} [\![x - 3]\!]$; **(c)** $\lim\limits_{x \to 4} [\![x - 3]\!]$.

27. Sea $h(x) = (x - 1) \operatorname{sgn} x$. Dibuje la gráfica de h. Si existen, determine: **(a)** $\lim\limits_{x \to 0^+} h(x)$; **(b)** $\lim\limits_{x \to 0^-} h(x)$; **(c)** $\lim\limits_{x \to 0} h(x)$.

28. Sea $G(x) = [\![x]\!] + [\![4 - x]\!]$. Dibuje la gráfica de G. Si existen, determine: **(a)** $\lim\limits_{x \to 3^+} G(x)$; **(b)** $\lim\limits_{x \to 3^-} G(x)$; **(c)** $\lim\limits_{x \to 3} G(x)$.

29. Dada $f(x) = \left\{ \begin{matrix} 3x + 2 & \text{si } x < 4 \\ 5x + k & \text{si } 4 \le x \end{matrix} \right\}$, determine el valor de k, tal que $\lim\limits_{x \to 4} f(x)$ exista.

30. Dada $f(x) = \left\{ \begin{matrix} kx - 3 & \text{si } x \le -1 \\ x^2 + k & \text{si } -1 < x \end{matrix} \right\}$, determine el valor de k tal que $\lim\limits_{x \to -1} f(x)$ exista.

31. Dada $f(x) = \left\{ \begin{matrix} x^2 & \text{si } x \le -2 \\ ax + b & \text{si } -2 < x < 2 \\ 2x - 6 & \text{si } 2 \le x \end{matrix} \right\}$, determine valores de a y b tales que $\lim\limits_{x \to -2} f(x)$ y $\lim\limits_{x \to 2} f(x)$ existan.

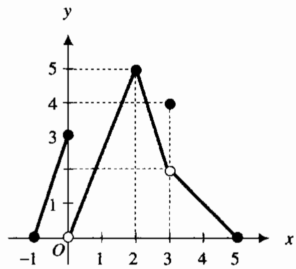
32. Dada $f(x) = \left\{ \begin{matrix} 2x - a & \text{si } x < -3 \\ ax + 2b & \text{si } -3 \le x \le 3 \\ b - 5x & \text{si } 3 < x \end{matrix} \right\}$, determine los valores de a y b tales que $\lim\limits_{x \to -3} f(x)$ y $\lim\limits_{x \to 3} f(x)$ existan.

33. Sea $f(x) = \left\{ \begin{matrix} -1 & \text{si } x < 0 \\ 1 & \text{si } 0 < x \end{matrix} \right\}$, Demuestre que $\lim\limits_{x \to 0} f(x)$ no existe, y que $\lim\limits_{x \to 0} |f(x)|$ existe.

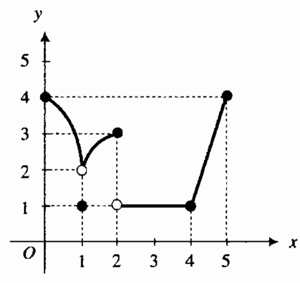
34. Demuestre el teorema 1.6.3.

En los ejercicios 35 y 36, si existen, evalúe los límites de los incisos (a)-(k) a partir de la gráfica mostrada en la figura adjunta.

35. El dominio de f es $[-1, 5]$. **(a)** $\lim\limits_{x \to -1^+} f(x)$; **(b)** $\lim\limits_{x \to 0^-} f(x)$; **(c)** $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x)$; **(d)** $\lim\limits_{x \to 0} f(x)$; **(e)** $\lim\limits_{x \to 2^-} f(x)$; **(f)** $\lim\limits_{x \to 2^+} f(x)$; **(g)** $\lim\limits_{x \to 2} f(x)$; **(h)** $\lim\limits_{x \to 3^-} f(x)$; **(i)** $\lim\limits_{x \to 3^+} f(x)$; **(j)** $\lim\limits_{x \to 3} f(x)$; **(k)** $\lim\limits_{x \to 5^-} f(x)$.



36. El dominio de f es $[0, 5]$. **(a)** $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x)$; **(b)** $\lim\limits_{x \to 1^-} f(x)$; **(c)** $\lim\limits_{x \to 1^+} f(x)$; **(d)** $\lim\limits_{x \to 1} f(x)$; **(e)** $\lim\limits_{x \to 2^-} f(x)$; **(f)** $\lim\limits_{x \to 2^+} f(x)$; **(g)** $\lim\limits_{x \to 2} f(x)$; **(h)** $\lim\limits_{x \to 4^-} f(x)$; **(i)** $\lim\limits_{x \to 4^+} f(x)$; **(j)** $\lim\limits_{x \to 4} f(x)$; **(k)** $\lim\limits_{x \to 5^-} f(x)$.



En los problemas 37 y 38, dibuje la gráfica de alguna función f que satisfaga las condiciones dadas.

37. El dominio de f es $[-1, 3]$. $f(-1) = -2$; $f(0) = 0$; $f(1) = 2$; $f(2) = 4$; $f(3) = 1$; $\lim\limits_{x \to -1^+} f(x) = -2$; $\lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = 0$; $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = 3$; $\lim\limits_{x \to 1} f(x) = 4$; $\lim\limits_{x \to 2^-} f(x) = 4$; $\lim\limits_{x \to 2^+} f(x) = 0$; $\lim\limits_{x \to 3^-} f(x) = 5$.

38. El dominio de f es $[-4, 4]$. $f(-4) = 3$; $f(-2) = -3$; $f(0) = 1$; $f(2) = -1$; $f(4) = 0$; $\lim\limits_{x \to -4^-} f(x) = 0$; $\lim\limits_{x \to -2} f(x) = 1$; $\lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = 1$; $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = 4$; $\lim\limits_{x \to 2} f(x) = -1$; $\lim\limits_{x \to 4^-} f(x) = 0$.

39. En el inciso (a) del ejercicio 5 de la sección 1.3, se le pidió que encontrase un modelo matemático que expresara el costo total de un embarque como una función de su peso. Si f es esa función y x es la variable independiente, determine cada uno de los siguientes límites: **(a)** $\lim_{x \to 50^-} f(x)$; **(b)** $\lim_{x \to 50^+} f(x)$; **(c)** $\lim_{x \to 200^-} f(x)$; **(d)** $\lim_{x \to 200^+} f(x)$.

40. En el inciso (a) del ejercicio 6 de la sección 1.3, se le pidió que encontrase un modelo matemático que expresara el porte de correo de primera clase para una carta que no pese más de 11 oz como una función de su peso. Si F es esa función y x es la variable independiente, determine cada uno de los siguientes límites: **(a)** $\lim_{x \to 0^+} F(x)$; **(b)** $\lim_{x \to 1^-} F(x)$; **(c)** $\lim_{x \to 1^+} F(x)$; **(d)** $\lim_{x \to 2^-} F(x)$; **(e)** $\lim_{x \to 10^-} F(x)$; **(f)** $\lim_{x \to 10^+} F(x)$; **(g)** $\lim_{x \to 11^-} F(x)$.

41. En el inciso (a) del ejercicio 7 de la sección 1.3, se le pidió que encontrase un modelo matemático que expresara el costo de una llamada telefónica, que no dure más de 5 min, de Mendocino a San Francisco como una función de su duración. Si g es esa función y x es la variable independiente, determine cada uno de los siguientes límites: **(a)** $\lim_{x \to 1^-} g(x)$; **(b)** $\lim_{x \to 1^+} g(x)$; **(c)** $\lim_{x \to 2^-} g(x)$; **(d)** $\lim_{x \to 5^-} g(x)$.

42. En el inciso (a) del ejercicio 8 de la sección 1.3, se le pidió que encontrase un modelo matemático que expresara el precio de admisión al Coast Cinema como una función de la edad de la persona. Si G es esa función y x es la variable independiente, determine cada uno de los siguientes límites: **(a)** $\lim_{x \to 12^-} G(x)$; **(b)** $\lim_{x \to 12^+} G(x)$; **(c)** $\lim_{x \to 60^-} G(x)$; **(d)** $\lim_{x \to 60^+} G(x)$.

43. Sean f y g las funciones definidas como

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + 3 & \text{si } x \leq 1 \\ x + 1 & \text{si } 1 < x \end{cases}$$

$$g(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si } x \leq 1 \\ 2 & \text{si } 1 < x \end{cases}$$

(a) Muestre que $\lim_{x \to 1^-} f(x)$ y $\lim_{x \to 1^+} f(x)$ existen pero no son iguales, y en consecuencia, $\lim_{x \to 1} f(x)$ no existe.

(b) Muestre que $\lim_{x \to 1^-} g(x)$ y $\lim_{x \to 1^+} g(x)$ existen pero no son iguales, y en consecuencia, $\lim_{x \to 1} g(x)$ no existe.

(c) Obtenga una fórmula para $f(x) \cdot g(x)$.

(d) Demuestre que $\lim_{x \to 1} [f(x) \cdot g(x)]$ existe probando que

$$\lim_{x \to 1^-} [f(x) \cdot g(x)] = \lim_{x \to 1^+} [f(x) \cdot g(x)].$$

44. Sean f y g las funciones definidas como

$$f(x) = \begin{cases} x + 1 & \text{si } x < 1 \\ x - 1 & \text{si } 1 \leq x \end{cases}$$

$$g(x) = \begin{cases} 1 - x & \text{si } x < 1 \\ 1 + x & \text{si } 1 \leq x \end{cases}$$

(a) Muestre que $\lim_{x \to 1} f(x)$ y $\lim_{x \to 1} g(x)$ no existen.

(b) Defina la función $f + g$.

(c) Demuestre que $\lim_{x \to 1} [f(x) + g(x)]$ existe.

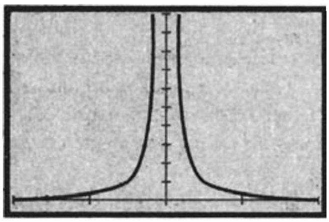
(d) De los resultados de los incisos (a) y (c) se tiene

$$\lim_{x \to 1} [f(x) + g(x)] \neq \lim_{x \to 1} f(x) + \lim_{x \to 1} g(x).$$

¿Contradice este hecho al teorema 4 de límites (1.5.5)? ¿Por qué?

45. Sin utilizar las palabras *límite* o *se aproxima* y sin emplear símbolos tales como ϵ y δ, exprese en palabras lo que significa cada uno de los siguientes simbolismos: **(a)** $\lim_{x \to a^-} f(x) = L$; **(b)** $\lim_{x \to a^+} f(x) = L$.

1.7 LÍMITES INFINITOS



[−2, 2] por [0, 100]

$$f(x) = \frac{3}{x^2}$$

FIGURA 1

En esta sección, se estudian las funciones cuyos valores *crecen* o *decrecen sin límite* conforme la variable independiente se acerca cada vez más a un número fijo. Para iniciar, considere la función definida por

$$f(x) = \frac{3}{x^2}$$

El dominio de f es el conjunto de todos los números reales excepto 0, mientras que su contradominio es el conjunto de todos los números reales positivos. La figura 1 muestra la gráfica de f trazada en el rectángulo de inspección de [−2, 2] por [0, 100]. Observe que conforme las coordenadas x de los puntos de la gráfica se aproximan a 0, por la derecha o por la izquierda, las coordenadas y, o $f(x)$, crecen. A continuación se calcularán algunos valores de la función cuando x tiende a 0. Aproxime x a 0 por la derecha, es decir, considere los siguientes valores de x: 1, 0.5, 0.25, 0.1, 0.01, 0.001, y determine los valores correspondientes de $f(x)$, los cuales se muestran en la

Tabla 1

x	$f(x) = \dfrac{3}{x^2}$
1	3
0.5	12
0.25	48
0.1	300
0.01	30 000
0.001	3 000 000

la tabla 1. Observe en esta tabla que $f(x)$ crece conforme x se aproxima cada vez más a 0, a través de valores mayores que 0. En realidad, se puede hacer $f(x)$ tan grande como se desee para todos los valores de x suficientemente cercanos a 0 y mayores que 0. Debido a este hecho, se dice que $f(x)$ *crece sin límite* conforme x tiende a 0 mediante valores mayores que 0, lo cual se escribe como

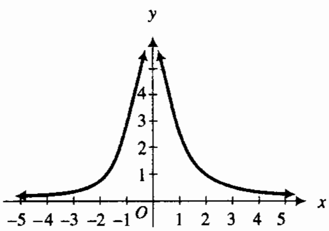
$$\lim_{x \to 0^+} \frac{3}{x^2} = +\infty$$

Ahora aproxime x a 0 por la izquierda; en particular, considere para x los valores $-1, -0.5, -0.25, -0.1, -0.01$ y -0.001. Debido a la simetría con respecto al eje y, los valores de la función son los mismos que los correspondientes a los valores positivos de x. Así, otra vez, $f(x)$ *crece sin límite* conforme x tiende a 0 a través de valores menores que 0, lo cual se expresa como

$$\lim_{x \to 0^-} \frac{3}{x^2} = +\infty$$

Por tanto, conforme x se aproxima a 0 por la derecha o por la izquierda, $f(x)$ *crece sin límite*, lo que se expresa en símbolos como

$$\lim_{x \to 0} \frac{3}{x^2} = +\infty$$



$f(x) = \dfrac{3}{x^2}$

FIGURA 2

A partir de la información anterior, se obtiene la gráfica de f, mostrada en la figura 2, la cual, por supuesto, corresponde a la gráfica trazada en la figura 1. Observe que las dos "ramas" de la curva se acercan cada vez más al eje y conforme x se aproxima a 0. Para esta gráfica, el eje y es una *asíntota vertical*, la cual se definirá posteriormente en esta sección.

1.7.1 Definición de valores de función que crecen sin límite

Sea f una función definida en cada número de algún intervalo abierto I que contiene a a, excepto posiblemente en a mismo. **Conforme x se aproxima a a, $f(x)$ crece sin límite,** lo cual se escribe como

$$\lim_{x \to a} f(x) = +\infty \qquad \textbf{(1)}$$

si para cualquier número $N > 0$ existe $\delta > 0$ tal que

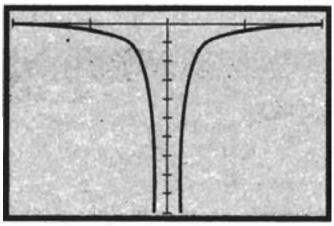
$$\text{si } 0 < |x - a| < \delta \quad \text{entonces} \quad f(x) > N$$

Esta definición también puede establecerse en otra forma como sigue: "Los valores de función $f(x)$ crecen sin límite conforme x tiende a un número a si $f(x)$ puede hacerse tan grande como se desee (esto es, mayor que cualquier número positivo N) para todos los valores de x suficientemente cercanos a a, pero sin considerar a a, mismo.

Se insiste una vez más, como se hizo cuando se analiza la notación de intervalos en la sección A-1 del apéndice, que $+\infty$ no es un símbolo para representar un número real; en consecuencia, cuando se escribe $\lim_{x \to a} f(x) = +\infty$, no tiene el mismo significado que $\lim_{x \to a} f(x) = L$, donde L es un número real. La ecuación (1) puede leerse como "el límite de $f(x)$ cuando x tiende a a es infinito positivo (o más infinito)". En tal caso, el límite no existe, pero el símbolo $+\infty$ indica el comportamiento de los valores de función $f(x)$ conforme x se aproxima cada vez más a a.

De manera análoga, puede indicarse el comportamiento de una función cuyos valores *decrecen sin límite*. Para llegar a esto, considere la función g definida por la ecuación

$$g(x) = \frac{-3}{x^2}$$



$[-2,\ 2]$ por $[-100,\ 0]$

$g(x) = \dfrac{-3}{x^2}$

FIGURA 3

La figura 3 muestra la gráfica de esta función trazada en el rectángulo de inspección de $[-2,\ 2]$ por $[-100,\ 0]$. Los valores de función dada por $g(x) = \frac{-3}{x^2}$, son los negativos de los valores proporcionados por $f(x) = \frac{3}{x^2}$. De modo que para la función g, conforme x se aproxima a 0, por la derecha o por la izquierda, $g(x)$ *decrece sin límite*, lo que se escribe como

$$\lim_{x \to 0} \frac{-3}{x^2} = -\infty$$

1.7.2 Definición de valores de función que decrecen sin límite

Sea f una función definida en cada número de algún intervalo abierto I que contiene a a, excepto posiblemente en a mismo. **Conforme x se aproxima a a, $f(x)$ decrece sin límite,** lo cual se escribe como

$$\lim_{x \to a} f(x) = -\infty \tag{2}$$

si para cualquier número $N < 0$ existe $\delta > 0$, tal que

$$\text{si } 0 < |x - a| < \delta \quad \text{entonces} \quad f(x) < N$$

Nota: La ecuación (2) puede leerse como "el límite de $f(x)$ cuando x tiende a a es infinito negativo (o menos infinito)". Observe, otra vez, que el límite no existe, y que el símbolo $-\infty$ sólo indica el comportamiento de los valores de función $f(x)$ conforme x se aproxima cada vez más a a.

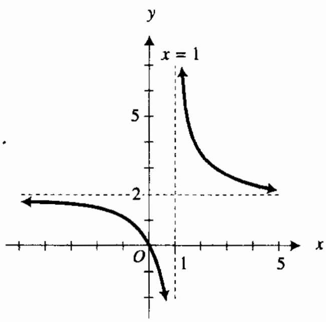
También se pueden considerar los límites "infinitos" laterales. Se establece que y $\lim_{x \to a^+} f(x) = +\infty$ si f está definida en cada número de un intervalo abierto (a, c) y si para cualquier número $N > 0$, existe $\delta > 0$ tal que

$$\text{si } 0 < x - a < \delta, \quad \text{entonces} \quad f(x) > N$$

Definiciones semejantes pueden darse para $\lim_{x \to a^-} f(x) = +\infty$, $\lim_{x \to a^+} f(x) = -\infty$ y $\lim_{x \to a^-} f(x) = -\infty$. Se le pedirá que escriba estas definiciones en el ejercicio 52.

Ahora suponga que h es la función definida por la ecuación

$$h(x) = \frac{2x}{x - 1} \tag{3}$$



$h(x) = \dfrac{2x}{x - 1}$

FIGURA 4

La gráfica de h se presenta en la figura 4, en esta figura también se muestra la recta $x = 1$ como una recta punteada (una *asíntota vertical* de la gráfica). Consulte las figuras 1, 3 y 4, y observe la diferencia entre el comportamiento de la función de la figura 4 y las funciones de las otras dos figuras. Note que

$$\lim_{x \to 1^-} \frac{2x}{x - 1} = -\infty \tag{4}$$

$$\lim_{x \to 1^+} \frac{2x}{x - 1} = +\infty \tag{5}$$

Esto es, para la función definida por (3), conforme x se aproxima a 1 a través de valores menores que 1, los valores de función decrecen sin límite, mientras que cuando x se aproxima a 1 mediante valores mayores que 1, los valores de función crecen sin límite.

Antes de presentar algunos ejemplos, se necesitan dos teoremas de límites que implican límites "infinitos".

1.7.3 Teorema 11 de límites

Si r es cualquier número entero positivo, entonces

(i) $\lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{1}{x^r} = +\infty;$

(ii) $\lim\limits_{x \to 0^-} \dfrac{1}{x^r} = \begin{cases} -\infty & \text{si } r \text{ es impar} \\ +\infty & \text{si } r \text{ es par} \end{cases}$

Demostración Se probará el inciso (i). La demostración del inciso (ii) es análoga y se deja como ejercicio. (Vea el ejercicio suplementario 3). Se debe probar que para cualquier $N > 0$ existe $\delta > 0$, tal que

$$\text{si } 0 < x < \delta \quad \text{entonces} \quad \frac{1}{x^r} > N$$

o, equivalentemente, como $x > 0$ y $N > 0$,

$$\text{si } 0 < x < \delta \quad \text{entonces} \quad x^r < \frac{1}{N}$$

o, de modo equivalente, como $r > 0$,

$$\text{si } 0 < x < \delta \quad \text{entonces} \quad x < \left(\frac{1}{N}\right)^{1/r}$$

El enunciado anterior se cumple si $\delta = \left(\dfrac{1}{N}\right)^{1/r}$. Por tanto, cuando $\delta = \left(\dfrac{1}{N}\right)^{1/r}$

$$\text{si } 0 < x < \delta \quad \text{entonces} \quad \frac{1}{x^r} > N$$

■

EJEMPLO ILUSTRATIVO 1 A partir del teorema 11(i) de límites

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{1}{x^3} = +\infty \quad \text{y} \quad \lim_{x \to 0^+} \frac{1}{x^4} = +\infty$$

Del teorema 11(ii) de límites

$$\lim_{x \to 0^-} \frac{1}{x^3} = -\infty \quad \text{y} \quad \lim_{x \to 0^-} \frac{1}{x^4} = +\infty$$

◀

El teorema 12 de límites, que a continuación se presenta, implica el límite de una función racional para la cual el límite del denominador es cero y el límite del numerador es una constante diferente de cero. Esta situación se presenta en (4) y (5).

1.7.4 Teorema 12 de límites

Si a es cualquier número real y si $\lim\limits_{x \to a} f(x) = 0$ y $\lim\limits_{x \to a} g(x) = c$, donde c es una constante diferente de 0, entonces

(i) si $c > 0$ y $f(x) \to 0$ a través de valores positivos de $f(x)$, entonces

$$\lim_{x \to a} \frac{g(x)}{f(x)} = +\infty$$

(ii) si $c > 0$ y $f(x) \to 0$ a través de valores negativos de $f(x)$, entonces

$$\lim_{x \to a} \frac{g(x)}{f(x)} = -\infty$$

(iii) si $c < 0$ y $f(x) \to 0$ a través de valores positivos de $f(x)$, entonces

$$\lim_{x \to a} \frac{g(x)}{f(x)} = -\infty$$

(iv) si $c < 0$ y $f(x) \to 0$ a través de valores negativos de $f(x)$, entonces

$$\lim_{x \to a} \frac{g(x)}{f(x)} = +\infty$$

El teorema también es válido si se sustituye "$x \to a$" por "$x \to a^+$" o "$x \to a^-$".

La demostración del inciso (i) se presenta en el suplemento de esta sección. Las demostraciones de los otros incisos se dejan como ejercicios. Consulte los ejercicios suplementarios 4 a 6).

Cuando se aplica el teorema 12 de límites, con frecuencia se obtiene alguna indicación de si el resultado es $+\infty$ o $-\infty$, tomando *valores adecuados* de x próximos a a para determinar si el cociente es positivo o negativo, como se muestra en el ejemplo ilustrativo siguiente.

▷ EJEMPLO ILUSTRATIVO 2 En (4) se tiene

$$\lim_{x \to 1^-} \frac{2x}{x - 1}$$

Se puede aplicar el teorema 12 de límites ya que $\lim\limits_{x \to 1^-} 2x = 2$ y $\lim\limits_{x \to 1^-} (x - 1) = 0$. Se desea determinar si el resultado es $+\infty$ o $-\infty$. Puesto que $x \to 1^-$, se toma un valor cercano a 1 pero menor que 1; por ejemplo, tome $x = 0.9$ y al calcular el cociente se obtiene

$$\frac{2(0.9)}{0.9 - 1} = -18$$

El cociente negativo conduce a sospechar que

$$\lim_{x \to 1^-} \frac{2x}{x - 1} = -\infty$$

Este resultado se obtiene a partir del inciso (ii) del teorema 12 de límites, puesto que cuando $x \to 1^-$, $x - 1$ se aproxima a 0 mediante valores negativos.

Para el límite de (5), como $x \to 1^+$, se toma $x = 1.1$ y se calcula

$$\frac{2(1.1)}{1.1 - 1} = 22$$

Debido a que el cociente es positivo se sospecha que

$$\lim_{x \to 1^+} \frac{2x}{x - 1} = +\infty$$

Este resultado se obtiene a partir del inciso (i) del teorema 12 de límites, puesto que cuando $x \to 1^+$, $x - 1$ se aproxima a 0 por medio de valores positivos. ◀

Cuando utilice el procedimiento mostrado en el ejemplo ilustrativo 2, tenga cuidado al elegir el valor de x, asegúrese de que esté suficientemente cerca de a al determinar el comportamiento verdadero del cociente. Por ejemplo, cuando se calculó el $\lim\limits_{x\to 1^-} \dfrac{2x}{x-1}$, el valor elegido de x no debe ser sólo menor que 1, sino que también debe ser mayor que 0.

▶ EJEMPLO 1 Sea

$$F(x) = \frac{x^2 + x + 2}{x^2 - 2x - 3}$$

Determine: **(a)** $\lim\limits_{x\to 3^+} F(x)$; **(b)** $\lim\limits_{x\to 3^-} F(x)$. **(c)** Apoye las respuestas de los incisos (a) y (b) trazando la gráfica de F.

Solución

(a) $$\lim_{x\to 3^+} \frac{x^2 + x + 2}{x^2 - 2x - 3} = \lim_{x\to 3^+} \frac{x^2 + x + 2}{(x-3)(x+1)}$$

El límite del numerador es 14, lo cual puede verificarse fácilmente.

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 3^+} (x-3)(x+1) &= \lim_{x\to 3^+} (x-3) \cdot \lim_{x\to 3^+} (x+1)\\ &= 0 \cdot 4\\ &= 0\end{aligned}$$

El límite del denominador es 0, y el denominador se aproxima a 0 mediante valores positivos. Entonces, del teorema 12(i) de límites,

$$\lim_{x\to 3^+} \frac{x^2 + x + 2}{x^2 - 2x - 3} = +\infty$$

(b) $$\lim_{x\to 3^-} \frac{x^2 + x + 2}{x^2 - 2x - 3} = \lim_{x\to 3^-} \frac{x^2 + x + 2}{(x-3)(x+1)}$$

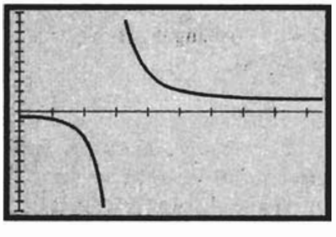
Como en el inciso (a), el límite del numerador es 14.

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 3^-} (x-3)(x+1) &= \lim_{x\to 3^-} (x-3) \cdot \lim_{x\to 3^-} (x+1)\\ &= 0 \cdot 4\\ &= 0\end{aligned}$$

En este caso, el límite del denominador es cero, pero el denominador se aproxima a cero por medio de valores negativos. Del teorema 12(ii) de límites,

$$\lim_{x\to 3^-} \frac{x^2 + x + 2}{x^2 - 2x - 3} = -\infty$$

(c) La figura 5 muestra la gráfica de F trazada en el rectángulo de inspección de $[0, 9.4]$ por $[-10, 10]$, la cual apoya las respuestas de los incisos (a) y (b). ◀



$[0, 9.4]$ por $[-10, 10]$

$$g(x) = \frac{x^2 + x + 2}{x^2 - 2x - 3}$$

FIGURA 5

EJEMPLO 2 Sean

$$f(x) = \frac{\sqrt{x^2 - 4}}{x - 2} \quad \text{y} \quad g(x) = \frac{\sqrt{4 - x^2}}{x - 2}$$

Determine: **(a)** $\lim_{x \to 2^+} f(x)$; **(b)** $\lim_{x \to 2^-} g(x)$. Apoye cada respuesta trazando la gráfica de la función.

Solución

(a) Como $x \to 2^+, x - 2 > 0$; de modo que $x - 2 = \sqrt{(x-2)^2}$. Así

$$\lim_{x \to 2^+} \frac{\sqrt{x^2 - 4}}{x - 2} = \lim_{x \to 2^+} \frac{\sqrt{(x-2)(x+2)}}{\sqrt{(x-2)^2}}$$

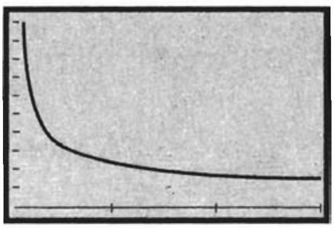
$$= \lim_{x \to 2^+} \frac{\sqrt{x-2}\sqrt{x+2}}{\sqrt{x-2}\sqrt{x-2}}$$

$$= \lim_{x \to 2^+} \frac{\sqrt{x+2}}{\sqrt{x-2}}$$

El límite del numerador es 2. El límite del denominador es 0, y el denominador se aproxima a 0 mediante valores positivos. En consecuencia, por el teorema 12(i) de límites,

$$\lim_{x \to 2^+} \frac{\sqrt{x^2 - 4}}{x - 2} = +\infty$$

La gráfica de f trazada en el rectángulo de inspección de [2, 5] por [0, 10], y mostrada en la figura 6, apoya la respuesta.



[2, 5] por [0, 10]

$f(x) = \frac{\sqrt{x^2 - 4}}{x - 2}$

FIGURA 6

(b) Como $x \to 2^-, x - 2 < 0$; de modo que $x - 2 = -\sqrt{(2-x)^2}$. Por tanto,

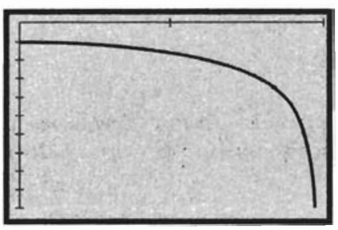
$$\lim_{x \to 2^-} \frac{\sqrt{4 - x^2}}{x - 2} = \lim_{x \to 2^-} \frac{\sqrt{2-x}\sqrt{2+x}}{-\sqrt{2-x}\sqrt{2-x}}$$

$$= \lim_{x \to 2^-} \frac{\sqrt{2+x}}{-\sqrt{2-x}}$$

El límite del numerador es 2. El límite del denominador es 0, y el denominador se aproxima a 0 mediante valores negativos. En consecuencia, por el teorema 12(ii) de límites,

$$\lim_{x \to 2^-} \frac{\sqrt{4 - x^2}}{x - 2} = -\infty$$

La figura 7 muestra la gráfica de g trazada en el rectángulo de inspección de [0, 2] por [−10, 0], la cual apoya la respuesta. ◀



[0, 2] por [−10, 0]

$g(x) = \frac{\sqrt{4 - x^2}}{x - 2}$

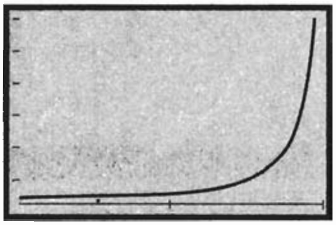
FIGURA 7

EJEMPLO 3 Dada

$$h(x) = \frac{[\![x]\!] - 4}{x - 4}$$

(a) Trace la gráfica de h, y a partir de la gráfica elabore un enunciado acerca del comportamiento aparente de $h(x)$ conforme x se aproxima a 4 por medio de valores menores que 4.

(b) Confirme el enunciado del inciso (a) analíticamente determinando el $\lim_{x \to 4^-} h(x)$.



[3, 4] por [0, 30]

$$h(x) = \frac{[\![x]\!] - 4}{x - 4}$$

FIGURA 8

Solución

(a) La figura 8 muestra la gráfica de h trazada en el rectángulo de inspección de [3, 4] por [0, 30]. En la figura, parece que $h(x)$ crece sin límite conforme x se aproxima a 4 mediante valores menores que 4.

(b) Como $\lim\limits_{x \to 4^-} [\![x]\!] = 3$, se tiene que $\lim\limits_{x \to 4^-} ([\![x]\!] - 4) = -1$. Además, $\lim\limits_{x \to 4^-} (x - 4) = 0$, y $x - 4$ se aproxima a 0 por medio de valores negativos. En consecuencia, del teorema 12(iv) de límites,

$$\lim_{x \to 4^-} \frac{[\![x]\!] - 4}{x - 4} = +\infty$$

Este resultado confirma el enunciado del inciso (a). ◀

Recuerde que como $+\infty$ y $-\infty$ no son símbolos para representar números reales, los teoremas 1 a 10 de límites de la sección 1.5 no se cumplen para límites "infinitos". Sin embargo, las propiedades concernientes a dichos límites se presentan en los teoremas siguientes, cuyas demostraciones se dejan como ejercicios (consulte los ejercicios suplementarios 7 a 9).

1.7.5 Teorema

(i) Si $\lim\limits_{x \to a} f(x) = +\infty$ y $\lim\limits_{x \to a} g(x) = c$, donde c es cualquier constante, entonces $\lim\limits_{x \to a} [f(x) + g(x)] = +\infty$

(ii) Si $\lim\limits_{x \to a} f(x) = -\infty$ y $\lim\limits_{x \to a} g(x) = c$, donde c es cualquier constante, entonces

$$\lim_{x \to a} [f(x) + g(x)] = -\infty$$

Estos teoremas también se cumplen si se sustituye "$x \to a$" por "$x \to a^+$" o "$x \to a^-$".

▷ EJEMPLO ILUSTRATIVO 3

Como

$$\lim_{x \to 2^+} \frac{1}{x - 2} = +\infty \quad \text{y} \quad \lim_{x \to 2^+} \frac{1}{x + 2} = \frac{1}{4}$$

se deduce del teorema 1.7.5(i) que $\lim\limits_{x \to 2^+} = \left[\frac{1}{x - 2} + \frac{1}{x + 2}\right] = +\infty$ ◀

1.7.6 Teorema

Si $\lim\limits_{x \to a} f(x) = +\infty$ y $\lim\limits_{x \to a} g(x) = c$, donde c es cualquier constante distinta de 0, entonces

(i) si $c > 0$, $\lim\limits_{x \to a} f(x) \cdot g(x) = +\infty$;

(ii) si $c < 0$, $\lim\limits_{x \to a} f(x) \cdot g(x) = -\infty$.

Estos teoremas también se cumplen si se sustituye "$x \to a$" por "$x \to a^+$" o "$x \to a^-$".

▷ EJEMPLO ILUSTRADO 4

$$\lim_{x \to 3} \frac{5}{(x - 3)^2} = +\infty \quad \text{y} \quad \lim_{x \to 3} \frac{x + 4}{x - 4} = -7$$

Por tanto, del teorema 1.7.6 (ii),

$$\lim_{x \to 3}\left[\frac{5}{(x-3)^2} \cdot \frac{x+4}{x-4}\right] = -\infty$$

1.7.7 Teorema

Si $\lim\limits_{x \to a} f(x) = -\infty$ y $\lim\limits_{x \to a} g(x) = c$, donde c es cualquier constante distinta de 0, entonces

(i) si $c > 0$, $\lim\limits_{x \to a} f(x) \cdot g(x) = -\infty$;
(ii) si $c < 0$, $\lim\limits_{x \to a} f(x) \cdot g(x) = +\infty$.

Estos teoremas también se cumplen si se sustituye "$x \to a$" por "$x \to a^+$" o "$x \to a^-$".

EJEMPLO ILUSTRATIVO 5 En el ejemplo 2(b) se mostró que

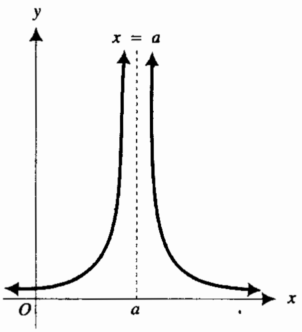
$$\lim_{x \to 2^-} \frac{\sqrt{4-x^2}}{x-2} = -\infty$$

Además,

$$\lim_{x \to 2^-} \frac{x-3}{x+2} = -\frac{1}{4}$$

Por tanto, del teorema 1.7.7(ii)

$$\lim_{x \to 2^-}\left[\frac{\sqrt{4-x^2}}{x-2} \cdot \frac{x-3}{x+2}\right] = +\infty$$



$f(x) = \dfrac{1}{(x-a)^2}$

FIGURA 9

Se pueden aplicar límites infinitos para determinar las *asíntotas verticales* de una gráfica, si es que posee alguna. Consulte la figura 9 que muestra la gráfica de la función definida por

$$f(x) = \frac{1}{(x-a)^2} \tag{6}$$

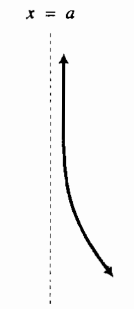
Cualquier recta paralela al eje x y por encima de éste intersectará esta gráfica en dos puntos, un punto a la izquierda del la recta $x = a$ y el otro en el lado derecho de dicha recta. Así, para cualquier $k > 0$, no importa qué tan grande sea, la recta $y = k$ intersectará a la gráfica de f en dos puntos; la distancia de estos dos puntos a la recta $x = a$ es cada vez más pequeña conforme k crece. Por esto, se dice que la recta $x = a$ es una *asíntota vertical* de la gráfica de f.

1.7.8 Definición de asíntota vertical

La recta $x = a$ es una **asíntota vertical** de la gráfica de la función f si al menos uno de los siguientes enunciados es verdadero:

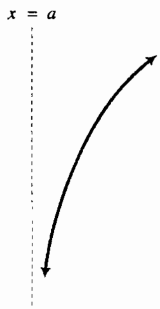
(i) $\lim\limits_{x \to a^+} f(x) = +\infty$
(ii) $\lim\limits_{x \to a^+} f(x) = -\infty$
(iii) $\lim\limits_{x \to a^-} f(x) = +\infty$
(iv) $\lim\limits_{x \to a^-} f(x) = -\infty$

EJEMPLO ILUSTRATIVO 6 Cada una de las figuras 10 a 13 muestra una porción de la gráfica de una función para la cual la recta $x = a$ es una asíntota vertical. En la figura 10 se aplica el inciso (i) de la definición 1.7.8; en la figura 11, se aplica el inciso (ii); y en las figuras 12 y 13 se aplican los incisos (iii) y (iv), respectivamente.



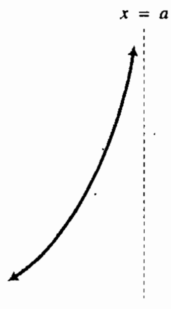
$\lim\limits_{x \to a^+} f(x) = +\infty$

FIGURA 10



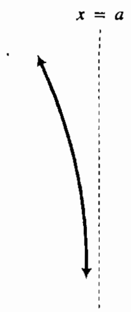
$\lim\limits_{x \to a^+} f(x) = -\infty$

FIGURA 11



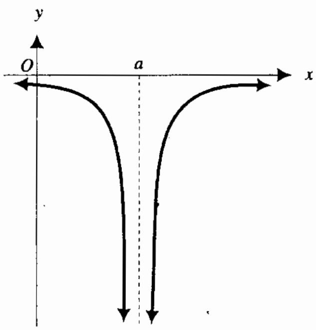
$\lim\limits_{x \to a^-} f(x) = +\infty$

FIGURA 12



$\lim\limits_{x \to a^-} f(x) = -\infty$

FIGURA 13



$g(x) = -\dfrac{1}{(x-a)^2}$

FIGURA 14

Para la función definida por (6), los incisos (i) y (iii) de la definición anterior son verdaderos. *Véase* la figura 9. Si g es la función definida por

$$g(x) = -\frac{1}{(x-a)^2}$$

entonces los incisos (ii) y (iv) son verdaderos, por lo que la recta $x = a$ es una asíntota vertical de la gráfica de g. La figura 14 muestra esta situación.

EJEMPLO 4 Determine la asíntota vertical de la gráfica de la función f definida por

$$f(x) = \frac{3}{x-3}$$

Apoye la respuesta trazando la gráfica de f y la asíntota en el mismo rectángulo de inspección.

Solución Se estudiarán los límites

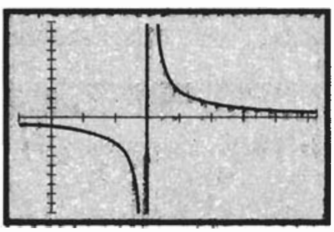
$$\lim_{x \to 3^+} f(x) \quad \text{y} \quad \lim_{x \to 3^-} f(x)$$

porque en los dos casos, el límite del denominador es cero.

$$\lim_{x \to 3^+} \frac{3}{x-3} = +\infty \qquad \lim_{x \to 3^-} \frac{3}{x-3} = -\infty$$

De la definición 1.7.8 se concluye que la recta $x = 3$ es una asíntota vertical de la gráfica de f.

La gráfica de f y de la recta $x = 3$ trazadas en el rectángulo de inspección de $[-1, 8.4]$ por $[-10, 10]$, mostradas en la figura 15, apoyan la respuesta.



$[-1, 8.4]$ por $[-10, 10]$

$f(x) = \dfrac{3}{x-3}$

FIGURA 15